

Ecole d'hiver 2008 du GDR Nucléon
8-11 décembre 2008
SPhN, Saclay

Diffusion Lepton-Nucléon
et
Chromodynamique Quantique
Perturbative

Samuel Wallon

LPT

version du 11/12/2008

Table des matières

1	Petit memento	1
1.1	Règles de Feynman pour QED et QCD en jauge covariante	1
1.1.1	QED	1
1.1.2	QCD	2
1.1.3	Lignes externes	4
1.2	Des amplitudes aux sections efficaces	4
1.2.1	Facteur de flux	5
1.2.2	Espace des phases	6
1.2.3	Variables de Mandelstam	8
1.2.4	Somme sur les spins	13
1.2.5	Calcul des traces : un peu de γ -gymnastique	13
1.3	Théorème optique	14
1.4	Décomposition de Fierz	15
1.5	Kaléidoscope : un peu de couleur	16
2	Quelques processus typiques en QED	21
2.1	Introduction	21
2.2	Annihilation $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$	23
2.3	La diffusion $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$	26
2.4	Variables de Mandelstam, croisement	28
3	Facteur de forme du nucléon	31
3.1	Cinématique de la diffusion lepton-nucléon	31
3.2	Courant hadronique et facteurs de forme	32
3.2.1	Paramétrisation du courant électromagnétique d'un hadron étendu	32
3.2.2	Moments magnétiques des leptons et des nucléons	34
3.2.3	Facteurs de forme électrique et magnétique	35
3.2.4	Résumé	36
3.3	Section efficace et tenseur hadronique	36
3.3.1	Des tenseurs hadroniques et leptoniques aux sections efficaces	36
3.3.2	Le cas particulier de la diffusion élastique	37
3.3.3	Calcul du tenseur hadronique élastique	39
3.3.4	Structure du tenseur hadronique et projecteurs	40
3.3.5	Polarisations du photon	41
3.3.6	Tenseur hadronique et fonctions de structure élastiques	43
3.3.7	Expressions des sections efficaces	45

3.4	Phénoménologie	46
4	Diffusion profondément inélastique	51
4.1	Introduction	51
4.2	Justification qualitative du modèle des partons	53
4.2.1	Référentiels de moment infini	54
4.2.2	Echelles de temps des processus mis en jeu	57
4.3	Distributions de partons et fonctions de structure	62
4.3.1	Un peu de cinématique	62
4.3.2	Section efficace et fonctions de structure	63
4.3.3	Les fonctions de structure vues comme des sections efficaces γ^*p	64
4.3.4	Fonctions de structure dans le modèle des partons	66

Chapitre 1

Petit memento

Dans l'ensemble de ce cours, nous utiliserons les conventions de Peskin-Schroeder¹. Les règles de Feynman énoncées ci-dessous permettent d'évaluer $i\mathcal{M}$, où \mathcal{M} est l'amplitude de diffusion d'un processus donné. Par définition, c'est un élément de matrice de² $S - 1 = iT$ i.e.

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{if} = \langle f|T|i\rangle. \quad (1.1)$$

1.1 Règles de Feynman pour QED et QCD en jauge covariante

Nous noterons dans toute la suite par e la charge de l'électron (i.e. l'électron est de charge $e = -|e|$ dans ce système de notations)³.

1.1.1 QED

Nous écrivons la dérivée covariante sous la forme

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.2)$$

Le lagrangien de Yang-Mills abélien s'écrit alors, en jauge covariante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\text{fixation de jauge}} + \mathcal{L}_{Dirac} \\ &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \end{aligned} \quad (1.3)$$

soit encore

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2}_{\Rightarrow \text{prop. du photon}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi}_{\Rightarrow \text{prop. de l'électron}} + \underbrace{(-)e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{terme d'interaction}} \quad (1.4)$$

¹Elles sont identiques à celles utilisées dans Itzykson-Zuber pour QED; pour QCD, elles diffèrent uniquement par le changement de signe pour g_S

²Cette définition est à peu près universelle. Cependant, on pourra rencontrer dans la littérature la définition $S = 1 + T$ (A. H. Mueller, par exemple dans son modèle des dipôles en physique à petits x_{Bj}), ou encore $S = 1 - iT$ (PDG).

³Les notations peuvent parfois prêter à confusion. Ainsi Peskin, Schroeder et Itzykson, Zuber notent $e = -|e|$ la charge de l'électron, tandis que Muta note $e = |e|$ l'unité de charge positive!

Les règles de l'intégration gaussienne (à la fois sur les champs bosoniques A et sur les champs fermioniques $\bar{\psi}$ et ψ) permettent d'évaluer perturbativement les fonctions de corrélations formées à partir de

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{QED}} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left[1 - ie \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \dots \right].$$

On en déduit le vertex

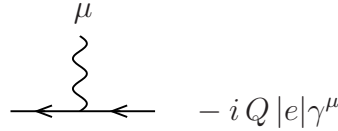


$$-ie\gamma^\mu. \quad (1.5)$$

Le lagrangien ci-dessus correspond au cas de l'électron, de charge $e = -|e|$. Dans le cas d'une particule de charge $Q|e|$ ($Q = -1$ pour l'électron), en partant de la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iQ|e|A_\mu, \quad (1.6)$$

on en déduit que le vertex d'interaction s'écrit

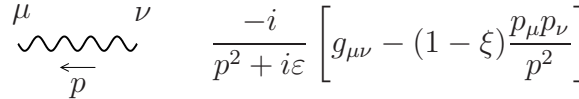


$$-iQ|e|\gamma^\mu. \quad (1.7)$$

Les propagateurs de l'électron et du photon s'écrivent respectivement :



$$\frac{i}{\not{p} - m} \quad (1.8)$$



$$\frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \quad (1.9)$$

Il est d'usage d'appeler jauge de Landau le cas $\xi = 0$ et jauge de Feynman le cas $\xi = 1$.

1.1.2 QCD

Résumons en quelques lignes la structure du lagrangien de QCD. On introduit les générateurs hermitiens t^a de la représentation fondamentale de $SU(N_c)$ ($N_c = 3$), qui sont au nombre de $N_c^2 - 1 = 8$ (étiquetés par a). Ce sont des matrices $N_c \times N_c$, hermitiennes et de trace nulle. Les quarks se transforment sous l'action des générateurs t^a et les antiquarks⁴ sous l'action des générateurs $(t^a)^*$. Ceci signifie que les quarks et les antiquarks sont du point de vue de la couleur des vecteurs à N_c composantes (notées conventionnellement Ψ^i et $\bar{\Psi}^i$ ($i = 1 \dots N_c$)). Par définition, ces matrices vérifient la relation

$$\boxed{[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c} \quad (1.10)$$

où les *constantes de structure* f^{abc} sont complètement antisymétriques⁵.

⁴Pour $N_c \geq 3$ les représentations engendrées par t^a et $(t^a)^*$ ne sont pas équivalentes : on doit donc distinguer couleur et anticouleur.

⁵La connaissance d'une réalisation explicite de t^a et f^{abc} ne joue en pratique aucun rôle.

Le champ gluonique possède $N_c^2 - 1$ couleurs possibles. Du point de vue de la couleur, c'est donc un vecteur à $N_c^2 - 1$ composantes⁶. Chacune de ces composantes est notée A^a ($a = 1 \cdots N_c^2 - 1$). La dynamique du champ de jauge est alors définie à l'aide du tenseur

$$\boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.} \quad (1.11)$$

Le couplage au champ de matière est défini à l'aide de la dérivée covariante

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a.} \quad (1.12)$$

Pour quantifier la théorie, il est nécessaire de fixer la jauge. En jauge covariante, ceci impose d'introduire des fantômes de Faddeev-Popov (notés c), qui se transforment du point de vue de la couleur comme les gluons. Ces champs violent le théorème spin-statistique (ce sont des fermions qui se comportent comme des scalaires sous le groupe de Lorentz). Ils ne peuvent apparaître comme champs externes, mais seulement dans des boucles fermées à l'intérieur des diagrammes de Feynman⁷.

Le lagrangien complet de Yang-Mills s'écrit alors

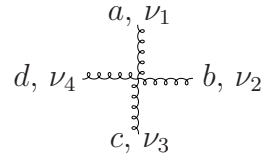
$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \bar{c}\square c + g\partial^\mu \bar{c}_b f_{bca} A_\mu^a c_c}$$

Les règles de Feynman s'en déduisent aisément. Elle s'écrivent :

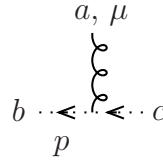
$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} p \\ \longleftarrow \\ i \quad j \end{array} \quad \frac{i}{\not{p} - m} \delta_{ij} \\
 \\
 \begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ a \text{~~~~~} b \end{array} \quad \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \delta^{ab} \\
 \\
 \begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ a \text{~~~~~} b \end{array} \quad \frac{-i\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon} \\
 \\
 \begin{array}{c} a, \mu \\ \text{~~~~~} \\ i \longleftarrow j \end{array} \quad ig\gamma^\mu t_{ij}^a \\
 \\
 \begin{array}{c} a, \nu_1 \\ \text{~~~~~} \\ k_1 \\ \text{~~~~~} \\ k_2 \quad k_3 \\ \text{~~~~~} \\ b, \nu_2 \quad c, \nu_3 \end{array} \quad gf^{abc} [g^{\nu_1\nu_2} (k_1 - k_2)^{\nu_3} + \delta^{\nu_2\nu_3} (k_2 - k_3)^{\nu_1} + \delta^{\nu_1\nu_3} (k_3 - k_1)^{\nu_2}]
 \end{array}$$

⁶On dit qu'il se transforme suivant la représentation adjointe.

⁷Physiquement (argument dû à Feynman), un gluon physique, de masse nulle, possède deux polarisations, comme le photon. Lorsqu'il apparaît dans une contribution virtuelle (boucle), il possède 4 polarisations possibles. L'unitarité impose que les deux polarisations non physique disparaissent, ce qui est exactement le rôle du fantôme et l'anti-fantôme. Voir par exemple Cheng-Li p.268.



$$\begin{aligned}
 & -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g^{\nu_1\nu_3} g^{\nu_2\nu_4} - g^{\nu_1\nu_4} g^{\nu_2\nu_3}) \right. \\
 & \quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\nu_1\nu_2} g^{\nu_3\nu_4} - g^{\nu_1\nu_4} g^{\nu_2\nu_3}) \\
 & \quad \left. + f^{ade} f^{bce} (g^{\nu_1\nu_2} g^{\nu_3\nu_4} - g^{\nu_1\nu_3} g^{\nu_2\nu_4}) \right]
 \end{aligned} \tag{1.13}$$



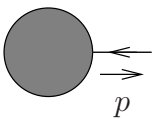
$$-g f^{abc} p^\mu$$

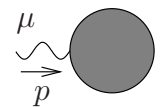
1.1.3 Lignes externes

fermion entrant  $u(p)$

fermion sortant  $\bar{u}(p)$

antifermion entrant  $\bar{v}(p)$

antifermion sortant  $v(p)$

photon entrant  $\epsilon_\mu(p)$

photon sortant  $\epsilon_\mu^*(p)$

(1.14)

1.2 Des amplitudes aux sections efficaces

Considérons un processus

$$(p_1 J_1) + (p_2, J_1) \rightarrow (k_1 j_1) + \cdots (k_n j_n), \tag{1.15}$$

où p_1 et p_2 sont les impulsions des particules initiales, de spins respectifs J_1 et J_2 , et $k_1, k_2 \dots k_n$ sont les impulsions des n particules finales, de spins respectifs $j_1 \dots j_n$.

La section efficace du processus s'écrit alors, en notant λ_1 et λ_2 les hélicités des particules incidentes, et $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ les hélicités des particules sortantes,

$$\sigma = \frac{1}{2K(s)} \int d\Pi_n |\mathcal{M}(p_1 \lambda_1, p_2 \lambda_2 \rightarrow k_1 \mu_1, \dots, k_n \mu_n)|^2. \quad (1.16)$$

$2K(s)$ est le facteur de flux, défini comme le produit de la densité de particules de la cible et du flux de particules incidentes, et $d\Pi_n$ est l'espace des phases. Nous allons détailler ces deux quantités ci-après.

Dans le cas où l'on ne mesure pas la polarisation des états finals, la section efficace s'obtient en sommant sur toutes ces polarisations. Si en outre les états initiaux ne sont pas polarisés, on doit moyenner la section efficace sur ces polarisations. La section efficace du processus s'écrit alors

$$\sigma_{non\ pol.} = \frac{1}{2K(s)} \frac{1}{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \dots \mu_n} \int d\Pi_n |\mathcal{M}(p_1 \lambda_1, p_2 \lambda_2 \rightarrow k_1 \mu_1, \dots, k_n \mu_n)|^2. \quad (1.17)$$

1.2.1 Facteur de flux

On montre⁸ que

$$K(s) = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} = \sqrt{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]}. \quad (1.18)$$

Cette dernière relation est valable pour un processus faisant intervenir un état virtuel de virtualité arbitraire. Les "masses" carrées m_1^2 et m_2^2 sont alors remplacées par les virtualités correspondantes. En particulier elles peuvent être négative, comme dans le cas de la diffusion $\gamma^* P$ avec un photon virtuel de genre espace.

Nous écrivons $K(s)$ comme fonction de la variable de Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$, puisque $p_1 \cdot p_2 = (s - m_1^2 - m_2^2)/2$. Dans le cas habituel où les masses m_1 et m_2 sont positives, on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \lambda(s, m_1^2, m_2^2) &= 4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2] = [2(p_1 \cdot p_2) - 2m_1 m_2][2(p_1 \cdot p_2) + 2m_1 m_2] \\ &= [s - m_1^2 - m_2^2 - 2m_1 m_2][s - m_1^2 - m_2^2 + 2m_1 m_2] \end{aligned} \quad (1.19)$$

soit⁹

$$\boxed{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}. \quad (1.20)$$

Deux cas particuliers sont utiles :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda(s, 0, M) &= (s - M^2)^2 & : & \text{une des masses est nulle} \\ \lambda(s, 0, 0) &= s^2 & : & \text{les deux masses sont nulles.} \end{aligned}} \quad (1.21)$$

⁸La notation λ est standard dans la littérature.

⁹La fonction $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ ne dépend que de s et du carré des masses, fait qui est caché dans l'écriture du membre de droite de (1.19). On notera que la fonction $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ est bien symétrique en $m_1^2 \leftrightarrow m_2^2$, comme attendu.

Dans le référentiel du centre de masse, le facteur de flux possède une expression particulière-ment simple¹⁰, très utile en pratique¹¹ :

$$\boxed{2K = 4p_i^* W^*} \quad (1.22)$$

où $W^* = E_1^* + E_2^*$ est l'énergie totale dans le centre de masse.

Preuve:

Partant de

$$\begin{cases} E_1^{*2} - p_i^{*2} = m_1^2 \\ E_2^{*2} - p_i^{*2} = m_2^2 \end{cases}$$

avec $p_i^* \equiv p_1^* = p_2^*$, on tire

$$2K = 4 \left[(E_1^* E_2^* + p_i^{*2})^2 - (E_1^{*2} - p_i^{*2})(E_2^{*2} - p_i^{*2}) \right]^{1/2} = 4 \left[(E_1^* + E_2^*)^2 p_i^{*2} \right]^{1/2} = 4 (E_1^* + E_2^*) p_i^* .$$

1.2.2 Espace des phases

$d\Pi_n$ est l'espace des phases, dont la forme invariante relativiste est donnée par

$$d\Pi_n = \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3 2k_j^0} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{j=1}^n k_j - p_1 - p_2 \right) . \quad (1.23)$$

Considérons à présent la réaction 2 corps \rightarrow 2 corps

$$(p_1 J_1) + (p_2 J_2) \rightarrow (p_3 J_3) + (p_4 J_4) , \quad (1.24)$$

pour laquelle

$$d\Pi_2 = \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2p_4^0} (2\pi)^4 \delta^4 (p_3 + p_4 - p_1 - p_2) . \quad (1.25)$$

L'espace des phases, qui fait intervenir 6 variables, se réduit à une intégration sur 2 variables indépendantes à cause de la conservation globale d'énergie-impulsion. En intégrant sur p_4 , il se déduit donc à¹²

$$\int d^3 p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3 p_4} = \frac{p_3^2 dp_3 d^2 \Omega}{(2\pi)^3 2E_3 2E_4} (2\pi) \delta(W - E_3(\vec{p}_3) - E_4(\vec{p}_3)) , \quad (1.26)$$

avec¹³

$$E_3(\vec{p}_3) = p_3^0 = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2} \quad \text{et} \quad E_4(\vec{p}_3) = p_4^0 = \sqrt{\vec{p}_4^2(\vec{p}_3) + m_4^2} , \quad \text{où} \quad \vec{p}_4(\vec{p}_3) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 . \quad (1.27)$$

¹⁰Elle reste valable y compris dans le cas où les états initiaux sont virtuels, en particulier de virtualité négative.

¹¹Nous adoptons la notation suivant laquelle une quantité surmontée de * est mesurée dans le référentiel du centre de masse.

¹²On note $p_3 = |\vec{p}_3|$, que l'on ne confondra pas dans ce contexte avec le quadrivecteur p_3 .

¹³Les paramètres cinématiques externes fixant complètement l'impulsion totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ et l'énergie totale W (qui dépendent du référentiel), on a bien un espace des phases qui ne dépend que de 2 variables indépendantes.

$d^2\Pi_2$ peut donc s'écrire en fonction de $d^2\Omega$ uniquement.

Dans le référentiel du centre de masse, cet espace des phases possède une expression particulièrement simple :

$$\int dp_3^* d^3p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3p_4 dp_3^*} = \frac{p_3^*}{16\pi^2 W^*}. \quad (1.28)$$

Preuve:

Partant de

$$\int d^3p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3p_4} = d^2\Omega^* \frac{p_3^{*2} dp_3^*}{16\pi^2 E_3^* E_4^*} \delta(W^* - E_3^*(\vec{p}_3^*) - E_4^*(\vec{p}_3^*)), \quad (1.29)$$

nous pouvons écrire,¹⁴ en utilisant (1.27) dans le cas où $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0$ et en posant

$$p_3^*(E_3^*) = \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \int d^3p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3p_4} &= d^2\Omega^* \frac{p_3^{*2} dp_3^*}{16\pi^2 E_3^* E_4^*} \left| \frac{d[E_3^*(\vec{p}_3^*) + E_4^*(\vec{p}_3^*)]}{dp_3^*} \right|^{-1} \delta(p_3^* - p_3^*(E_3^*)) \\ &= d^2\Omega^* \frac{p_3^{*2} dp_3^*}{16\pi^2 E_3^* E_4^*} \frac{1}{\frac{p_3^*}{E_3^*} + \frac{p_3^*}{E_4^*}} \delta(p_3^* - p_3^*(E_3^*)) \\ &= d^2\Omega^* \frac{p_3^* dp_3^*}{16\pi^2 W^*} \delta(p_3^* - p_3^*(E_3^*)). \end{aligned} \quad (1.31)$$

La section efficace différentielle s'écrit donc

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega^*} = \frac{1}{2K(s)} \frac{p_3^*}{16\pi^2 W^*} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2, \quad (1.32)$$

soit encore, d'après (1.22), et en notant $p_f^* = p_3^*$ et $p_i^* = p_1^*$,

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d^2\Omega^*} = \frac{p_f^*}{p_i^*} \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2}, \quad (1.33)$$

puisque $s = W^{*2}$. Notons que p_i^* et p_f^* s'expriment sous forme invariante relativiste de façon très simple : en effet, d'après (1.22), pour toute réaction 2 corps $\rightarrow n$ corps

$$\boxed{p_i^* = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2\sqrt{s}}}, \quad (1.34)$$

et dans le cas de la réaction 2 corps $\rightarrow 2$ corps, nous avons en outre

$$\boxed{p_f^* = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s}}}. \quad (1.35)$$

On peut noter qu'un choc élastique, correspondant par définition à $m_1 = m_3$ et $m_2 = m_4$ (ou $m_1 = m_4$ et $m_2 = m_3$) donne bien $p_i^* = p_f^*$, comme en mécanique classique.

¹⁴Rappelons que $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ où x_i sont les racines de $f(x) = 0$.

1.2.3 Variables de Mandelstam

La réaction à 2 corps \rightarrow 2 corps

$$(p_1 J_1) + (p_2 J_2) \rightarrow (p_3 J_3) + (p_4 J_4) \quad (1.36)$$

est complètement caractérisée¹⁵ par les variables de Mandelstam définies par

$$\begin{array}{l} s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t \equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u \equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \end{array} \quad (1.37)$$

les expressions équivalentes découlant de la conservation de l'énergie-impulsion. Ces variables sont illustrées sur la figure 1.1. Chacune des variables peut être considérée comme une variable

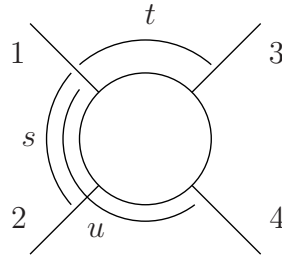


FIG. 1.1 – Variables de Mandelstam pour un processus 2 corps \rightarrow 2 corps.

“s” pour un processus croisé :

	variable “ s ”	variable “ t ”	variable “ u ”
voie s : $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$	s	t	u
voie t : $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$	t	s	u
voie u : $1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2}$	u	t	s

(1.38)

En effet, une particule i d'impulsion p_i avec $p^0 > 0$ doit être considérée comme son antiparticule \bar{i} , d'impulsion $-p_i$ lorsque $p^0 < 0$. La même amplitude $\mathcal{M}(s, t, u)$ décrit donc ces 3 réactions, ainsi que toutes les réactions de désintégration 1 corps \rightarrow 3 corps (par exemple $1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4$) et toutes les réactions inverses (par exemple $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$), par prolongement analytique sur les variables s, t, u .

On tire immédiatement de la conservation de l'énergie-impulsion la relation

$$s + t + u = \sum_i m_i^2. \quad (1.39)$$

Preuve:

¹⁵Si l'on ne prend pas en compte des effets de spin.

Il suffit de calculer $2(s + t + u)$ en sommant les 6 termes de (1.37) et d'utiliser ensuite la conservation de l'énergie impulsion :

$$\begin{aligned}
2(s + t + u) &= 3 \sum_i m_i^2 + 2p_1 \cdot p_2 + 2p_3 \cdot p_4 - 2p_1 \cdot p_3 - 2p_2 \cdot p_4 - 2p_1 \cdot p_4 - 2p_2 \cdot p_3 \\
&= 3 \sum_i m_i^2 + 2p_1 \cdot p_2 + 2p_3 \cdot p_4 - 2(p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) \\
&= 3 \sum_i m_i^2 + (s - m_1^2 - m_2^2) + (s - m_3^2 - m_4^2) - 2s = 2 \sum_i m_i^2.
\end{aligned}$$

En conséquence, l'amplitude diffusion ne dépend que de deux variables indépendantes. On choisit conventionnellement d'écrire

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{M}(s, t)}.$$

Dans le référentiel du centre de masse, un calcul élémentaire¹⁶ montre que

$$\boxed{
\begin{aligned}
E_1^* &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, & E_3^* &= \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \\
E_2^* &= \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}, & E_4^* &= \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}.
\end{aligned}
} \tag{1.40}$$

En utilisant les relations (1.34) et (1.35) (ainsi que les expressions analogues pour les voies croisées : pour la voie t on considère $\lambda(t, m_1^2, m_3^2)$ et $\lambda(t, m_2^2, m_4^2)$ et pour la voie u on considère $\lambda(u, m_1^2, m_4^2)$ et $\lambda(u, m_2^2, m_3^2)$) et les expressions précédentes des énergies dans le centre de masse (et les expressions correspondantes pour les réactions croisées), on déduit les conditions de seuils suivantes¹⁷ :

$$\boxed{
\begin{aligned}
\text{voie } s : & \quad 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 : \quad s \geq (m_1 + m_2)^2 \quad \text{et} \quad (m_3 + m_4)^2 \\
\text{voie } t : & \quad 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 : \quad t \geq (m_1 + m_3)^2 \quad \text{et} \quad (m_2 + m_4)^2 \\
\text{voie } u : & \quad 1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2} : \quad u \geq (m_1 + m_4)^2 \quad \text{et} \quad (m_2 + m_3)^2
\end{aligned}
} \tag{1.41}$$

Il est souvent utile d'exprimer la section efficace différentielle (1.33) en terme des invariants relativistes. Pour cela, exprimons l'angle de diffusion¹⁸ θ de la réaction en voie s :

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta. \tag{1.42}$$

soit

$$\cos \theta = \frac{t - m_1^2 - m_3^2 + 2E_1 E_3}{2|\vec{p}_1||\vec{p}_3|}. \tag{1.43}$$

¹⁶Par exemple pour exprimer E_1^* , il suffit de combiner (1.34) et $E_1^{*2} = \vec{p}_1^{*2} + m_1^2$.

¹⁷La condition à écrire est que p_1^* et p_3^* doivent être positives, et que les énergies E_i^* doivent être toutes positives.

¹⁸Noté θ_{13} ou θ_s dans la littérature : c'est l'angle de diffusion entre les particules 1 et 3, c'est-à-dire l'angle de la diffusion en voie s .

En terme de la variable u , l'angle diffusion s'écrit

$$\cos \theta = \frac{m_2^2 - m_4^2 - s - u + 2 E_1 E_3}{2 |\vec{p}_1| |\vec{p}_3|}. \quad (1.44)$$

Dans un référentiel arbitraire, pour s et E_1 fixés, E_3 et $|\vec{p}_3|$, dépendent de $\cos \theta$, ce qui rend la discussion délicate. Dans le référentiel du centre de masse, nous pouvons écrire

$$\cos \theta^* = \frac{t - m_1^2 - m_3^2 + 2 E_1^* E_3^*}{2 p_1^* p_3^*} \quad (1.45)$$

$$\cos \theta^* = \frac{m_2^2 + m_4^2 - s - u + 2 E_1^* E_3^*}{2 p_1^* p_3^*}, \quad (1.46)$$

expressions dans lesquelles E_1^* , E_3^* , p_1^* et p_3^* sont fixées pour s donné par (1.40) et (1.34, 1.35). On constate alors sur les expressions (1.45) et (1.46) que

réaction vers l'avant ($\theta^* = 0$) \iff valeur maximale ¹⁹ (en valeur algébrique) de t
réaction vers l'arrière ($\theta^* = \pi$) \iff valeur maximale (en valeur algébrique) de u

(1.47)

Dans ce référentiel du centre de masse, on déduit donc de (1.45, 1.46) et de (1.34, 1.35, 1.40) que l'angle θ^* peut être exprimé dans ces variables invariantes :

$$\begin{aligned} \cos \theta^* = \frac{t - m_1^2 - m_3^2 + 2 E_1^* E_3^*}{2 p_1^* p_3^*} &= \frac{s^2 + s(2t - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)}} \\ &= \frac{s(t - u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Remarque:

On constate sur cette relation que dans la limite de haute énergie où $s \gg -t$, m_i^2 , appelée *limite de Regge*, $\theta^* \rightarrow 0$ puisque $\lambda(s, m_i^2) \sim s^2$: dans cette limite, la diffusion vers l'avant régit le comportement de l'amplitude.

Pour un s donné, la contrainte $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ détermine la région physique en t :

$$t^- \leq t \leq t^+ \quad \text{avec} \quad (1.49)$$

$$t^\pm = m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s} \{ (s + m_1^2 - m_2^2)(s + m_3^2 - m_4^2) \mp \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \}. \quad (1.50)$$

La discussion est plus éclairante dans le cas où toutes les masses sont égales ($m_i^2 = m^2$). On a alors $\lambda(s, m^2, m^2) = s(s - 4m^2)$ et

$$\cos \theta^* = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}. \quad (1.51)$$

¹⁹Notée en général $|t|_{min}$ dans la littérature, car elle est en général proche de 0, donc t est pratiquement quasiment toujours négatif, et $|t|$ est alors en général supérieur à cette valeur $|t|_{min}$. On a $|t|_{min} = |t^+|$, avec t^+ défini par (1.50).

Le domaine physique de la réaction est alors donné par les conditions

$$s \geq 4m^2 \quad \text{et} \quad t^- = 4m^2 - s \leq t \leq t^+ = 0. \quad (1.52)$$

On vérifie alors que

$$\begin{aligned} u &= -\frac{s - 4m^2}{2}(1 + \cos \theta) \\ t &= -\frac{s - 4m^2}{2}(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

et on retrouve le fait que

- t négatif, petit en valeur absolue, correspond à θ^* petit (avant),
- u négatif, petit en valeur absolue, correspond à $\pi - \theta^*$ petit (arrière).

Revenons maintenant à notre problème consistant à exprimer la section efficace différentielle (1.33) en terme des invariants relativistes. De (1.45) on tire

$$d \cos \theta^* = \frac{dt}{2p_1^* p_3^*}. \quad (1.53)$$

et donc, puisque $d^2\Omega^* = d\phi^* d \cos \theta^*$, et en utilisant (1.33),

$$\frac{d\sigma}{dt d\phi^*} = \frac{d\sigma}{2p_1^* p_3^* d^2\Omega^*} = \frac{1}{128\pi^2 s p_1^{*2}} |\mathcal{M}(s, t, \phi)|^2. \quad (1.54)$$

Dans le cas où la réaction étudiée est symétrique par rapport à l'axe de collision, on peut intégrer sur ϕ^* et donc

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s p_1^{*2}} |\mathcal{M}(s, t)|^2}. \quad (1.55)$$

Il est souvent utile en pratique d'exprimer la section efficace dans le référentiel du laboratoire, dans lequel la cible est au repos. Plutôt que d'expliciter le boost permettant de relier un référentiel à l'autre, il est plus simple de passer par l'invariant relativiste t . Posons

$$q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2. \quad (1.56)$$

Alors

$$t = q^2 = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta. \quad (1.57)$$

La relation $p_4 = p_2 + q$ permet d'écrire

$$m_4^2 = m_2^2 + 2q \cdot p_2 + q^2$$

et donc

$$t = q^2 = -2q \cdot p_2 + m_4^2 - m_2^2 = -2m_2(E_1 - E_3) + m_4^2 - m_2^2 \quad (1.58)$$

dans le référentiel du laboratoire où la particule 2 est au repos. On tire donc de (1.57) et (1.58), puisque $|\vec{p}_3| = \sqrt{E_3^2 - m_3^2}$,

$$dt = -2E_1 dE_3 + 2|\vec{p}_1| \frac{E_3 dE_3}{|\vec{p}_3|} \cos \theta + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| d \cos \theta = 2m_2 dE_3, \quad (1.59)$$

d'où finalement, après élimination de dE_3 ,

$$dt = \frac{2 m_2 |\vec{p}_1| |\vec{p}_3|^2}{(m_2 + E_1) |\vec{p}_3| - E_3 |\vec{p}_1| \cos \theta} d \cos \theta. \quad (1.60)$$

Dans la limite où m_1 et m_3 sont négligeable devant E_1 et E_3 , cette expression se simplifie en

$$dt = \frac{2 m_2 E_1 E_3}{m_2 + E_1 (1 - \cos \theta)} d \cos \theta.$$

En utilisant (1.57) et (1.58), on obtient

$$2 E_1 E_3 (1 - \cos \theta) = 2 m_2 (E_1 - E_3) + m_2^2 - m_4^2$$

d'où finalement

$$dt = \frac{2 E_3^2}{1 + \frac{m_2^2 - m_4^2}{m_2 E_1}} d \cos \theta. \quad (1.61)$$

Dans la limite où l'énergie E_1 est grande devant m_2^2 , m_4^2 , on écrira

$$dt = 2 E_3^2 d \cos \theta. \quad (1.62)$$

De l'identité

$$\frac{d^2 \Omega}{d^2 \Omega^*} = \frac{d \cos \theta}{d \cos \theta^*} \quad (1.63)$$

et en égalant les deux expressions (1.53) et (1.60) obtenues pour dt , on déduit dans la limite où $m_1 = m_3 = 0$ et $m_2 = m_4$, que

$$\frac{d^2 \Omega}{d^2 \Omega^*} = \frac{p_1^{*2}}{E_3^2}. \quad (1.64)$$

Il nous reste à évaluer p_1^* , qui vaut, d'après (1.34) et en utilisant (1.21),

$$p_1^* = \frac{s - m_2^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m_2 E_1}{\sqrt{s}}$$

puisque $s = (p_1 + p_2)^2 = m_2 + 2 m_2 E_1$. et l'on obtient finalement

$$\frac{d^2 \Omega}{d^2 \Omega^*} = \frac{m_2^2 E_1^2}{s E_3^2}. \quad (1.65)$$

En combinant ce résultat avec l'expression (1.33), nous obtenons donc finalement la relation

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d^2 \Omega} = \frac{E_3^2}{m_2^2 E_1^2} \frac{1}{64 \pi^2} |\mathcal{M}(s, t)|^2 \quad (\text{réf. du lab.})} \quad (1.66)$$

1.2.4 Somme sur les spins

Rappelons tout d'abord que les bispineurs $u^s(p)$ et $v^s(p)$ sont solution de l'équation de Dirac, et que les bispineurs sont solutions de l'équation conjuguée, i.e.

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u^s(p) &= \bar{u}^s(p) (\not{p} - m) = 0 \\ (\not{p} + m) v^s(p) &= \bar{v}^s(p) (\not{p} + m) = 0. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Les bispineurs sont normalisés suivant²⁰

$$\bar{u}^s(p) u^{s'}(p) = 2m \delta^{ss'}, \quad \bar{v}^s(p) v^{s'}(p) = -2m \delta^{ss'}, \quad (1.68)$$

et sont orthogonaux entre eux :

$$\bar{u}^s(p) v^{s'}(p) = \bar{v}^s(p) u^{s'}(p) = 0. \quad (1.69)$$

Dans de nombreuses situations, il est utile de pouvoir sommer sur les polarisations des fermions. Dans ce cas, les relations suivantes sont particulièrement utiles :

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad (1.70)$$

et

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (1.71)$$

1.2.5 Calcul des traces : un peu de γ -gymnastique

Le calcul des sections efficaces, une fois les différentes topologies de diagrammes énumérées et traduites algébriquement, se ramène, lorsque des contributions fermioniques entrent dans ces diagrammes, à un calcul de trace²¹ de produit de matrices de Dirac. Cette partie du calcul est rapidement très pénible, dès que les diagrammes se compliquent.

Nous donnons ici quelques identités utiles²². Rappelons tout d'abord que la matrice γ^5 , qui permet de définir l'hélicité d'un fermion, s'écrit

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (1.72)$$

C'est donc le produit d'un nombre *pair* de matrices γ . La matrice $\sigma^{\mu\nu}$ est définie²³ par

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1.73)$$

L'ensemble des 16 matrices $I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5$ forme une base des matrices de Dirac. Elles vérifient les propriétés suivantes :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.74)$$

$$\gamma_5^2 = I \quad (1.75)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (1.76)$$

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (1.77)$$

²⁰Normalisation de Peskin-Schroeder. Dans Itzykson-Zuber, la normalisation est choisie *sans facteur* $2m$.

²¹Dans la littérature russe, on utilise fréquemment la notation Sp pour la trace, abréviation de l'allemand "Spur". Les matrices du type \not{p} sont quant à elles en général notées \hat{p} .

²²Démonstrées et discutées en détail dans Peskin-Schroeder ou Itzykson-Zuber par exemple.

²³Cette notation est standard. Exception notable : dans *Théorie Quantique Relativiste* de Lifchitz et Pitayevski (série des Landau), on pose $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Nous donnons ici les principales formules permettant de mener à bien les calculs de traces :

$$\text{Tr } I = 4 \quad (1.78)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad (1.79)$$

$$\text{Tr } \sigma^{\mu\nu} = 0 \quad (1.80)$$

$$\text{Tr} (\text{nombre } \textit{impair} \text{ de matrices } \gamma) = 0 \quad (1.81)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu} \quad (1.82)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (1.83)$$

$$\text{Tr } \gamma^5 = 0 \quad (1.84)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 = 0 \quad (1.85)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5 = -4 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.86)$$

où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur complètement anti-symétrique de Levi-Civita, avec²⁴ $\epsilon^{0123} = +1$ et $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Le calcul des traces se fait en pratique, dès que les diagrammes se compliquent, à l'aide de calculateurs algébriques²⁵.

1.3 Théorème optique

Toute théorie quantique définie de façon cohérente doit être unitaire. Ceci signifie que partant d'une situation physique donnée (par exemple un état constitué de deux hadrons), la somme sur toutes les probabilités d'obtenir tous les états physiques final doit être égale à 1. Ceci s'écrit

$$S \cdot S^\dagger = S^\dagger \cdot S = 1. \quad (1.87)$$

Réécrivons cette dernière identité à l'aide de la matrice de diffusion T : de $S = 1 + iT$ on tire

$$(1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1$$

soit

$$T^\dagger T = -i(T - T^\dagger)$$

soit encore matriciellement

$$(T^\dagger)_{fn} T_{ni} = -i(T - T^\dagger)_{fi}. \quad (1.88)$$

Ceci s'écrit²⁶

$$\sum_n \mathcal{M}_{nf}^* \mathcal{M}_{ni} (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) = -i(\mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}_{if}^*). \quad (1.89)$$

Dans le cas particulier où $i = f$ (état initial et état final identiques), cette identité se réduit à

$$(T^\dagger)_{in} T_{ni} = -i(T - T^\dagger)_{ii},$$

²⁴Cette convention dépend des auteurs. La convention choisie ici est celle de Peskin-Schroeder et Itzykson-Zuber.

²⁵On peut citer par exemple FeynCalc sous Mathematica.

²⁶De façon équivalente, partant de $S \cdot S^\dagger = 1$, on obtient $\sum_n \mathcal{M}_{fn} \mathcal{M}_{in}^* (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) = -i(\mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}_{if}^*)$.

soit encore

$$T_{ni}^* T_{ni} = -i (T - T^*)_{ii} = 2 \operatorname{Im} T_{ii}, \quad (1.90)$$

et donc

$$\sum_n |\mathcal{M}_{ni}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) = 2 \operatorname{Im} \mathcal{M}_{ii}. \quad (1.91)$$

La section efficace totale d'un processus $i \rightarrow X$ s'écrit

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, m_1, m_2)}} \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) |\mathcal{M}_{ni}|^2, \quad (1.92)$$

soit encore, compte tenu de (1.91),

$$\boxed{\sigma_{tot} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(s, m_1, m_2)}} \operatorname{Im} \mathcal{M}_{ii}(s, t = 0)}. \quad (1.93)$$

C'est le théorème optique, qui relie la section efficace totale du processus à la partie imaginaire de l'amplitude élastique vers l'avant. Dans le cas où les masses sont nulles ou négligeables, ce théorème se déduit à

$$\boxed{\sigma_{tot} = \frac{1}{s} \operatorname{Im} \mathcal{M}_{ii}(s, t = 0)}. \quad (1.94)$$

1.4 Décomposition de Fierz

En dimension 4, les matrices de Dirac sont au nombre de 16 :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_S & \Gamma_V^\mu & \Gamma_T^{\mu\nu} & \Gamma_A^\mu & \Gamma_P \\ I & \gamma^\mu & \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] & \gamma^5 \gamma^\mu & i \gamma^5 \end{array} \quad (1.95)$$

On pose²⁷

$$\Gamma_\alpha \equiv (\Gamma^\alpha)^{-1}. \quad (1.96)$$

On peut alors vérifier que

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^{-1} &= \gamma_\mu \equiv \Gamma_{V\mu}, & (\sigma^{\mu\nu})^{-1} &= \sigma_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{T\mu\nu}, \\ (\gamma^5 \gamma^\mu)^{-1} &= \gamma_\mu \gamma^5 \equiv \Gamma_{A\mu}, & (i\gamma^5)^{-1} &= -i\gamma^5 \equiv \Gamma_P^{-1}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

On sait que le conjugué hermitique des matrices Γ^α s'obtient par entrelacement avec la matrice γ^0 :

$$\gamma^0 (\Gamma^\alpha)^\dagger \gamma^0 = \Gamma^\alpha$$

d'où l'on déduit que toutes les quantités du type $\bar{\Psi} \Gamma^\alpha \Psi$ sont hermitiennes.

Preuve:

²⁷Pour les matrices γ^μ , ceci est compatible avec le fait que $(\gamma^\mu)^{-1} = \gamma_\mu$ (au sens du calcul covariant avec le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$).

$$[\bar{\Psi}\Gamma^\alpha\Psi]^\dagger = \Psi^\dagger\Gamma^{\alpha\dagger}(\Psi^\dagger\Gamma^0)^\dagger = \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\Gamma^{\alpha\dagger}\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\Gamma^\alpha\Psi = \bar{\Psi}\Gamma^\alpha\Psi.$$

Partant de (1.97), on en déduit immédiatement que

$$\text{Tr}\Gamma^\alpha\Gamma_\beta = 4\delta_\beta^\alpha. \quad (1.98)$$

Toute matrice 4×4 peut se décomposer dans la base des matrices Γ^α , et l'identité précédente permet d'exprimer facilement les coefficients de cette décomposition :

$$X = x_\alpha\Gamma^\alpha = \frac{1}{4}\Gamma^\alpha\text{Tr}(X\Gamma_\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma_\alpha\text{Tr}(X\Gamma^\alpha). \quad (1.99)$$

L'élément de matrice $X_{\bar{b}a}$ vérifie donc

$$X_{\bar{b}a} = \delta_{\bar{b}b}\delta_{a\bar{a}}X_{ba} = \frac{1}{4}\Gamma_{\alpha\bar{b}a}X_{ba}\Gamma_{ab}^\alpha \quad (1.100)$$

et donc, après identification du coefficient de X_{ba} ,

$$\boxed{\delta_{\bar{b}b}\delta_{a\bar{a}} = \frac{1}{4}\Gamma_{\alpha\bar{b}a}\Gamma_{ab}^\alpha}, \quad (1.101)$$

qui est la décomposition de Fierz de l'identité pour les bispineurs. Cette identité est illustrée dans la Fig.1.4.

1.5 Kaléidoscope : un peu de couleur

Dans cette partie, nous allons développer un langage graphique très pratique pour calculer les facteurs de couleur.

Une représentation graphique des générateurs de l'algèbre de Lie dans la représentation fondamentale t_{ij}^a est donnée par

$$\begin{array}{c} a \\ \text{wavy line} \\ \leftarrow i \quad \leftarrow j \end{array} \equiv t_{ij}^a. \quad (1.102)$$

Les lignes fondamentales portent une flèche pour distinguer les représentations N et \bar{N} qui ne sont pas équivalentes pour $N \geq 3$.

La représentation graphique du générateur $(t^a)_{ij}^*$ est donnée par

$$\begin{array}{c} a \\ \text{wavy line} \\ \rightarrow i \quad \rightarrow j \end{array} \equiv (t^a)_{ij}^*. \quad (1.103)$$

Comme t^a est hermitienne,

$$(t^a)_{ij}^\dagger = \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ j \longrightarrow i \end{array} = t_{ij}^a = \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ i \longleftarrow j \end{array} \quad (1.104)$$

On peut bien sûr, en tournant le dessin de π , écrire

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ j \longrightarrow i \end{array} = \begin{array}{c} i \longleftarrow j \\ \text{---} \\ a \end{array} \quad (1.105)$$

donc l'hermiticité (1.104) a pour conséquence que

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ i \longleftarrow j \end{array} = \begin{array}{c} i \longleftarrow j \\ \text{---} \\ a \end{array} \quad (1.106)$$

Ces règles étant établies, un produit successif de générateurs s'écrit *en remontant les flèches*, comme pour les matrices γ de Dirac.

Les générateurs sont normalisés de façon conventionnelle par la relation²⁸

$$\boxed{\text{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}} \quad (1.107)$$

Cette relation, similaire à (1.98), permet de démontrer l'identité de Fierz

$$\boxed{t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)} \quad (1.108)$$

Preuve:

L'idée de la preuve est identique à celle utilisée pour le cas des spineurs :

I et t^a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) forment une base des matrices hermitiennes $N \times N$. Pour une matrice hermitienne A arbitraire, on peut donc écrire

$$A = c^0 I + c^a t^a \quad (1.109)$$

En utilisant (1.107), on en déduit l'expression des coefficients de la décomposition (1.109), sous la forme

$$c^0 = \frac{\text{Tr} A}{N} \quad \text{et} \quad c^a = 2 \text{Tr}[t^a A] \quad (1.110)$$

On peut donc écrire (1.109) sous la forme, en considérant le coefficient ij ,

$$\frac{\text{Tr} A}{N} \delta_{ij} + 2 t_{kl}^a A_{lk} t_{ij}^a = A_{ij}$$

²⁸Ce choix est bien sûr compatible avec la relation (1.10).

soit encore, pour tout $A_{k\ell}$,

$$A_{k\ell} \left[\frac{1}{N} \delta_{k\ell} \delta_{ij} + 2 t_{ij}^a t_{k\ell}^a - \delta_{i\ell} \delta_{jk} \right] = 0$$

ce qui achève la preuve par identification du coefficient de $A_{k\ell}$.

Cette identité de Fierz peut se visualiser graphiquement :

$$\begin{array}{c} i \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ j \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k \end{array} \begin{array}{c} \ell \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k \end{array} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} i \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ j \end{array} \begin{array}{c} \ell \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} i \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ j \end{array} \begin{array}{c} \ell \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k \end{array} \right) \quad (1.111)$$

Calculons à présent quelques facteurs de couleur typiques, que nous rencontrerons fréquemment.

De (1.108) on tire facilement²⁹

$$(t^a t^a)_{ij} = t_{ik}^a t_{kj}^a = \sum_k \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} \delta_{kk} - \frac{1}{N} \delta_{ik} \delta_{kj} \right) = \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ij} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ij},$$

dont on peut donner une preuve graphique :

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \text{---} \end{array} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \text{---} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[N \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \text{---} \end{array} \right] = \frac{N^2 - 1}{2N} \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \text{---} \end{array}$$

Ainsi

$$(t^a t^a)_{ij} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ij} \equiv C_F \delta_{ij} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{c} a \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ a \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ i \end{array} = C_F \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ i \end{array} \quad (1.112)$$

Montrons à présent que

$$(t^a t^b t^a)_{ij} = -\frac{1}{2N} t_{ij}^b \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{c} b \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ a \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ a \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ i \end{array} = -\frac{1}{2N} \begin{array}{c} b \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ i \end{array} \quad (1.113)$$

Preuve:

En utilisant l'identité de Fierz on obtient

$$(t^a t^b t^a)_{ij} = t_{ij'}^a t_{j'k'}^b t_{k'j}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} \delta_{j'k'} - \frac{1}{N} \delta_{ij'} \delta_{k'j} \right) t_{j'k'}^b = -\frac{1}{2N} t_{ij}^b$$

²⁹Ce résultat est mathématiquement prévisible : $t^a t^a$ est un Casimir de $SU(N)$, donc d'après le lemme de Schur c'est un multiple de l'identité. Pour trouver ce facteur multiplicatif C_F , il suffit de calculer la trace de $t^a t^a$, qui vaut $C_F N$ ($\text{Tr } I = N$). Or $\text{Tr}(t^a t^a) = \frac{1}{2} \delta^{aa} = \frac{N^2 - 1}{2}$ (nombre de générateurs = $N^2 - 1$), d'où $C_F = \frac{N^2 - 1}{2}$.

puisque $t_{j'j'}^b = 0$ (les générateurs sont de trace nulle).

Graphiquement :

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \text{Diagram 2} = \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 3} - \frac{1}{N} \text{Diagram 4} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 5} - \frac{1}{N} \text{Diagram 6} \right] = -\frac{1}{2N} \text{Diagram 7} \\
 &\text{où l'on a utilisé le fait que } \text{Diagram 8} = \text{Tr } t^b = 0.
 \end{aligned}$$

The diagrammatic derivation shows the following steps:

- Diagram 1:** A gluon line with a loop (gluon-gluon-gluon).
- Diagram 2:** A ghost loop (ghost-ghost-gluon).
- Diagram 3:** A ghost loop with a ghost line entering and exiting.
- Diagram 4:** A ghost tadpole (ghost line with a loop).
- Diagram 5:** A ghost loop with a ghost line entering and exiting.
- Diagram 6:** A ghost tadpole (ghost line with a loop).
- Diagram 7:** A ghost tadpole (ghost line with a loop).
- Diagram 8:** A ghost tadpole (ghost line with a loop).

Des règles graphiques peuvent également être établies afin de calculer les facteurs de couleur des diagrammes non abéliens. Nous nous contenterons de montrer algébriquement l'identité suivante :

$$f^{acd} f^{bcd} = N \delta^{ab} \equiv C_A \delta^{ab} \quad \text{i.e.} \quad \text{Diagram 9} = -C_A \text{Diagram 10} \quad (1.114)$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}([t^a, t^c][t^b, t^c]) &= \text{Tr}(i f^{acd} t^d i f^{bce} t^e) \\
 &= -f^{acd} f^{bce} \text{Tr}(t^d t^e) = -\frac{1}{2} f^{acd} f^{bcd}, \quad (1.115)
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 f^{acd} f^{bcd} &= -2 \text{Tr}([t^a, t^c][t^b, t^c]) \\
 &= -2 \text{Tr}(t^a t^c t^b t^c + t^c t^a t^c t^b - t^c t^a t^b t^c - t^a t^c t^c t^b) \\
 &= -2 \text{Tr}(2 t^a t^c t^b t^c - (t^a t^b + t^b t^a) t^c t^c) \quad (1.116)
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'invariance de la trace par permutation cyclique, ce qui finalement donne, en utilisant les relations (1.112) et (1.113), ainsi que la normalisation (1.107),

$$f^{acd} f^{bcd} = -2 \text{Tr} \left(-\frac{1}{N} t^a t^b - \frac{N^2 - 1}{2N} 2 t^a t^b \right) = 2N \text{Tr}(t^a t^b) = N \delta^{ab}. \quad (1.117)$$

Chapitre 2

Quelques processus typiques en QED

2.1 Introduction

Le nucléon est un état lié (de quarks), soumis à l'interaction forte. Cette état est très fortement lié. Considérons en effet le rapport des énergies de liaison/énergie (ou masse) des constituants typiques de la physique microscopique :

$$\text{Atome} : \frac{qq \text{ eV}}{0.5 \text{ MeV}} \sim 10^{-5} \text{ (dans le cas d'un électron lié au noyau)}$$

$$\text{Noyau} : \frac{8 \text{ MeV}}{940 \text{ MeV}} \sim 10^{-2}$$

$$\text{Nucléon} : \frac{1 \text{ GeV}}{\lesssim 1 \text{ GeV}} \geq 1$$

Bien entendu, plus ce rapport est élevé, plus l'énergie potentielle des constituants l'est.

Conséquences :

- il semble peu raisonnable de considérer que ces constituants sont quasi-libres.
- on ne peut considérer le système comme étant constitué d'un nombre fixe de constituants : création de paires \rightarrow théorie des champs quantiques relativiste nécessaire

Cependant il se trouve que cette conclusion n'est pas aussi définitive qu'il n'y paraît. Ainsi la section efficace totale $e^+e^- \rightarrow \text{hadron}$ peut se prédire avec une précision excellente en considérant le processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, ce qui revient en pratique à négliger l'interaction forte responsable de l'hadronisation !

Partant en effet de la section efficace totale $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ dans la limite ultrarelativiste, calculée à l'ordre des arbres en QED

$$\sigma_{totale}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3 E_{c.m.}^2}, \quad (2.1)$$

qui vaut

$$\sigma_{totale}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{86,8 \text{ nbarn}}{(E_{c.m.} \text{ en GeV})^2}$$

on déduit aisément la section efficace totale $\sigma_{totale}^{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}}$:

$$\sigma_{totale}^{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}} = N_c \left(\sum_i Q_i^2 \right) \sigma_{totale}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} \quad (2.2)$$

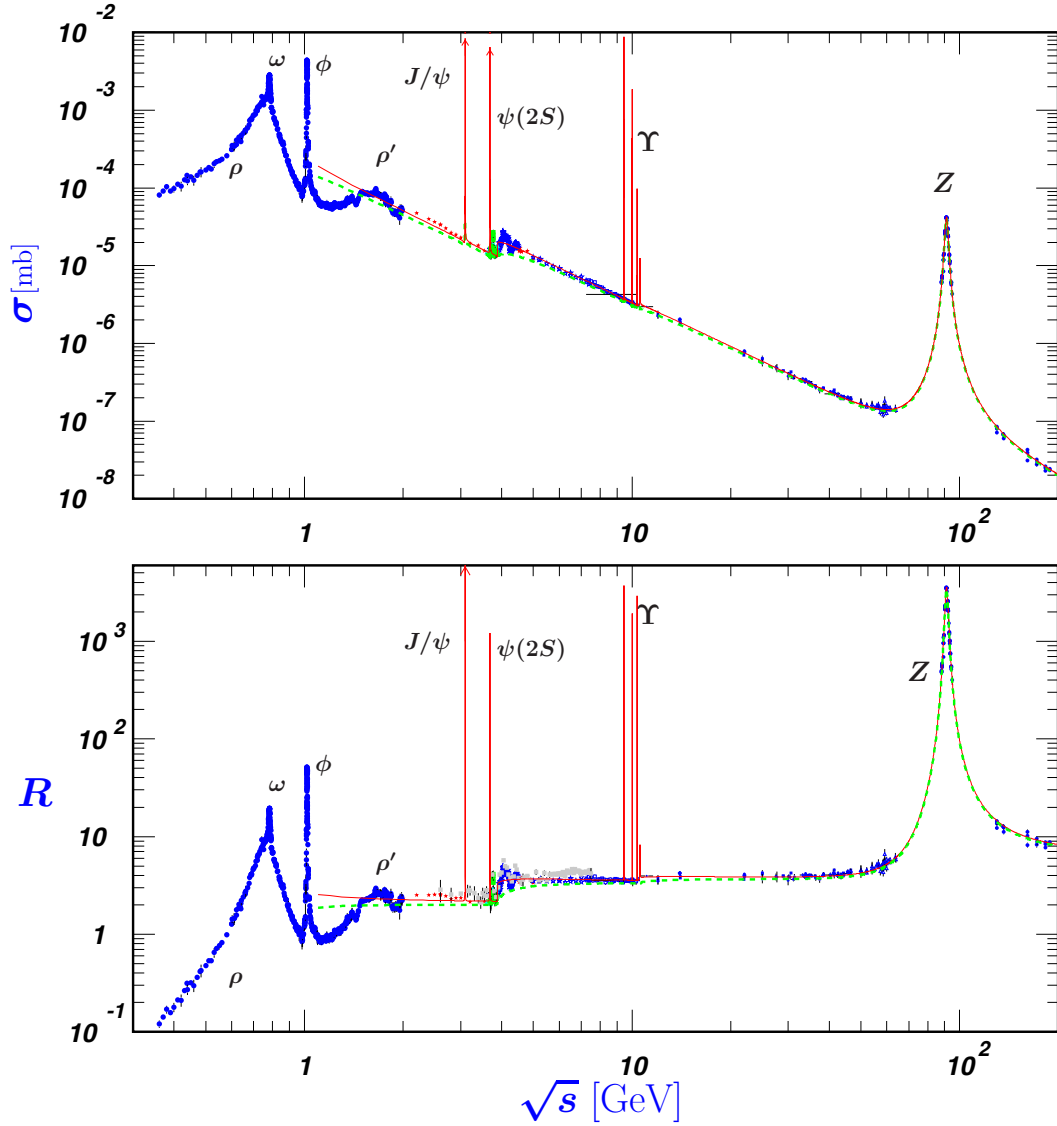


FIG. 2.1 – Section efficace totale $e^+e^- \rightarrow \text{hadron}$ et rapport R . En vert pointillé la prédiction du modèle de partons. En rouge la prédiction basée sur QCD à 3 boucles, accompagnée d'une paramétrisation à la Breit-Wigner des états liés J/Ψ , $\Psi(2S)$, $\Upsilon(nS)$ ($n = 1, 2, 3, 4$).

soit encore

$$R \equiv \frac{\sigma_{\text{totale}}^{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}}}{\sigma_{\text{totale}}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} \quad (2.3)$$

qui est égal à

$$R^{(0)} = 3 \sum_i Q_i^2 \quad (2.4)$$

en tenant compte du fait que les quarks possèdent 3 couleurs pour le groupe de jauge $SU(N_c = 3)$. Notons que ce rapport R est défini par rapport à la section efficace du processus $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ et non $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, ceci afin d'éviter le processus croisé avec échange d'un photon dans la voie t , qui n'aurait pas d'équivalent dans le processus $e^+e^- \rightarrow \text{hadron}$. En dehors des seuils, cette prédiction est excellente, comme on peut le constater sur la figure 2.1.

– Au dessous du seuil de production du quark c :

$$R_{u,d,s} = 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 \right] = 2.$$

– Entre le seuil de production du quark c et le seuil de production du quark b :

$$R_{u,d,s,c} = 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}.$$

– Au dessus du seuil de production du quark b :

$$R_{u,d,s,c,b} = 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 \right] = \frac{11}{3}.$$

Les corrections dues à QCD sont connues à 3 boucles et donnent

$$R = R^{(0)} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + C_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 + C_3 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 + \dots \right] \quad \text{où } C_2 = 1.411 \text{ et } C_3 = -12.8. \quad (2.5)$$

2.2 Annihilation $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$: l'archétype des réactions dans les collisionneurs e^+e^-

Considérons, à l'ordre des arbres en QED, le processus d'annihilation $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$, illustré dans la figure 2.2.

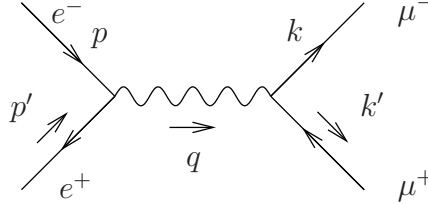


FIG. 2.2 – Annihilation $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$.

L'amplitude de ce processus s'écrit, dans la jauge de Feynman,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^\sigma(k)(-ie\gamma^\nu)v^{\sigma'}(k') \\ &= \frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')), \end{aligned} \quad (2.6)$$

où s, s' (σ, σ') sont les spins de l'électron et du positron (resp. μ^- et μ^+).

Pour évaluer la section efficace du processus, il nous faut évaluer $|\mathcal{M}|^2$. Une identité particulièrement utile permet de simplifier ce calcul. Considérons en effet le nombre complexe¹ $\bar{v}\gamma^\mu u$:

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v \quad (2.7)$$

¹Il est donc invariant par transposition.

(rappelons que $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$). Ainsi

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p) \gamma^\nu v(p')) (\bar{u}(k) \gamma_\mu v(k') \bar{v}(k') \gamma_\nu u(k)) . \quad (2.8)$$

Supposons maintenant que nous nous intéressions à la section efficace non polarisée. Nous devons donc moyennner sur les spins de l'électron et du positron incidents et sommer sur les spins du muon et de l'antimuon émis, i.e. calculer

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_\sigma \sum_{\sigma'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow \sigma, \sigma')|^2 .$$

Examinons le premier facteur de (2.8) (qui concerne donc la partie “électron” de l'amplitude), et écrivons explicitement les indices spinoriels (nous abandonnerons cette écriture dans la suite). En utilisant le fait que les coefficients des quadri-spineurs sont des nombres, nous pouvons librement les déplacer dans la relation algébrique, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} \bar{v}_a^{s'}(p') \gamma_{ab}^\mu u_b^s(p) \bar{u}_c^s(p) \gamma_{cd}^\nu v_d^{s'}(p') &= \sum_{s'} v_d^{s'}(p') \bar{v}_a^{s'}(p') \gamma_{ab}^\mu \sum_s u_b^s(p) \bar{u}_c^s(p) \gamma_{cd}^\nu \\ &= (\not{p}' - m)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m)_{bc} \gamma_{cd}^\nu = \text{Tr}[(\not{p}' - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu] . \end{aligned}$$

d'après les identités (1.70, 1.71). On a donc finalement

$$\frac{1}{4} \sum_{s, s', \sigma, \sigma'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow \sigma, \sigma')|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{k} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu] . \quad (2.9)$$

Le calcul se ramène donc à celui de traces de produit de matrices de Dirac. En appliquant les relations (1.81), (1.82) et (1.83), on en déduit immédiatement

$$\ell_{(e)}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu] = 2 [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (p \cdot p' + m_e^2)] \quad (2.10)$$

et

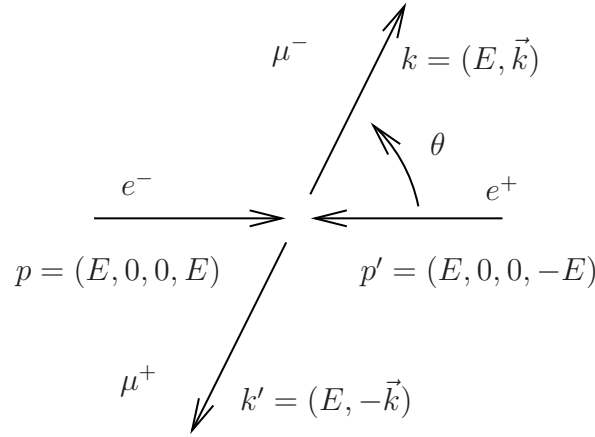
$$\ell_{(\mu)}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{k} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu] = 2 [k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} (k \cdot k' + m_\mu^2)] . \quad (2.11)$$

Nous utiliserons régulièrement les tenseurs ci-dessus, appelés *tenseurs leptoniques*.

Le carré de l'amplitude moyenné (2.9) se déduit immédiatement de (2.10) et (2.11), après contraction sur les indices μ, ν . On obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \ell_{(e)}^{\mu\nu} \ell_{(\mu)}^{\mu\nu} \\ &= \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + m_\mu^2 (p \cdot p') + m_e^2 (k \cdot k') + 2m_e^2 m_\mu^2] . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour aller plus loin, il nous faut choisir un système de référence. Plaçons nous dans le référentiel du centre de masse, et négligeons à partir de maintenant la masse de l'électron devant toutes les autres quantités en jeu. Notant E l'énergie de chaque particule, et θ l'angle de diffusion (angle entre l'impulsion de e^- et l'impulsion de μ^- (voir la figure 2.3)), nous pouvons

FIG. 2.3 – Annihilation $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ dans le système du centre de masse.

écrire

$$q^2 = 4E^2 (= s = W^{*2}), \quad p \cdot p' = 2E^2, \quad (2.13)$$

$$p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E|\vec{k}| \cos \theta, \quad p \cdot k' = p' \cdot k = E^2 + E|\vec{k}| \cos \theta. \quad (2.14)$$

L'expression (2.12) s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4} \left[E^2(E - |\vec{k}| \cos \theta)^2 + E^2(E + |\vec{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right] \\ &= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

puisque $|\vec{k}|^2 = E^2 - m_\mu^2$.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la section efficace du processus : en utilisant (1.66), nous avons donc

$$\frac{d\sigma}{d^2\Omega^*} = \frac{|\vec{k}|}{E} \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{1}{4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\alpha^2}{4s} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (2.16)$$

La section efficace totale s'en déduit par intégration sur $d^2\Omega^* = d\phi d\cos\theta$, en utilisant

$$\int_{-1}^1 (1 + \cos^2 \theta) d\cos\theta = \frac{8}{3},$$

d'où

$$\boxed{\sigma_{tot}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right]} \quad (\text{ref. du c.m.}) \quad (2.17)$$

qui se réduit, dans la limite des très grandes énergies ($E \gg m_\mu$), à

$$\sigma_{tot}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} \sim \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \quad (2.18)$$

La section efficace (2.2) pour le processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ discutée dans l'introduction s'en déduit immédiatement, en tenant compte du fait que chaque quark possède $N_c = 3$ couleurs, sur lesquelles il faut sommer, et en remplaçant la charge $-|e|$ de l'électron par $Q|e|$ ($Q = 2/3$ pour u, c, t et $Q = -1/3$ pour d, s, b).

Ceci ne justifie pas le fait que ce calcul permette de décrire avec une bonne précision la section efficace $e^+e^- \rightarrow$ hadrons. Cette justification repose sur la *liberté asymptotique*, i.e. sur le fait qu'à grand s , les corrections au processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, correspondant à la prise en compte de la radiation des gluons, des corrections virtuelles, etc... sont très supprimées, en raison du fait que l'échelle du couplage fort α_S qui intervient typiquement dans l'évaluation de ces corrections perturbatives est de l'ordre de s : pour $s \gg \Lambda_{QCD}$, le couplage est petit, et les corrections sont donc faibles. Une justification basée sur la théorie des champs est possible : elle consiste à montrer que ce rapport R est dominé par le comportement à courte distance d'un corrélateur courant-courant. On développe ensuite systématiquement ce produit d'opérateurs sur une base d'opérateurs locaux (approche due à Wilson). Nous discuterons plus loin cette approche dans le cadre de la diffusion profondément inélastique, que nous allons à présent aborder, en considérant à nouveau un processus électromagnétique typique.

2.3 La diffusion $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$: le processus de référence pour le modèle des partons

Considérons à présent le processus $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$, illustré dans la figure 2.4. L'amplitude

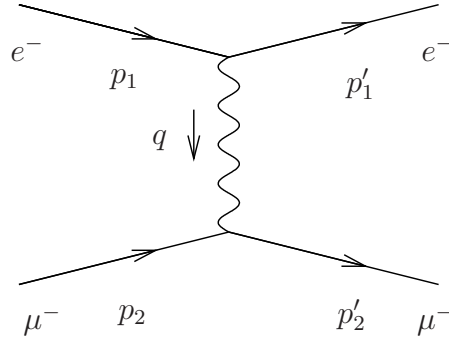


FIG. 2.4 – Diffusion $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ à l'ordre des arbres.

de ce processus s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s, s', \sigma, \sigma'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow \sigma, \sigma')|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu)\gamma_\nu] \\ &= \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{2} \text{Tr}[(-\not{p}'_1 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(-\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

On constate sur cette relation que l'amplitude peut s'obtenir à partir de l'amplitude (2.9) du processus $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ par le changement de variables

$$p \rightarrow p_1, \quad p' \rightarrow -p'_1, \quad k \rightarrow p'_2, \quad k' \rightarrow -p_2. \quad (2.20)$$

Elle s'écrit

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \ell_{(e)}^{\mu\nu} \ell_{(\mu)}{}_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

avec²

$$\ell_{(e)}{}_{\mu\nu} \equiv +\frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}'_1 + m_e) \gamma_\mu (\not{p}'_1 + m_e) \gamma_\nu] = 2 [p'_{1\mu} p'_{1\nu} + p'_{1\mu} p_{1\nu} + (m_e^2 - p_1 \cdot p'_1) g_{\mu\nu}], \quad (2.22)$$

et

$$\ell_{(\mu)}{}_{\mu\nu} \equiv +\frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}'_2 + m_\mu) \gamma_\nu] = 2 [p'_{2\mu} p'_{2\nu} + p'_{2\mu} p_{2\nu} + (m_\mu^2 - p_2 \cdot p'_2) g_{\mu\nu}]. \quad (2.23)$$

Le calcul de (2.19) s'en déduit immédiatement :

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2) - m_\mu^2(p_1 \cdot p'_1) - m_e^2(p_2 \cdot p'_2) + 2m_e^2 m_\mu^2]. \quad (2.24)$$

Nous allons cette fois, en vue d'une application qui va suivre dans le cadre du modèle des partons, évaluer cette section efficace dans le référentiel du laboratoire de μ^- . Nous posons donc

$$p_1 = (E, \vec{p}_1), \quad p'_1 = (E', \vec{p}'_1), \quad p_2 = (M, 0). \quad (2.25)$$

L'angle de diffusion est noté θ . A nouveau, nous allons négliger la masse de l'électron, et nous pouvons donc écrire que $|\vec{p}_1| = E$ et $|\vec{p}'_1| = E'$. Le photon échangé, de virtualité

$$q^2 = (E - E')^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 = -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.26)$$

est donc de genre espace. On pose conventionnellement $Q^2 = -q^2$.

Les différents produits scalaires intervenant dans (2.24) s'écrivent alors

$$p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2 = m_\mu E, \quad p'_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p'_2 = m_\mu E', \quad p_1 \cdot p'_1 = E E' (1 - \cos \theta), \quad (2.27)$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} m_\mu^2 \left[E^2 + E'^2 - 2E E' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.28)$$

Cette expression peut se simplifier en utilisant le fait que le processus est élastique : comme $p'_2 = p_2 + q$,

$$p_2'^2 = p_2^2 + 2p_2 \cdot q + q^2$$

conduit à

$$Q^2 = -q^2 = 2p_2 \cdot q = 2p_2 \cdot (p_1 - p'_1) = 2m_\mu (E - E'). \quad (2.29)$$

On en déduit alors que

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{16e^4}{q^4} m_\mu^2 E E' \left[\frac{(E - E')^2}{2E E'} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{16e^4}{q^4} m_\mu^2 E E' \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.30)$$

²Ces tenseurs leptoniques s'obtiennent, au signe près, à partir des tenseurs leptonique du processus $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ par le changement de variables (2.20).

d'où finalement, en utilisant (1.66),

$$\boxed{\frac{d\sigma^{e^-\mu^-\rightarrow e^-\mu^-}}{d^2\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{E'}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]} \quad (\text{ref. du lab.}). \quad (2.31)$$

2.4 Variables de Mandelstam, croisement

Si l'on introduit les variables de Mandelstam des deux processus $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ et $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ que nous venons d'étudier

$$s = (p + p')^2 \quad t = (p - k)^2 \quad u = (p - k')^2 \quad (2.32)$$

$$\tilde{s} = (p_1 + p_2)^2 \quad \tilde{t} = (p_1 - p'_1)^2 \quad \tilde{u} = (p_1 - p'_2)^2, \quad (2.33)$$

on constate que la transformation (2.20) correspond au croisement

$$(s, t, u) \rightarrow (\tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{s}). \quad (2.34)$$

Si l'on adopte dès le départ comme notation pour les impulsions

$$e^-(p) \mu^-(-k') \rightarrow e^-(-p') \mu^-(k),$$

et que nous comparons ce processus au processus $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ (voir Figure 2.5) ce croisement devient explicite. Nous allons montrer qu'il correspond au croisement $(s, t, u) \rightarrow (t, u, s)$. Plus généralement, les trois processus correspondant aux voies s , t et u sont les

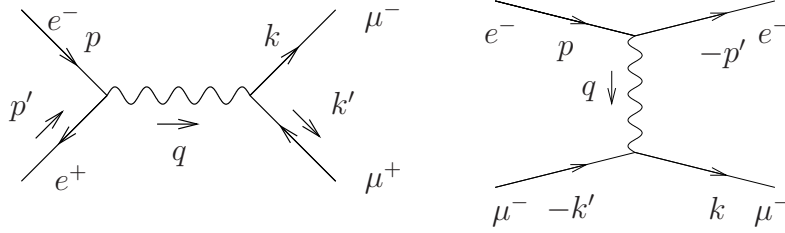


FIG. 2.5 – Diffusions $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ et $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ à l'ordre des arbres, avec la même cinématique.

suivants :

voie s :	$e^-(p) + e^+(p') \rightarrow \mu^-(k) + \mu^+(k')$		
voie t :	$e^-(p) + \mu^+(-k) \rightarrow e^-(-p') + \mu^+(k')$		
voie u :	$e^-(p) + \mu^-(-k') \rightarrow \mu^-(k) + e^-(-p')$		

(2.35)

Le croisement permettant de passer de $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ à $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ s'effectue comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} e^- \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ e^+ \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \mu^- \\ \searrow \\ \mu^+ \end{array} & \xrightarrow{s \leftrightarrow t} \\
\mathcal{M}^{e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+}(s, t, u) & & \\
\begin{array}{c} e^- \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ \mu^+ \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ e^- \\ \searrow \\ \mu^+ \end{array} & \xrightarrow{s \leftrightarrow u} \\
\mathcal{M}^{e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+}(t, s, u) & & \\
\begin{array}{c} e^- \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ \mu^- \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ e^- \\ \searrow \\ \mu^- \end{array} & \\
\mathcal{M}^{e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+}(t, u, s) & & \\
= \mathcal{M}^{e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+}(s, t, u) & & = \mathcal{M}^{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}(s, t, u)
\end{array} \tag{2.36}$$

ou de façon équivalente

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} e^- \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ e^+ \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \mu^- \\ \searrow \\ \mu^+ \end{array} & \xrightarrow{s \leftrightarrow u} \\
\mathcal{M}^{e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+}(s, t, u) & & \\
\begin{array}{c} e^- \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ \mu^- \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \mu^- \\ \searrow \\ e^- \end{array} & \xrightarrow{u \leftrightarrow t} \\
\mathcal{M}^{e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+}(u, t, s) & & \\
\begin{array}{c} e^- \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ \mu^- \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ e^- \\ \searrow \\ \mu^- \end{array} & \\
\mathcal{M}^{e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+}(t, u, s) & & \\
= \mathcal{M}^{e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+}(s, t, u) & & = \mathcal{M}^{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}(s, t, u)
\end{array} \tag{2.37}$$

qui correspond bien à $(s, t, u) \rightarrow (t, u, s)$.

Ceci peut bien sûr se vérifier algébriquement sur les amplitudes calculées précédemment. En explicitant les variables de Mandelstam du processus en voie s

$$\begin{aligned}
s &= (p + p')^2 = 2m_e^2 + 2p \cdot p' = (k + k')^2 = 2m_\mu^2 + 2k \cdot k', \\
t &= (p - k)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p \cdot k = (p' - k')^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p' \cdot k', \\
u &= (p - k')^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p \cdot k' = (p' - k)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p' \cdot k,
\end{aligned}$$

on déduit donc que

$$\begin{aligned}
2p \cdot p' &= s - 2m_e^2, & 2p \cdot k &= m_e^2 + m_\mu^2 - t, & 2p \cdot k' &= m_e^2 + m_\mu^2 - u \\
2k \cdot k' &= s - 2m_\mu^2, & 2p' \cdot k' &= m_e^2 + m_\mu^2 - t, & 2p' \cdot k &= m_e^2 + m_\mu^2 - u.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

L'amplitude (2.12) du processus $e^-(p) e^+(p') \rightarrow \mu^-(k) \mu^+(k')$ peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{2e^4}{s^2} [(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + (u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + 2m_\mu^2(s - 2m_e^2) + 2m_e^2(s - 2m_\mu^2) \\
&\quad + 8m_e^2 m_\mu^2]
\end{aligned}$$

soit encore, en utilisant $s + t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2)$,

$$\boxed{\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)(2s - m_e^2 - m_\mu^2)]} \quad (e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+) \tag{2.39}$$

Le même jeu pour le processus $e^-(p) \mu^-(k') \rightarrow e^-(p') \mu^-(k)$ conduit à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{2e^4}{t^2} [(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + (s - m_e^2 - m_\mu^2)^2 - 2m_\mu^2(2m_e^2 - t) - 2m_e^2(2m_\mu^2 - t) \\
&\quad + 8m_e^2 m_\mu^2]
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} [s^2 + u^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)(2t - m_e^2 - m_\mu^2)] \quad (e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-)} \quad (2.40)$$

On constate algébriquement sur ces deux expressions que l'on obtient bien (2.40) à partir de (2.39) en faisant $(s, t, u) \rightarrow (t, u, s)$.

Pour terminer, donnons l'expression de la section efficace du processus $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ exprimée dans les variables de Mandelstam (qui donne directement l'expression de la section efficace dans le centre de masse grâce à la relation (1.53) : $dt = 2p_i^* p_f^* d \cos \theta^*$), expression qui nous servira de point de départ pour construire le modèle des partons. D'après (1.55),

$$\frac{d\sigma^{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}}{dt} = \frac{1}{64 \pi s p_i^{*2}} \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 \quad (2.41)$$

et donc, en combinant (2.40) avec l'expression (1.34) de p_i^* ,

$$\boxed{\frac{d\sigma^{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}}{dt} = \frac{2\pi \alpha^2}{t^2 \lambda(s, m_e^2, m_\mu^2)} \times \left\{ s^2 + [s + t - 2(m_e^2 + m_\mu^2)]^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)(2t - m_e^2 - m_\mu^2) \right\} .} \quad (2.42)$$

Chapitre 3

Facteur de forme du nucléon : un test de la structure interne des hadrons

3.1 Cinématique de la diffusion lepton-nucléon

Considérons la diffusion d'un lepton, par exemple un électron, sur un nucléon. Les variables cinématiques sont fixées suivant les relations suivantes, en accord avec la figure 3.1

$$q = k - k', \quad \nu = p \cdot q/M, \quad W^2 = p_n^2 = (p + q)^2. \quad (3.1)$$

W est donc l'énergie totale dans le centre de masse du système γ^* (ou Z^0)-nucléon. W vérifie l'inégalité

$$W^2 = q^2 + 2M\nu + M^2 \geq M^2, \quad (3.2)$$

l'égalité $W^2 = M^2$ correspondant à la diffusion élastique.

Dans le référentiel du laboratoire, les impulsions du nucléon cible et des leptons entrant et sortant s'écrivent

$$p_\mu = (M, 0, 0, 0), \quad k_\mu = (E, \vec{k}), \quad k'_\mu = (E', \vec{k}'). \quad (3.3)$$

La quantité $\nu = E - E'$ mesure donc la perte d'énergie du lepton, ou encore l'énergie dans référentiel du laboratoire du boson échangé. En négligeant la masse du lepton, ce que nous ferons systématiquement, nous avons

$$q^2 = (k - k')^2 \simeq -2k \cdot k' = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 0, \quad (3.4)$$

où θ est l'angle de diffusion du lepton. On vérifie sur cette relation que le photon (ou le Z^0) échangé est de genre espace ou lumière et l'on pose traditionnellement, comme pour le processus $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ que nous venons d'étudier,

$$Q^2 = -q^2. \quad (3.5)$$

Plusieurs régimes vont nous intéresser.

Le premier régime, appelé *diffusion de Mott*, est le régime où Q^2 est quasi nul, et pour lequel l'effet de recul du proton est négligeable, i.e. $E \simeq E'$. Le proton peut alors être considéré comme ponctuel, caractérisé uniquement par sa charge.

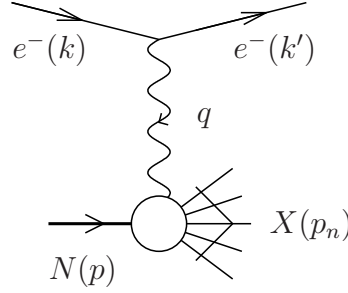


FIG. 3.1 – Diffusion électron-nucléon.

Le régime donnant accès à des informations globales sur le nucléon est le régime pour lequel Q^2 est petit ou du même ordre que sa masse. Dans ce cas, la diffusion sera essentiellement élastique, éventuellement quasi-élastique (production du nucléon excité). On aura ainsi accès à la distribution de charges et de moment magnétique dans le nucléon (distributions typiquement exponentielles en fonction de la distance au centre), et en particulier à son rayon.

Dans le régime où $Q^2 \gg M^2$, dit de *diffusion profonde*, on sondera au contraire l'intérieur du nucléon avec une résolution très fine, typiquement en $1/Q$, c'est-à-dire bien plus faible que le rayon du nucléon, et l'on aura accès à ses constituants, les quarks. La QCD perturbative est alors susceptible de fournir des informations sur cette section efficace.

Pour Q^2 grand, la section efficace est expérimentalement dominée par les événements inélastiques, correspondant à $W^2 \gg M^2$. Le nucléon est en effet soumis à un choc très violent et la probabilité pour qu'il se disloque est très grande. On parle alors de *diffusion profondément inélastique*.

Enfin, dans le régime où $W^2 \gg Q^2 \gg M^2$, qui correspond à la *limite de Regge perturbative*, ou encore de petits x_{Bj} , le processus est complètement dominé par les émissions radiatives de quarks de la mer et de gluon.

Notons que le régime $W^2 \gg M^2$, dit de Regge, n'est susceptible d'être décrit avec des méthodes utilisant la QCD perturbative que si $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$.

3.2 Courant hadronique et facteurs de forme

3.2.1 Paramétrisation du courant électromagnétique d'un hadron étendu

Supposons que Q^2 est suffisamment faible devant M_{Z^0} et développons le lagrangien de QED à l'ordre le plus bas dans l'interaction

$$\mathcal{L}_{int} = (-|e|\bar{\Psi}_e \gamma_\mu \Psi_e + |e|J_\mu^{em}) A^\mu \quad (3.6)$$

où J_μ^{em} est la partie hadronique du courant électromagnétique. L'amplitude du processus s'écrit alors¹

$$\mathcal{M}_n = e^2 \bar{u}(k', \lambda') \gamma^\mu u(k, \lambda) \frac{1}{q^2} \langle n | J_\mu^{em}(0) | p, \sigma \rangle \quad (3.7)$$

où $\lambda, \lambda', \sigma$ désignent respectivement les polarisations de l'électron incident, sortant, et du nucléon incident.

¹Le courant est fonction de la position x , mais par invariance par translation, on peut choisir $x = 0$.

Nous allons tout d'abord examiner le cas élastique, qui correspond à la situation où $X(p_n) = \text{nucléon}$. Nous notons par \mathcal{Q} la charge électrique du nucléon, en unité de $|e|$. L'élément de matrice du courant électromagnétique se décompose alors sous la forme

$$\langle N(p') | J_\mu^{em}(0) | N(p) \rangle = \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu F_1(q^2) + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) \right] u(p). \quad (3.8)$$

C'est la façon la plus générale² de paramétrer une fonction de corrélation à 3 points $ee\gamma$ qui respecte la conservation du courant électromagnétique et l'invariance par parité, ce qui interdit la présence d'une matrice γ_5 . Les coefficients $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$ sont réels dans le canal de diffusion $q^2 \leq 0$ qui nous intéresse ici.³ Cette expression respecte bien la conservation du courant. En fait, chacun des deux termes correspond à un courant séparément conservé : le premier terme conduit à

$$q^\mu \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = (p' - p)^\mu \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = \bar{u}(p') (\not{p}' - \not{p}) u(p) = 0$$

d'après l'équation de Dirac (les états initial et final sont réels et satisfont donc cette équation, avec une masse identique), et le second est conservé par *antisymétrie* de $\sigma^{\mu\nu}$, qui s'annule après contraction avec le tenseur *symétrique* $q_{\mu\nu}$.

La conservation du courant a pour conséquence celle de la charge électrique totale. En considérant la diffusion de la particule sur un champ électrostatique (pour lequel $q_0 = 0$), variant lentement spatialement, et donc concentré autour de $\vec{q} = 0$, on normalise cette diffusion à celle sur un potentiel coulombien. Cette limite permet de montrer que pour l'électron, $F_1(0) = 1$ (à tous les ordres en perturbation), qui correspond à la conservation de la charge électrique (en unité de $e = -|e|$)⁴. Dans le cas de la physique hadronique, en normalisant par rapport à la charge $|e|$, cette contrainte se généralise immédiatement à $F_1(0) = \mathcal{Q}$ où \mathcal{Q} est la charge électrique en unité de $|e|$.

Le premier terme de la décomposition (3.8) est appelé courant de Dirac, tandis que le second est le terme de Pauli (appelé aussi terme de courant magnétique anormal, appellation que nous allons justifier plus loin).

Ce premier terme, de type courant $\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$, décrit à la fois une interaction électrique et magnétique. En effet, de l'identité de Gordon⁵

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p') \gamma^\mu u^{(\beta)}(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha)}(p') [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu] u^{(\beta)}(p), \quad (3.9)$$

on peut tirer une réécriture du courant $\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$ comme la somme de deux termes, qui sont séparément conservés :

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu F_1(q^2) u^{(\beta)}(p) = \frac{F_1(q^2)}{2m} \bar{u}(p') (p' + p)^\mu u(p) + i \frac{F_1(q^2)}{2m} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu u(p). \quad (3.10)$$

Le premier est un terme de spin 0, qui est le seul terme possible lorsque l'on cherche à paramétrer le facteur de forme d'un pion par exemple⁶.

²Un terme en $\bar{u}(p')(p'_\mu + p_\mu)u(p)$ est aussi a priori possible, puisqu'il satisfait à la conservation du courant. Mais il est redondant puisqu'il peut se réécrire sous la forme (3.8) en utilisant l'identité de Gordon (3.9).

³Ceci peut se justifier par la contrainte d'unitarité (1.89) qui devient triviale dans le canal de diffusion.

⁴Il est traditionnel en QED de travailler en unité de $e = -|e|$.

⁵On explicite momentanément les indices de polarisation afin de faire ressortir la structure bi-spinorielle de cette équation. Des équations analogues existent entre solutions de l'équation de Dirac d'énergies négatives, ainsi qu'entre solutions d'énergies positives et négatives.

⁶Ceci est en accord avec le terme de vertex $\pi\pi\gamma$ de QED scalaire, qui a la forme $-ie(p_\mu + p'_\mu)$, avec p entrant et p' sortant.

Le second terme est un terme de magnétisme. A nouveau, un calcul dans la limite classique où la diffusion s'effectue cette fois sur un champ magnétostatique lentement variable permet de montrer que ce terme est responsable de l'apparition d'un moment magnétique $\vec{\mu}$, que l'on écrit conventionnellement sous la forme

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{q}{2m} \right) \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (3.11)$$

où $\vec{s} = \vec{\sigma}/2$ est le spin de la particule de spin $1/2$, et q sa charge. g est appelé facteur de Landé. Rassemblant les deux contributions provenant de $F_1(0)$ et $F_2(0)$, g s'écrit

$$g = 2 [F_1(0) + \kappa F_2(0)] = 2\mathcal{Q} + 2\kappa, \quad (3.12)$$

en normalisant arbitrairement $F_2(0) = 1$. Dans le cadre de la théorie de Dirac d'une *particule ponctuelle de spin 1/2*, et de charge \mathcal{Q} , $g = 2\mathcal{Q}$. La déviation par rapport à cette valeur est donc due à la présence éventuelle d'une contribution provenant du second terme de (3.8), d'où le nom de courant magnétique anormal. Fixons les notations. En définissant le magnéton de Bohr et le magnéton nucléaire par

$$\mu_B = -\frac{|e|\hbar}{2m_e} \quad (3.13)$$

$$\mu_N = \frac{|e|\hbar}{2m_p}, \quad (3.14)$$

on a

$$\mu_{lepton} = \frac{g_{lepton}}{2} \mu_B = \mu_B (1 + \kappa_{lepton}) \quad (3.15)$$

$$\mu_{Baryon} = \frac{g_{Baryon}}{2} \mu_N = \mu_N (\mathcal{Q} + \kappa_{Baryon}). \quad (3.16)$$

3.2.2 Moments magnétiques des leptons et des nucléons

Nous rassemblons ci-dessous les valeurs expérimentales mesurées pour les moments magnétiques de e^- , μ^- , p et n .

particule	$\mu_{exp.}$	précision	κ	$\mu_{punct.}$	μ_{quarks}
e	1.0011596...	$4 \cdot 10^{-12}$.0011596...	1	
μ	1.0011659...	$6 \cdot 10^{-10}$.0011659...	1	
p	2.7928473...	10^{-8}	1.7928473...	1	2.82..
n	-1.9130427...	$2.5 \cdot 10^{-7}$	-1.9130427...	0	-1.88..

En ce qui concerne les leptons, la comparaison avec le modèle de Dirac montre que les mesures sont compatibles avec le fait que les leptons sont des particules ponctuelles. Les corrections théoriques, connues avec la même précision que la précision expérimentale, montrent que les leptons sont ponctuels, dans l'état actuel des connaissances. La première correction, provenant de la correction virtuelle QED à une boucle (diagramme triangle) au vertex $ee\gamma$, donne

$\kappa_e = \frac{\alpha}{2\pi}$. Les contributions provenant des interactions faibles doivent également être prises en compte, ainsi, aux ordres suivants, que les contributions hadroniques. Il faut noter que les mesures de ces moments magnétiques avec une grande précision sont très utiles, car la précision actuelle des mesures et des calculs pourrait donner accès (à condition de bien contrôler les contributions hadroniques) à des signaux de physique au-delà du modèle standard.

Pour les baryons, les résultats expérimentaux montrent clairement qu'ils ne peuvent être considérés comme étant ponctuels. Dans la colonne de droite, nous donnons les valeurs attendues pour les moments magnétiques, en utilisant un modèle de quarks constituants⁷, pour lequel le moment magnétique total est la somme des moments magnétiques des quarks⁸ qui constituent le baryon⁹. En tenant compte des fonctions d'onde du proton et du neutron, on obtient

$$\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d), \quad \text{et} \quad \mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \quad (3.18)$$

qui respecte bien la symétrie d'isospin. Le même modèle s'étend avec succès aux autres baryons.

3.2.3 Facteurs de forme électrique et magnétique

Il est d'usage d'introduire les facteurs de forme électrique et magnétique de Sachs

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2(q^2) \quad (3.19)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2). \quad (3.20)$$

Pour éclairer cette définition, il est instructif de se placer dans le référentiel de Breit, référentiel du centre de masse du système constitué de la cible entrante et sortante, dans lequel $\vec{p} + \vec{p}' = \vec{0}$, et donc $p_0 = p'_0$. Dans ce référentiel, la cible fait marche arrière avec l'impulsion qu'elle avait avant l'interaction. L'énergie q_0 transférée par le photon, ainsi que le transfert d'impulsion sont nuls. Ce référentiel est donc particulièrement adapté pour donner une image physique de la diffusion, pour lequel le champ extérieur va se comporter comme un champ statique uniforme. On montre alors que les facteurs de forme G_E et G_M peuvent être interprétés comme les transformées de Fourier des distributions de charge électrique et de moment magnétique du proton¹⁰. Bien entendu, cette image reste valable dans le référentiel du laboratoire, dans la limite non relativiste, à condition que l'impulsion transférée soit négligeable devant la masse du nucléon, i.e. $|\vec{q}| \ll m_p$.

La contrainte $F_1(0) = \mathcal{Q}$ conduit alors à

$$\boxed{G_E(0) = \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad G_M(0) = \frac{\mu}{\mu_N} = \mathcal{Q} + \kappa.} \quad (3.21)$$

⁷Dans ce modèle, la masse des quarks constituants u et d est fixée à $m = 333 \text{ MeV}$.

⁸Pour chaque quark i , on a donc $\mu_i = \mathcal{Q}_i \frac{|e|}{2m_i}$ avec $\mathcal{Q}_i = 2/3$ ou $-1/3$.

⁹On ne s'intéresse pas ici aux états excités et on néglige donc les effets dus au moment orbital

¹⁰On notera que le terme de distribution de charge électrique $G_E(Q^2)$ (3.19) reçoit une contribution provenant du terme de Pauli, puisque ce dernier terme possède un couplage non nul à un champ électrostatique $A_\mu = (\phi, \vec{0})$, sauf pour \vec{q} exactement nul.

3.2.4 Résumé

Rassemblons les différentes formes équivalentes du courant hadronique (3.8). Pour alléger les expressions, *on n'écrit pas les spineurs*¹¹, et l'on pose

$$\langle N(p') | J_{em}^\mu(0) | N(p) \rangle = \bar{u}(p') \Gamma_{em}^\mu u(p). \quad (3.22)$$

Les expressions qui suivent se justifient en utilisant l'identité de Gordon (3.9). Posant $P = p + p'$ avec

$$P^2 = 4M^2 + 2p \cdot q = 4M^2 - q^2, \quad (3.23)$$

on a

$$\Gamma_{em}^\mu = 2M(G_E - G_M) \frac{P^\mu}{P^2} + G_M \gamma^\mu = -\frac{\kappa F_2}{2M} P^\mu + G_M \gamma^\mu \quad (3.24)$$

$$= 2M \left(G_E - \frac{q^2}{4M^2} G_M \right) \frac{P^\mu}{P^2} + i \frac{G_M}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu = \frac{F_1}{2M} P^\mu + i \frac{G_M}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \quad (3.25)$$

$$= (4M^2 G_E - q^2 G_M) \frac{\gamma^\mu}{P^2} - i \frac{2M}{P^2} (G_E - G_M) \sigma^{\mu\nu} q_\nu = \gamma^\mu F_1 + i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \frac{\kappa}{2M} F_2. \quad (3.26)$$

Dans la limite d'une particule ponctuelle, pour laquelle

$$F_1(q^2) = \mathcal{Q}, F_2(q^2) = 1, \kappa = 0, \text{ et } G_E(q^2) = G_M(q^2) = \mathcal{Q}, \quad (3.27)$$

le courant s'écrit

$$\boxed{\Gamma_{em}^\mu = \mathcal{Q} \gamma^\mu = \frac{\mathcal{Q}}{2M} P^\mu + \frac{i \mathcal{Q}}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \quad \text{part. de spin } 1/2 \text{ ponctuelle.}} \quad (3.28)$$

Par comparaison, le courant d'un méson de spin 0, par exemple un pion, s'écrit

$$\boxed{\langle m(p') | J_{em}^\mu(0) | m(p) \rangle = P^\mu F \quad \text{part. de spin } 0} \quad (3.29)$$

où F est une fonction scalaire vérifiant $F(0) = \mathcal{Q}$. Ce courant se réduit à

$$\boxed{\langle m(p') | J_{em}^\mu(0) | m(p) \rangle = \mathcal{Q} P^\mu \quad \text{part. de spin } 0 \text{ ponctuelle}} \quad (3.30)$$

dans le cas d'une particule ponctuelle.

3.3 Section efficace et tenseur hadronique

3.3.1 Des tenseurs hadroniques et leptoniques aux sections efficaces

Afin de préparer l'étude de la diffusion inélastique que nous allons aborder dans le chapitre 4, donnons dès à présent l'expression de la section efficace différentielle non polarisée, pour un état final hadronique arbitraire (donc élastique ou inélastique). Elle s'écrit, d'après (1.16) et (1.21),

$$d\sigma_n = \frac{1}{2M2E} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \frac{1}{4} \sum_{\sigma\lambda\lambda'} |\mathcal{M}_n|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p + k - k' - p_n) \quad (3.31)$$

¹¹Les relations écrites sont donc équivalentes à condition de considérer l'élément de matrice $\langle N(p') | J_\mu^{em}(0) | N(p) \rangle$

où nous avons séparé l'espace des phases de l'état final en le produit de l'espace des phases de l'électron lepton sortant et des hadrons formés, et où $p_n = \sum_{i=1}^n p_i$ est l'impulsion totale du système hadronique produit. L'amplitude \mathcal{M}_n est donnée par (3.7). Nous pouvons donc écrire $d\sigma_n$ sous la forme

$$d\sigma_n = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{2E} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \bar{u}(k', \lambda') \gamma^\mu u(k, \lambda) \bar{u}(k, \lambda) \gamma^\mu u(k', \lambda') \\ \times \frac{1}{2M} \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \langle p, \sigma | J_\mu^{em} | n \rangle \langle n | J_\nu^{em} | p, \sigma \rangle (2\pi)^4 \delta^4(p + k - k' - p_n). \quad (3.32)$$

Si l'on intègre sur tous les états hadroniques formés (la section efficace est alors dite *inclusive*), nous pouvons écrire

$$d\sigma = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{2E} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} 2\pi W^{\mu\nu} \ell_{\mu\nu} \quad (3.33)$$

où $\ell_{\mu\nu}$ est le tenseur leptonique (2.22)

$$\ell_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (k'_\mu \gamma_\nu k'_\nu \gamma_\mu) = 2 \left(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (3.34)$$

(puisque $q^2 = 2m_e^2 - 2k \cdot k'$) et $W^{\mu\nu}$ est le tenseur hadronique¹²

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \sum_n \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \langle p, \sigma | J_\mu^{em} | n \rangle \langle n | J_\nu^{em} | p, \sigma \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p_n - p - q). \quad (3.35)$$

On a donc, après simplification,

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \ell_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

où l'on a utilisé l'écriture de l'élément d'espace des phases de l'électron sortant sous la forme

$$\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} = \frac{d^2\Omega dE' E'}{16\pi^3}. \quad (3.37)$$

3.3.2 Le cas particulier de la diffusion élastique

Dans le cas élastique, la cinématique est fixée par la mesure de l'énergie E' du lepton sortant ou de façon équivalente par la mesure de l'angle de diffusion θ . Ceci est la conséquence de la relation d'élasticité $p' = p + q$ qui conduit à

$$p'^2 = M^2 = (p + q)^2 = 2p \cdot q + q^2 + M^2$$

soit

$$2p \cdot q + q^2 = 0 \quad \text{ou encore} \quad M(E - E') = 2E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.38)$$

¹²On absorbe conventionnellement un coefficient $1/(2M)$ dans la définition du tenseur hadronique, correspondant à la densité de la cible, et un facteur 2π en vue d'un passage à la limite plus naturel au cas de la diffusion élastique.

On tire immédiatement de cette relation que

$$\boxed{E' = E \frac{1}{1 + 2 \frac{E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad (3.39)$$

et donc dans la limite d'une diffusion élastique vers l'avant, le photon échangé devient réel et mou (i.e. son énergie et son impulsion tendent vers 0) : on parle de limite eikonale.

La section efficace élastique s'obtient simplement en remplaçant dans la relation (3.36) le tenseur $W^{\mu\nu}$ par le tenseur élastique

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{el} &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \langle p, \sigma | J_{\mu}^{em} | p' \rangle \langle p' | J_{\nu}^{em} | p, \sigma \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p' - p - q) \\ &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \frac{1}{2p'_0} \langle p, \sigma | J_{\mu}^{em} | p' \rangle \langle p' | J_{\nu}^{em} | p, \sigma \rangle \delta(p'_0 - M - q_0). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dans ce dernier cas, l'énergie E' est complètement fixée par la cinématique, i.e. par la mesure de l'angle de diffusion θ et par la connaissance de l'énergie E . Le lien entre diffusion inélastique s'établit en remarquant que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'_0} \delta(p'_0 - M - q_0) &= \frac{1}{p'_0} \delta[p'_0(E') - M - E + E'] = \frac{E'}{M E} \delta[E' - E'(E, \theta)] \\ &= \frac{1}{M} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Preuve:

Nous procédons de façon analogue à la preuve de (1.28) :

$$\delta[p'_0(E') - M - E + E'] = \left| \frac{d(p'_0(E') + E')}{dE'} \right|^{-1} \delta[E' - E'(E, \theta)]. \quad (3.42)$$

Or puisque $\vec{p} = 0$,

$$p'_0 = \sqrt{\vec{p}'^2 + M^2} = \sqrt{\vec{q}^2 + M^2} = \sqrt{(\vec{k}' - \vec{k})^2 + M^2} = (E^2 + E'^2 - 2 E E' \cos \theta + M^2)^{1/2}$$

d'où

$$\frac{d[p'_0(E') + E']}{dE'} = \frac{E' - E \cos \theta + p'_0}{p'_0} = \frac{E + M - E \cos \theta}{p'_0} = \frac{M E}{p'_0 E'}$$

où l'on a utilisé la relation $2p \cdot q + q^2 = 0$ qui donne $E'(E + M - E \cos \theta) = M E$.

L'expression (3.41) s'obtient de la même façon en partant de (3.38), qui s'écrit

$$\nu + \frac{q^2}{2M} = E - E' - \frac{2 E E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right)}{\partial E'} = -1 - \frac{2 E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{E}{E'} \quad (3.43)$$

et donc

$$\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) = \left| \frac{\partial\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)}{\partial E'} \right|^{-1} \delta[E' - E'(E, \theta)] = \frac{E'}{E} \delta[E' - E'(E, \theta)]. \quad (3.44)$$

Posons

$$H_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \langle p, \sigma | J_{\mu}^{em} | p' \rangle \langle p' | J_{\nu}^{em} | p, \sigma \rangle. \quad (3.45)$$

Nous pouvons donc écrire

$$W_{\mu\nu}^{el} = \frac{1}{4M^2} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) H_{el}^{\mu\nu}, \quad (3.46)$$

et la section efficace élastique s'écrit, en utilisant (3.36),

$$\boxed{\frac{d^2\sigma^{el}}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \ell_{\mu\nu} H_{el}^{\mu\nu} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)}. \quad (3.47)$$

soit encore, après intégration sur E' , et en utilisant (3.41)

$$\boxed{\frac{d^2\sigma^{el}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'^2}{E^2} \ell_{\mu\nu} H_{el}^{\mu\nu}}. \quad (3.48)$$

où $E' = E + \frac{q^2}{2M}$. Bien entendu, nous aurions pu obtenir ce résultat à l'aide de (1.66), qui donne directement l'expression de la section efficace d'un processus à deux corps dans le référentiel du laboratoire.

Nous sommes maintenant en mesure de mener complètement le calcul de la section efficace élastique. La première étape consiste à évaluer le tenseur hadronique $H_{el}^{\mu\nu}$.

3.3.3 Calcul du tenseur hadronique élastique

Le calcul, dont la partie algébriquement pénible est l'évaluation des traces de produits de matrices de Dirac, peut être assez simple ou au contraire très fastidieux selon la façon dont on écrit le courant hadronique. L'écriture du courant comme la somme d'une contribution scalaire et d'une contribution avec une matrice γ , suivant (3.24), se révèle la plus économique, puisque le calcul va faire intervenir au maximum le produit de 4 matrices γ . En revanche, si l'on part de l'écriture du courant comme la somme (3.26) d'un terme de Dirac et d'un terme de Pauli, on est conduit à calculer la trace de termes¹³ contenant jusqu'à 6 matrices γ !

¹³Si l'on mène le calcul sous cette forme, on prendra garde à présence d'un facteur i dans l'écriture (3.26). On doit donc, lorsque l'on utilise la relation (2.7) pour évaluer le module carré de l'amplitude (avec l'habitude moyenne et somme sur les spins), écrire celui-ci comme $\frac{1}{2}(\not{p}' + M)(\gamma^{\mu} F_1 + i\sigma^{\mu\nu} q_{\nu} \frac{\kappa}{2M} F_2)(\not{p} + M)(\gamma^{\mu} F_1 - i\sigma^{\mu\nu} q_{\nu} \frac{\kappa}{2M} F_2)$.

Partant de (3.24), nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
H_{el}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{p}' + M) \left(-\frac{\kappa F_2}{2M} P_\mu + G_M \gamma^\mu \right) (\not{p} + M) \left(-\frac{\kappa F_2}{2M} P_\nu + G_M \gamma^\nu \right) \right] \\
&= \frac{\kappa^2 F_2^2}{4M^2} \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p}' + M) P_\mu (\not{p} + M) P_\nu] + G_M^2 \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p}' + M) \gamma_\mu (\not{p} + M) \gamma_\nu] \\
&\quad - \frac{\kappa F_2 G_M}{2M} \left(\frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p}' + M) P_\mu (\not{p} + M) \gamma_\nu] + \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p}' + M) \gamma_\mu (\not{p} + M) P_\nu] \right) \quad (3.49)
\end{aligned}$$

et donc

$$H_{el}^{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 F_2^2}{4M^2} 2(p \cdot p' + M^2) P_\mu P_\nu + G_M^2 h_{\mu\nu} - 2\kappa F_2 G_M P_\mu P_\nu, \quad (3.50)$$

où

$$h_{\mu\nu} = 2 \left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (3.51)$$

est l'analogie du tenseur leptonique (3.34). En utilisant (3.19) et (3.20) ainsi que la relation $2p \cdot p' = 2M^2 - q^2$, cette expression se simplifie en

$$H_{el}^{\mu\nu} = -\kappa F_2 (G_E + G_M) (4M^2 - q^2) P_\mu P_\nu + G_M^2 h_{\mu\nu}. \quad (3.52)$$

Dans le cas ponctuel, pour lequel $\kappa = 0$ et $G_M = \mathcal{Q}$, on retrouve comme prévu que

$$H_{el}^{\mu\nu} = \mathcal{Q}^2 h^{\mu\nu}, \quad (3.53)$$

analogie du tenseur leptonique du muon.

3.3.4 Structure du tenseur hadronique et projecteurs

Revenons un instant sur la forme générale du tenseur hadronique (3.35). Ce tenseur symétrique¹⁴ doit vérifier, par conservation du courant hadronique, la contrainte

$$q_\mu W^{\mu\nu} = 0. \quad (3.54)$$

On en déduit la forme la plus générale de ce tenseur, que l'on écrit traditionnellement sous la forme

$$\boxed{W^{\mu\nu}(p, q) = -W_1 \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right)} \quad (3.55)$$

où W_1 et W_2 sont appelées *fonctions de structures du nucléon*.

Cette décomposition, qui semble purement algébrique à première vue, contient beaucoup d'information physique. En effet, la section efficace différentielle (3.36) s'évalue après contraction du tenseur leptonique avec le tenseur hadronique.

Introduisons les projecteurs transverse

$$\boxed{T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}}, \quad (3.56)$$

¹⁴Ceci découle de l'hermiticité du courant.

qui vérifie $T^{\mu\nu}q_\nu = 0$, et longitudinal

$$\boxed{L^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}} \quad (3.57)$$

qui vérifie $L^{\mu\nu}q_\nu = q^\mu$. Ils obéissent, comme tous les projecteurs, aux relations

$$T^{\mu\nu}T_{\nu\rho} = T^\mu_\rho \quad \text{et} \quad L^{\mu\nu}L_{\nu\rho} = L^\mu_\rho$$

ainsi qu'à la relation de complétude

$$g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + L^{\mu\nu}. \quad (3.58)$$

En utilisant cette décomposition ainsi que la conservation des courants leptoniques et hadroniques, la contraction des tenseurs leptonique et hadronique peut s'écrire sous la forme

$$\ell_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = \ell_{\mu\nu}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}W_{\mu'\nu'} = \ell_{\mu\nu}T^{\mu\mu'}T^{\nu\nu'}W_{\mu'\nu'}. \quad (3.59)$$

Le tenseur $T^{\mu\nu}$ est le projecteur sur l'hyperplan orthogonal à q^μ , qui peut lui-même se décomposer comme la somme d'un projecteur sur le sous-espace orthogonal à p^μ et q^μ et d'un projecteur sur le sous-espace orthogonal à ce sous-espace et à q^μ :

$$\boxed{T^{\mu\nu} = P_L^{\mu\nu} + g_\perp^{\mu\nu}}. \quad (3.60)$$

3.3.5 Polarisation du photon

Explicitons les projecteurs que nous venons de construire, et donnons leur un sens physique. Pour cela, construisons explicitement $P_L^{\mu\nu}$. Le sous espace engendré par les quadrivecteurs q^μ et p^μ est de dimension 2, et son sous-espace orthogonal à q^μ est une droite. La seule combinaison linéaire de q^μ et p^μ qui soit orthogonale à q^μ est de la forme

$$\epsilon_L^\mu = c \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right), \quad (3.61)$$

avec c réel arbitraire. Sa norme vérifie donc

$$\epsilon_L^2 = c^2 \left(M^2 - \frac{(p \cdot q)^2}{q^2} \right) \geq 0. \quad (3.62)$$

C'est donc un vecteur de genre temps, que nous allons normaliser à $+1$. Nous posons donc

$$\boxed{\epsilon_L^\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - \frac{(p \cdot q)^2}{q^2}}} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right), \quad \epsilon_L^2 = +1}. \quad (3.63)$$

Ce vecteur est simplement le vecteur de *polarisation longitudinale*¹⁵ du photon virtuel échangé. Le projecteur correspondant s'écrit donc

$$P_L^{\mu\nu} = \epsilon_L^\mu \epsilon_L^\nu. \quad (3.64)$$

¹⁵La notation ϵ^0 sera utilisée de façon équivalente.

Le projecteur orthogonal à ce projecteur et au projecteur $L^{\mu\nu}$ est donc un projecteur sur un sous-espace de dimension 2 constitué de vecteurs de genre espace orthogonaux à p^μ et q^μ . Nous le noterons $g_\perp^{\mu\nu}$. Il peut formellement s'écrire sous la forme

$$g_\perp^{\mu\nu} = - \sum_{i=1,2} \epsilon^{(i)\mu} \epsilon^{(i)\nu*} \quad (3.65)$$

où $\epsilon^{(i)}$ sont deux vecteurs euclidiens orthogonaux entre eux et à p et q . Ces deux vecteurs définissent les *polarisations transverses* du photon virtuel échangé. On notera la présence de la conjugaison complexe, qui joue un rôle dans le cas de polarisations circulaires (lorsque l'on utilise la représentation dite d'hélicité).

En résumé, nous avons obtenu la décomposition suivante de l'identité :

$$\boxed{\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= g_\perp^{\mu\nu} + P_L^{\mu\nu} + L^{\mu\nu} = - \sum_{i=1,2} \epsilon^{(i)\mu} \epsilon^{(i)\nu*} + \epsilon_L^\mu \epsilon_L^\nu + q^\mu q^\nu, \\ \epsilon^{(i)*} \cdot \epsilon^j &= -\delta^{ij}, \quad \epsilon^i \cdot \epsilon_L = 0, \quad \epsilon_L^2 = +1, \end{aligned}} \quad (3.66)$$

écriture qui fait apparaître 3 projecteurs orthogonaux entre eux¹⁶.

Il est utile de fixer explicitement les polarisations que nous venons d'introduire. Nous nous plaçons dans le référentiel où le proton est au repos, et choisissons arbitrairement pour axe z

$$e_z = e_3 = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}. \quad (3.67)$$

On a alors

$$q = (\nu, 0_\perp, \sqrt{Q^2 + \nu^2}). \quad (3.68)$$

Considérons tout d'abord les polarisations transverses. Dans le cas de polarisations *linéaires*, on peut choisir

$$\boxed{\epsilon^{(1)} = e_1 = (0, 1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \epsilon^{(2)} = e_2 = (0, 0, 1, 0) \quad \text{pol. linéaires.}} \quad (3.69)$$

Dans le cas de polarisations *circulaires*, encore appelées hélicités, on peut choisir¹⁷

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon^{(+)} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} [e_1 + i e_2] = -\frac{i}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) \equiv \epsilon^{(R)} \\ \epsilon^{(-)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} [e_1 - i e_2] = \frac{i}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0) \equiv \epsilon^{(L)} \\ &\quad \text{pol. circulaires.} \end{aligned}} \quad (3.70)$$

¹⁶Mathématiquement, le fait qu'un photon virtuel de genre espace possède une polarisation longitudinale de norme positive et deux polarisations de normes négatives vient de l'étude des représentations du groupe de Poincaré : on montre que les représentations de type tachyonique $q^2 < 0$ sont caractérisées par leur masse carrée négative, ce qui est le cas de notre photon virtuel de genre espace, et par les représentations du *petit groupe* du groupe de Poincaré (c'est le sous-groupe qui laisse q invariant) correspondant, ici $SO(1, 2)$, dont les représentations sont caractérisées par ces 3 polarisations. En revanche, dans le cas d'une particule libre massive comme le ρ par exemple, le petit-groupe est $SO(3)$ et les 3 polarisations sont de genre espace.

¹⁷Convention de Landau. Le choix de ces polarisations n'est pas absolu. Elles sont en effet définies à une phase près. Par exemple dans Peskin, $\epsilon_{Peskin}^{(R)} = i \epsilon^{(R)}$ et $\epsilon_{Peskin}^{(L)} = -i \epsilon^{(L)}$.

Les indices R et L correspondent au fait que ces vecteurs de polarisation, habillés de leur facteur d'évolution temporel $e^{-i\omega t}$, le pouce pointant vers la direction de propagation, tournent respectivement comme la main droite et gauche lorsque le temps croît. Le choix de paramétrisation qui est fait ici possède l'avantage suivant, utile en pratique dans les calculs :

$$\epsilon^{(\lambda)*} = \epsilon^{(-\lambda)}. \quad (3.71)$$

Ces vecteurs sont bien normalisés et orthogonaux entre eux, et en utilisant la propriété (3.71) on a

$$\begin{array}{l} \epsilon^{(+)} \epsilon^{(+)*} = \epsilon^{(+)} \epsilon^{(-)} = -1, \\ \epsilon^{(-)} \epsilon^{(-)*} = \epsilon^{(-)} \epsilon^{(+)} = -1. \end{array} \quad (3.72)$$

Enfin on vérifie que

$$\epsilon_{\mu}^{(+)} \epsilon_{\nu}^{(+)*} + \epsilon_{\mu}^{(-)} \epsilon_{\nu}^{(-)*} = \epsilon_{\mu}^{(+)} \epsilon_{\nu}^{(-)} + \epsilon_{\mu}^{(-)} \epsilon_{\nu}^{(+)} = e_{1\mu} e_{1\nu} + e_{2\mu} e_{2\nu} = -g_{\perp\mu\nu} \quad (3.73)$$

puisque e_1 et e_2 sont de norme -1 .

La polarisation longitudinale (3.63) peut s'écrire, dans ce même repère,

$$\epsilon_L^{\mu} = \frac{1}{Q} (\sqrt{\nu^2 + Q^2}, 0_{\perp}, \nu). \quad (3.74)$$

3.3.6 Tenseur hadronique et fonctions de structure élastiques

Nous venons de voir que la décomposition (3.55) du tenseur hadronique peut s'écrire, en terme des projecteurs T et P_L (non orthogonaux entre eux)

$$W^{\mu\nu}(p, q) = -W_1 T^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{(p \cdot q)^2}{M^2 q^2}\right) W_2 P_L^{\mu\nu}. \quad (3.75)$$

L'écriture (3.59) de la contraction du tenseur leptonique avec le tenseur hadronique montre que les numérateurs $g^{\mu\mu'}$ et $g^{\nu\nu'}$ des propagateurs des photons qui connectent ces deux tenseurs peuvent être remplacé par les tenseurs $T^{\mu\mu'}$ et $T^{\nu\nu'}$, qui sont les tenseurs de projection sur les 3 polarisations des photons échangés. Il est donc naturel, d'un point de vue physique, de réécrire le tenseur $W^{\mu\nu}$ sous la forme

$$W^{\mu\nu}(p, q) = -W_1 g_{\perp}^{\mu\nu} + \left[-W_1 + \left(1 - \frac{(p \cdot q)^2}{M^2 q^2}\right) W_2\right] P_L^{\mu\nu}. \quad (3.76)$$

Déterminons les coefficients W_1^{el} et W_2^{el} . Ces coefficients s'obtiennent immédiatement¹⁸ en projetant (3.52) sur la base P_L, g_{\perp} .

En utilisant le fait que $P = 2p + q$, on tire

$$P_L^{\mu\nu} P_{\mu} P_{\nu} = 4p_{\mu} p_{\nu} \epsilon_L^{\mu} \epsilon_L^{\nu} = 4M^2 - q^2. \quad (3.77)$$

Comme $P_{\mu} P_{\nu}$ n'a pas de composante transverse, on en déduit que

$$P^{\mu} P^{\nu} = (4M^2 - q^2) P_L^{\mu\nu}. \quad (3.78)$$

¹⁸On prendra garde au fait que $\text{Tr } P_L = 1$ et $\text{Tr } g_{\perp} = 2$.

D'autre part, le tenseur (3.51) peut s'écrire

$$h_{\mu\nu} = 2 \left[p_\mu(p_\nu + q_\nu) + (p_\mu + q_\mu)p_\nu + \frac{q^2}{2}g_{\mu\nu} \right]. \quad (3.79)$$

De même,

$$\frac{1}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 2M^2 + 2p \cdot q + 2q^2 = 2M^2 + q^2, \quad (3.80)$$

et

$$h_{\mu\nu}P_L^{\mu\nu} = 4(p \cdot \epsilon_L)^2 + 2\frac{q^2}{2} = 4M^2 - q^2 + q^2 = q^2, \quad (3.81)$$

soit

$$\frac{1}{2}h_{\mu\nu}g_\perp^{\mu\nu} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(T^{\mu\nu} - P_L^{\mu\nu}) = q^2 \quad (3.82)$$

et donc

$$h^{\mu\nu} = q^2 g_\perp^{\mu\nu} + 4M^2 P_L^{\mu\nu}. \quad (3.83)$$

Finalement, le tenseur hadronique (3.52) peut donc s'écrire, en utilisant (3.19) et (3.20),

$$\begin{aligned} H_{el}^{\mu\nu} &= 4M^2 G_E^2 P_L^{\mu\nu} + G_M^2 q^2 g_\perp^{\mu\nu}, \\ &= 4M^2 \left(G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2 \right) P_L^{\mu\nu} + q^2 G_M^2 T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

La première expression justifie a posteriori l'introduction des facteurs de forme électriques et magnétiques, qui n'interfèrent pas au niveau de la section efficace puisque les tenseurs P_L et g_\perp sont orthogonaux entre eux. La seconde nous permet, par comparaison avec (3.75), de déduire l'expression des facteurs de forme élastiques, qui s'écrivent, en combinant (3.46) et (3.84),

$$\begin{aligned} W_1^{el} &= -\frac{q^2}{4M^2} G_M^2 \delta(\nu + \frac{q^2}{2M}), \\ W_2^{el} &= \frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} \delta(\nu + \frac{q^2}{2M}), \end{aligned} \quad (3.85)$$

qui se réduisent dans la limite ponctuelle à

$$W_{1pt}^{el} = -\frac{q^2}{4M^2} \mathcal{Q}^2 \delta(\nu + \frac{q^2}{2M}), \quad (3.86)$$

$$W_{2pt}^{el} = \mathcal{Q}^2 \delta(\nu + \frac{q^2}{2M}). \quad (3.87)$$

Pour obtenir l'expression de la section efficace différentielle (3.36), il nous reste à décomposer le tenseur leptonique (3.34) en termes des tenseurs g_\perp et P_L (ou encore en termes de T et P_L). Nous procédons comme pour le tenseur h , et écrivons

$$\ell_{\mu\nu} = 2 \left[k_\mu(k_\nu - q_\nu) + (k_\mu - q_\mu)k_\nu + \frac{q^2}{2}g_{\mu\nu} \right], \quad (3.88)$$

d'où l'on tire que

$$\ell_{\mu\nu} P_L^{\mu\nu} = \ell_{\mu\nu} \frac{p^\mu p^\nu}{M^2 - \frac{(p \cdot q)^2}{q^2}} = \frac{4 E E' \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{(p \cdot q)^2}{M^2 q^2}}, \quad (3.89)$$

et

$$\frac{1}{2} \ell_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \ell_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = q^2 = -4 E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.90)$$

Remarque:

Ces expressions suffisent pour déterminer la section efficace. Cependant, il est intéressant physiquement d'expliciter la décomposition de ℓ dans la base g_\perp, P_L . De (3.89) et (3.90) on tire

$$\frac{1}{2} \ell_{\mu\nu} g_\perp^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \ell_{\mu\nu} (T_\perp^{\mu\nu} - P_L^{\mu\nu}) = -\frac{E^2 + E'^2 + 2 E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{(p \cdot q)^2}{M^2 q^2}}, \quad (3.91)$$

puisque

$$\frac{(p \cdot q)^2}{q^2} = -\frac{M^2 (E - E')^2}{4 E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

et donc

$$\ell^{\mu\nu} = \left[1 - \frac{(p \cdot q)^2}{M^2 q^2} \right]^{-1} \left[- \left(E^2 + E'^2 + 2 E E' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) g_\perp^{\mu\nu} + 4 E E' \cos^2 \frac{\theta}{2} P_L^{\mu\nu} \right]. \quad (3.92)$$

Examinons la limite $q^2 \rightarrow 0$. Dans cette limite, on vérifie aisément que

$$\ell^{\mu\nu} \underset{q^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{E^2 + E'^2}{\nu^2} q^2 g_\perp^{\mu\nu} + \frac{4 E E'}{\nu^2} \left[q^\mu q^\nu - \frac{q^2}{\nu M} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) + \frac{q^4}{\nu^2 M^2} p^\mu p^\nu \right] \quad (3.93)$$

et donc par conservation du courant, en laissant de côté les termes en q^μ ou q^ν , nous constatons que le terme dominant correspondant à l'émission d'un photon longitudinal est supprimé par un terme en $1/q^2$ par rapport au terme d'émission d'un photon transverse, ce qui bien sûr cohérent avec le fait que dans la limite $q^2 \rightarrow 0$, les photons émis par le lepton tendent à être sur couche, donc transverses.

3.3.7 Expressions des sections efficaces

L'évaluation de la section efficace inélastique est maintenant immédiate, en contractant le tenseur hadronique, écrit en terme des tenseurs T et P_L suivant (3.55), avec le tenseur leptonique. En utilisant (3.89) et (3.90) nous obtenons

$$\ell_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 4 E E' \left[2 W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.94)$$

et donc

$$\boxed{\frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[2 W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]}. \quad (3.95)$$

En utilisant (3.85) et la relation cinématique (3.38), on en déduit la section efficace différentielle de la diffusion élastique, qui s'écrit¹⁹

$$\boxed{\frac{d^2\sigma^{el}}{d^2\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\}}. \quad (3.96)$$

Cette relation est due à M. Rosenbluth (1950). Dans le cas ponctuel, pour lequel $G_E = G_M = Q$, cette section efficace se réduit à

$$\boxed{\left(\frac{d^2\sigma^{el}}{d^2\Omega} \right)_{pt} = \frac{Q^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\}}. \quad (3.97)$$

On retrouve bien entendu la section efficace (2.31) de la diffusion $e^- \mu^\pm$ en faisant $Q^2 = 1$ et $M = m_\mu$.

Dans le régime de Mott où $Q^2 \ll M^2$ et donc $E - E' \ll M$ d'après (3.39),

$$\boxed{\left(\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \right)_{Mott} = \frac{Q^2 \alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}}. \quad (3.98)$$

La section efficace (3.96) peut donc s'écrire

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{el}}{d^2\Omega} &= \left(\frac{d^2\sigma^{el}}{d^2\Omega} \right)_{pt} \left[\frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} + \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{1}{Q^2 \left(1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \left(\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \right)_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} + \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{1}{Q^2 \left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}. \end{aligned}} \quad (3.99)$$

3.4 Phénoménologie

En mesurant $\frac{d\sigma_{elastique}^{e^- N \rightarrow e^- N}}{d^2\Omega}$ à Q^2 donné et en faisant varier E , c'est-à-dire l'énergie du faisceau, et θ , on a accès à G_E et G_M . C'est la méthode usuelle, dite de Rosenbluth, pour mesurer G_E et G_M . Elle est efficace pour mesurer G_M pour des valeurs arbitraires de Q^2 , mais la précision sur G_E diminue fortement au-delà de $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$.

La méthode utilisée à JLab pour le proton est basée sur la technique de polarisation due à A. I. Akhiezer et M. P. Rekalov (1967). Elle repose sur le fait que si le faisceau et la cible sont polarisés, ou si le faisceau est polarisé et si la polarisation du proton sortant est mesurée, alors la section efficace correspondante comporte un terme en $G_E G_M$, ce qui permet donc de mesurer le rapport G_E/G_M avec une grande précision. A JLab, on utilise la diffusion $\vec{e}p \rightarrow e\vec{p}$, dans laquelle l'électron initial est polarisé longitudinalement, et où l'on mesure la polarisation du proton sortant, qui a deux composantes non nulles, dans le plan de la réaction, l'une P_ℓ

¹⁹La notation $\tau = Q^2/(4M^2)$ est souvent utilisée.

parallèle à l'impulsion du proton émis, l'autre P_t qui lui est perpendiculaire. On montre alors que

$$\frac{G_{E_p}}{G_{M_p}} = -\frac{P_t}{P_\ell} \frac{E + E'}{2M} \tan \frac{\theta}{2}. \quad (3.100)$$

Grâce à cette technique, ce rapport peut être déterminé sans changer ni l'énergie du faisceau ni l'angle de diffusion, ce qui élimine de nombreuses sources d'erreurs systématiques.

On trouve expérimentalement que les données sont compatibles, au moins pour $Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2$, avec une paramétrisation dipolaire correspondant à²⁰

$$G_E(q^2) \sim \frac{G_M(q^2)}{\mu_p} \sim \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{0,7 \text{ GeV}^2}\right)^2} \quad (3.101)$$

ce qui montre que le proton a une structure interne, et ne peut être considéré comme ponctuel. La forme dipolaire précédente correspond à une distribution de charge et de moment magnétique ayant une décroissance exponentielle avec la distance au centre, comme on peut le vérifier par un calcul élémentaire. Le rayon du proton tiré de ces données est

$$r_p \simeq 0.8 \text{ fm}. \quad (3.102)$$

Pour $Q^2 \geq 1 \text{ GeV}^2$, les données accumulées récemment par JLab montrent un écart au modèle dipolaire, et l'image d'un proton décrit par une distribution exponentielle de charge et de moment magnétique ne semble plus suffisante, comme on peut le voir sur la figure 3.2.

On constate également sur cette figure que la précision des mesures basées sur la méthode de Rosenbluth (données de SLAC) a cependant été grandement améliorée, et les barres d'erreur conduisent, pour Q^2 au-delà de 1 GeV^2 , à des résultats incompatibles expérimentalement (les données de JLab utilisent la méthode de polarisation). Une explication pourrait être due au fait que les calculs menés ci-dessus pour obtenir la formule de Rosenbluth supposent l'échange *d'un seul photon* entre l'électron et le proton. La prise en compte de l'échange de deux photons (ce qui donne un sous-processus similaire au processus $\gamma^*p \rightarrow \gamma p$ rencontré en physique diffractive, mais ici purement élastique) pourrait réconcilier les deux résultats, en diminuant la prédiction théorique du rapport $\mu_p G_{E_p}/G_{M_p}$ à grand Q^2 par la méthode de Rosenbluth. Ce calcul nécessite un modèle du couplage (photon dur)-nucléon, qui est naturellement fourni par le modèle des partons, que nous allons étudier au niveau inclusif dans la section suivante.

Comme nous venons de le voir au niveau de $\mu_p G_{E_p}/G_{M_p}$, le régime asymptotique d'une interaction d'un seul parton avec un seul photon ne semble pas actuellement atteint et les données de JLab et de SLAC correspondent vraisemblablement à un régime de transition entre QCD non-perturbatif et perturbatif, pour lequel l'image dipolaire cesse d'être valable mais n'est pas remplacée par une analyse basée sur QCD perturbatif naïf (couplage d'un seul photon dur avec un quark), comme on peut le constater sur la figure 3.3. Dans le régime où Q^2 est très grand, le comportement des facteurs de forme doit être prédit par QCD dans son régime perturbatif (nous allons étudier ce régime au niveau de la section efficace totale $e^-p \rightarrow X$ dans la section suivante). Dans ce régime, dans lequel la sonde photonique se couple

²⁰On note, comme il est d'usage dans la littérature, $\mu_p = 1 + \kappa_p$ le moment magnétique du proton exprimé en unité de μ_N .

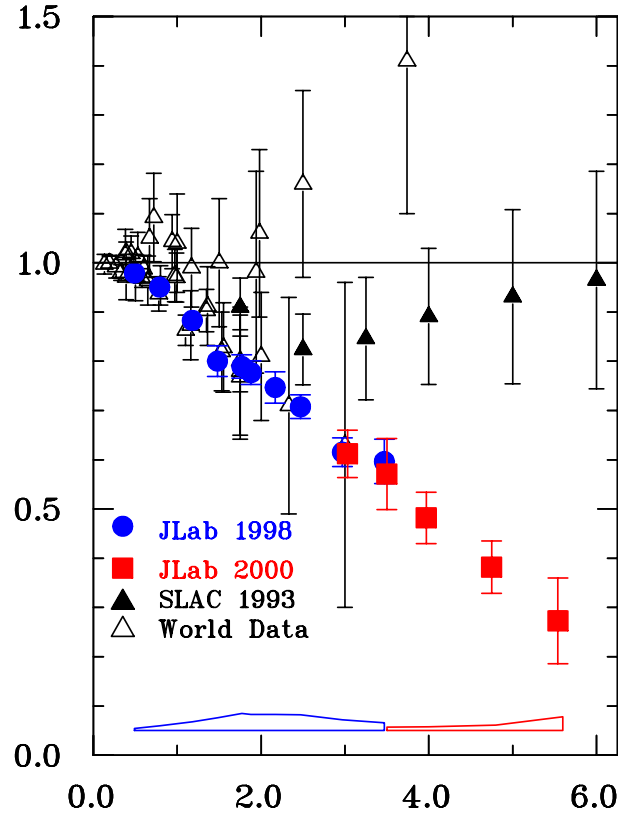


FIG. 3.2 – Rapport $\mu_p G_{E_p}/G_{M_p}$ en fonction de Q^2 (en GeV^2).

directement à un quark du proton, la prédiction est que

$$F_1(Q^2) \simeq \frac{1}{Q^4} \quad (3.103)$$

$$F_2(Q^2) \simeq \frac{1}{Q^6} \quad (3.104)$$

et donc

$$G_E \sim G_M \sim \frac{1}{Q^4}. \quad (3.105)$$

Pour la diffusion profondément inélastique que nous allons maintenant étudier, la situation est phénoménologiquement beaucoup plus favorable, la transition se manifestant dès $Q^2 \simeq 1 \text{ GeV}^2$.

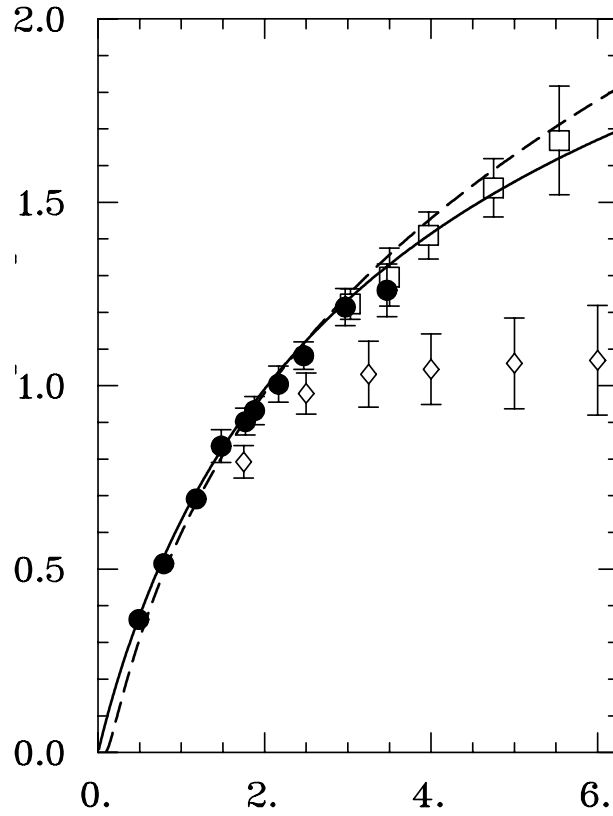


FIG. 3.3 – Rapport $Q^2 F_{2p}/F_{1p}$ en fonction de Q^2 (en GeV^2). Les losanges sont les mesures de SLAC (2000) par la méthode de Rosenbluth, les disques noirs et les carrés blancs sont les mesures de JLab par la méthode des polarisations, respectivement de (2000) et (2002). Les lignes continue et pointillée sont des prédictions basées sur des modèles non-perturbatifs (resp. modèle des solitons et modèle de dominance vectoriel. Dans ce dernier on décrit le photon par son contenu en états hadroniques de mêmes nombres quantiques : ρ, \dots).

Chapitre 4

Diffusion profondément inélastique et modèle des partons

4.1 Introduction

Si la section efficace inélastique, correspondant aux cas où l'état final est constitué d'un ensemble de hadrons qui ne se réduit pas simplement au nucléon initial ou à ses états excités (collision quasi-élastique), se comportait comme dans le cas élastique, on s'attendrait à avoir des sections efficaces inélastiques faibles à Q^2 grand.

Or dans le cas où $W^2 = p_n^2 = (p + q)^2$ est grand devant M^2 (région profondément inélastique), la section efficace totale n'est pas brutalement supprimée : à SLAC-MIT (1968-1969), dans une expérience sur cible fixe (hydrogène) avec un faisceau d'électrons d'énergie $E \sim 20$ GeV, on a observé une section efficace comparable à celle attendue si le proton était ponctuel et soumis à QED seul.

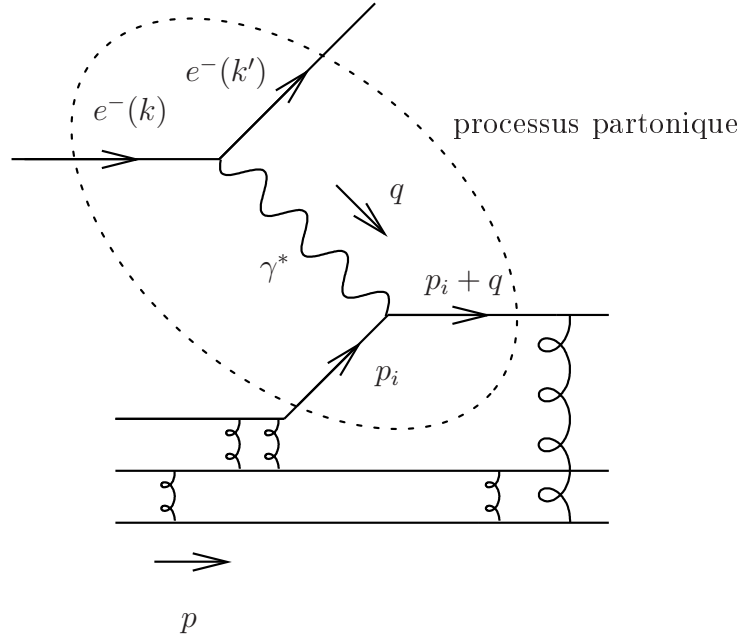
En même temps, les événements ne sont absolument pas dominés par la production élastique d'un proton.

Comment concilier l'existence de diffusion électromagnétique dure avec l'absence de diffusion dure dans les processus élastiques ? La solution est venue de Feynman, Bjorken, sous le nom de *modèle des partons*. L'idée physique est que la sonde électromagnétique, à grand Q^2 , se couple à un constituant du proton, ponctuel, sur lequel l'électron va diffuser élastiquement. Le proton est considéré comme une assemblée lâche d'un petit nombre de ces constituants, les partons (quarks, antiquarks, et toutes les entités neutres responsables de leur lien (identifiées plus tard comme des gluons)), *de masse nulle*. Les constituants qui se couplent au photon peuvent a priori être de spin arbitraire, et les prédictions diffèrent selon la valeur de ce spin. En pratique, les seuls partons qui possèdent un couplage direct avec le photon sont les quarks, de spin 1/2. Nous allons nous limiter à ce cas. La modélisation du processus est illustrée dans la figure 4.1. Nous notons avec une étiquette i le type de parton. Introduisons les variables de Mandelstam du sous-processus partonique :

$$\hat{s} = (k + p_i)^2, \quad \hat{t} = (k - k')^2, \quad \hat{u} = (k' - p_i)^2, \quad \text{avec} \quad \hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0, \quad (4.1)$$

puisque les masses de l'électron et du parton sont négligées. La section efficace du processus s'écrit alors, dans le référentiel du centre de masse du système $\gamma^*parton_i$, en utilisant (2.42),

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2 Q_i^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2 + (\hat{s} + \hat{t})^2}{\hat{t}^2}. \quad (4.2)$$

FIG. 4.1 – Modèle des partons pour la diffusion e^-p .

où Q_i est la charge du parton de type i . Supposons maintenant que le parton i emporte une fraction x de l'impulsion du proton, i.e. $p_i = xp$ avec $0 < x < 1$. *Nous négligeons donc par hypothèse l'impulsion transverse éventuelle du parton* devant son impulsion suivant la direction z (direction de l'impulsion du proton). Cette approximation, valable dès que $Q^2 \gg M^2$, peut être justifiée en étudiant les échelles de temps caractéristiques de l'interaction forte par rapport à celle de l'interaction électromagnétique dure, comme nous le verrons page 57. Les référentiels de moment infini, dans lesquels le proton possède une impulsion très grande suivant la direction z , fournissent un outil technique facilitant cette discussion, comme nous le verrons page 53.

Pour chaque espèce i de parton, notons $f_i(x)$ la probabilité que le proton contienne un parton de type i , d'impulsion xp . Alors

$$\hat{s} = (p_i + k)^2 = 2p_i \cdot k \simeq xS \quad \text{où} \quad S = (k + p)^2,$$

en négligeant la masse M du proton devant l'échelle dure Q . Si la diffusion e^- -parton est élastique,

$$(p_i + q)^2 = 0 = 2p_i \cdot q + q^2 = 2xp \cdot q - Q^2$$

donc

$$\boxed{x = x_{Bjorken} \equiv \frac{Q^2}{2p \cdot q}} \quad (4.3)$$

Expérimentalement, si l'on sait reconstruire l'électron sortant, en mesurant E' et θ on a donc accès à $x = x_{Bj}$ par la relation

$$x_{Bj} = \frac{2E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}}{M(E - E')}, \quad (4.4)$$

et à Q^2 par la relation

$$Q^2 = 4E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.5)$$

Ceci signifie que l'on a directement accès au processus partonique !

De (4.2) au niveau partonique on tire donc, pour le processus $e^- - p$,

$$\frac{d\sigma}{dx_{Bj}dQ^2} = \sum_i f_i(x_{Bj}) Q_i^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left[1 + \left(1 - \frac{Q^2}{x_{Bj}S} \right)^2 \right] \quad (4.6)$$

puisque $\hat{t} = -Q^2$. On en déduit donc les prédictions suivantes :

- le rapport

$$\boxed{\frac{Q^4 \frac{d\sigma}{dx_{Bj}dQ^2}}{1 + \left(1 - \frac{Q^2}{x_{Bj}S} \right)^2} \equiv 2\pi\alpha^2 \frac{\mathcal{F}_2(x_{Bj})}{x_{Bj}} \quad \text{ne dépend que de } x_{Bj}. \quad (4.7)}$$

La fonction \mathcal{F}_2 que nous venons ainsi de définir sera identifiée plus loin à la fonction de structure F_2 du proton dans le modèle des partons. Ce comportement, appelé *scaling de Bjorken*, fût remarquablement bien vérifié à SLAC¹. Cette relation sera violée par les corrections radiatives de QCD.

- le comportement en $1 + \left(1 - \frac{Q^2}{x_{Bj}S} \right)^2$ est connu sous le nom de *relation de Callan-Gross* : c'est une conséquence directe du fait que les partons (quarks) ont un spin $\frac{1}{2}$. Elle reste vraie à l'ordre dominant dans les corrections radiatives de QCD, puisqu'il n'y a pas de couplage direct du photon avec le gluon. Elle est violée aux ordres supérieurs.

4.2 Justification qualitative du modèle des partons

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de contourner la contradiction apparente décrite dans l'introduction, à savoir que les énergies de liaisons entre constituants du proton étant du même ordre que sa masse, il est a priori peu raisonnable de considérer qu'un parton puisse être considéré comme libre pendant son interaction avec le photon virtuel, hypothèse que nous avons utilisée dans le paragraphe précédent. Cette image est en fait correcte, comme nous allons le voir en étudiant les échelles temporelles mises en jeu. Nous verrons que le temps typique de l'interaction du photon est négligeable devant les temps caractéristiques des interactions entre partons. Cette discussion peut être menée dans différents référentiels de façon équivalente.

Une fois ces échelles de temps obtenues, on en déduit une justification du calcul que nous venons de mener. Il a été effectué en négligeant complètement les impulsions transverses des partons, et en ne tenant compte que de leur mouvement collectif d'entraînement par le proton. A cause de l'ordonancement des échelles de temps obtenu, le mouvement dû aux interactions fortes sera négligeable pendant le temps très court pendant lequel l'interaction électromagnétique a lieu. Dans des référentiels particuliers, les *référentiels de moment infini*, choisis pour que cet effet d'entraînement soit asymptotiquement grand, les échelles de temps caractéristiques de l'interaction électromagnétique et forte deviennent très simples : elles

¹Par chance le domaine expérimental en x_{Bj} alors étudié correspondait à une dimension anormale (voir plus loin) petite, et les corrections radiatives n'étaient pas visibles avec la précision de l'époque, ce qui est un hasard heureux pour le développement de QCD!

vallent respectivement 0 et ∞ , ce qui facilite la discussion ! Ces référentiels sont à la base du modèle des partons mais aussi des corrections radiatives au modèle des partons et de la factorisation courte-distance/grande-distance.

Dans ces référentiels, l'impulsion du proton est donc très grande devant toutes les autres échelles (masse, impulsions transverses). Dans le modèle des partons "naïf" (pour les processus inclusifs comme exclusifs), les échelles transverses seront brutalement négligées devant Q^2 , alors qu'elles seront classifiées et prises en compte par exemple dans le cadre des équations DGLAP et ERBL, ainsi que dans l'étude des contributions de twist sous-dominant. Le fait de mener l'étude dans un référentiel de moment infini facilite grandement la classification et le calcul des corrections radiatives, de même qu'elle donne une image plus intuitive de la factorisation des processus inclusifs et exclusifs.

4.2.1 Référentiels de moment infini

Nous allons discuter de façon exhaustive les différents référentiels de moment infini que l'on rencontre couramment dans la littérature, et qui sont adaptés à la formulation du modèle des partons.

Partant d'un référentiel dans lequel le proton se déplace dans la direction z

$$p_\mu = \left(\sqrt{P^2 + M^2}, 0_\perp, P \right) \quad (4.8)$$

on choisit les référentiels dans lesquels $P \rightarrow \infty$, que nous appellerons référentiels de moment infini. Alors

$$p_\mu \sim \left(P + \frac{M^2}{2P}, 0_\perp, P \right). \quad (4.9)$$

Considérons un parton de masse m , d'impulsion longitudinale $x p$, d'impulsion transverse $p_{\perp i}$:

$$p_{i\mu} = \left(\sqrt{x^2 P^2 + m^2 - p_{\perp i}^2}, p_{i\perp}, x P \right) \quad (4.10)$$

et notons² $m_T^2 \equiv m^2 - p_{\perp i}^2 = m^2 + \underline{p}_i^2$ la "masse transverse". Pour $x \neq 0$, nous avons donc

$$p_i \sim \left(x P + \frac{m_T^2}{2xP}, p_{i\perp}, x P \right).$$

Examinons à présent la limite $Q^2 \rightarrow \infty$ et $\nu \rightarrow \infty$. De

$$q_\mu = (q_0, q_\perp, q_z) \quad \text{et} \quad q^2 = (q_0 - q_z)(q_0 + q_z) - \underline{q}^2$$

on déduit

$$p \cdot q = M\nu \simeq P(q_0 - q_z) + \frac{M^2}{2P} q_0. \quad (4.11)$$

On cherche un référentiel dans lequel q^2 et $M\nu$ soient indépendants de P dans la limite $P \rightarrow \infty$. Une paramétrisation naturelle est donnée par

$$q_0 - q_z = \frac{A}{P} \quad q_0 = B P \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ indépendants de } P \text{ à l'ordre dominant.}$$

²Dans toute la suite, une lettre soulignée du type \underline{v} correspond à un vecteur *euclidien*. On a donc $v_\perp^2 = -\underline{v}^2$.

Deux cas limites sont intéressants :

1) $q_0 = q_z \sim P$: alors

$$A = 0 \quad B = \frac{2\nu}{M}, \quad q^2 = q_\perp^2 = -\underline{q}^2,$$

et

$$q = \left(\frac{2\nu}{M}P, q_\perp, \frac{2\nu}{M}P \right).$$

2) q_0 et q_z petits, d'ordre $\frac{1}{P}$: alors $M\nu$ est dominé par le premier terme de (4.11), et

$$B = 0 \quad A = M\nu, \quad q^2 = -\underline{q}^2 + O\left(\frac{1}{P^2}\right)$$

donc

$$q = \left(0, q_\perp, \frac{-M\nu}{P} \right)$$

Comme la valeur de B peut être modifiée par un terme d'ordre $1/P^2$, on peut aussi bien considérer les deux solutions suivantes :

a) $B = \frac{2M\nu + q^2}{4P^2}$ qui conduit à

$$\boxed{q = \left(\frac{2M\nu + q^2}{4P}, q_\perp, \frac{q^2 - 2M\nu}{4P} \right)} \quad \text{réf. du c.m. } e^-p. \quad (4.12)$$

Ce référentiel de moment infini particulier coïncide avec le référentiel du centre de masse du système $e^- - p$.

Preuve:

Dans le référentiel du centre de masse du système $e^- - p$,

$$k = (k^0, 0, -P), \quad k' = (k'^0, k'_\perp, k'_z) = (k^0 - q^0 = P - q^0, -q_\perp, k_z - q_z = -P - q_z) \quad (4.13)$$

puisque

$$q = k - k' = (q^0, q_\perp, q_z). \quad (4.14)$$

En écrivant

$$k'^2 = 0 = (P - q^0)^2 - q_T^2 - (P + q_z)^2$$

soit

$$-2q^0P + (q^0)^2 = q_T^2 + q_z^2 + 2Pq_z,$$

on tire

$$-Q^2 = (q^0)^2 - q_T^2 - q_z^2 = 2P(q_z + q^0).$$

Or

$$M\nu = \left(P + \frac{M^2}{2P} \right) q^0 - Pq_z$$

d'où

$$q^0 \left(2 + \underbrace{\frac{M^2}{2P^2}} \right) = \frac{M\nu}{P} - \frac{Q^2}{2P}$$

$\ll 2$ et donc

$$q^0 = \frac{2M\nu - Q^2}{4P} \qquad q_z = \frac{-Q^2 - 2M\nu}{4P}.$$

b) $B = \frac{M\nu}{P^2}$, choix qui permet d'annuler q_z . Alors

$$q = \left(\frac{M\nu}{P}, q_\perp, 0 \right) = \left(\frac{Q^2}{2x_{Bj}P}, q_\perp, 0 \right) \quad \text{réf. de Bjorken} \quad (4.15)$$

Dans ce référentiel, le photon est statique, et toute la dynamique de l'interaction est cachée dans le proton.

On peut comparer les expressions précédentes de l'impulsion du photon dans les différents référentiels du moment infini avec son expression dans le repère de Breit, pour lequel

$$q = (0, 0_\perp, -2x_{Bj}P) = (0, 0_\perp, Q) \quad \text{réf. de Breit.} \quad (4.16)$$

C'est un repère de moment infini particulier, pour lequel on ajuste P qui tend vers l'infini comme $Q/(2x_{Bj})$. Ce repère a ceci de particulier que le parton voit son impulsion renversée par le choc, puisque $x = x_{Bj}$:

$$\begin{array}{ccc} p_i = x p = (x P, 0_\perp, x P) & p_i + q = x p + q = (x P, 0_\perp, -x P) & \\ \longrightarrow & \longleftarrow & \\ \text{avant le choc} & \text{après le choc} & \text{réf. de Breit.} \end{array} \quad (4.17)$$

Enfin, dans le référentiel du proton, référentiel dans lequel toute la dynamique est mise du côté du photon, on a

$$q = \left(\nu, 0_\perp, \sqrt{Q^2 + \nu^2} \right) \simeq \left(\nu, 0_\perp, \nu + \frac{Q^2}{2\nu} \right) = \left(\frac{Q^2}{2x_{Bj}M}, 0_\perp, \frac{Q^2}{2x_{Bj}M} + M x_{Bj} \right) \quad \text{réf. du proton.} \quad (4.18)$$

qui est un référentiel de moment infini, mais du point de vue du photon. Un tel référentiel est utile si l'on cherche à comprendre la dynamique du processus $\gamma^* p$ en étudiant le contenu partonique du photon.

Pour terminer, il existe un référentiel de moment infini très pratique, qui est à la fois un référentiel de moment infini pour le proton et pour le photon. Ce référentiel, dû à Sudakov (1956), a été introduit à l'origine pour QED. Dans le cas où les particules qui entrent en collision sont de masses nulles, l'idée est de décrire le processus de diffusion dans un référentiel où les deux projectiles ont une impulsion suivant deux directions du cône de lumière choisies pour que leur impulsion transverse soient nulles. Posons donc

$$p_1 = P(1, 0_\perp, -1) \qquad p_2 = \frac{p \cdot q}{2P}(1, 0_\perp, 1), \quad (4.19)$$

qui satisfont $p_1^2 = p_2^2 = 0$. La normalisation³ est choisie pour que $p_1 \cdot p_2 = p \cdot q$. Alors, en négligeant la masse du proton pour $Q^2 \gg M^2$, on aura

$$\boxed{p = p_2, \quad q = p_1 - x_{Bj} p_2, \quad p_1^2 = p_2^2 = 0, \quad \text{réf. de Sudakov.}} \quad (4.20)$$

qui vérifie bien $p_2 \cdot (p_1 - x_{Bj} p_2) = p \cdot q$ et $(p_1 - x_{Bj} p_2)^2 = q^2$. Ce système correspond au choix intermédiaire $A = \frac{Q^2}{2x_{Bj}}$ et $B = -x_{Bj} + \frac{Q^2}{4x_{Bj}P^2}$ par rapport aux cas limites étudiés plus haut. Dans ce repère, l'impulsion du parton, alignée suivant p_2 avant le choc, possède 2 composantes suivant p_1 et p_2 après le choc. Dans notre cas particulier inclusif (non générique de la situation générale d'une factorisation colinéaire), seule la composante suivant p_1 devient colinéaire à p_1 après le choc :

$$\boxed{\begin{array}{lll} p_i = x p_2 = x p_2 & p_i + q = p_1 + (x - x_{Bj}) p_2 = p_1 & \\ \text{avant le choc} & \text{après le choc} & \text{réf. de Sudakov.} \end{array}} \quad (4.21)$$

Ce repère est particulièrement utile pour étudier la *factorisation* entre la partie *dure* (particules se déplaçant suivant les directions p_1 et p_2) et la partie *molle* (particules se déplaçant suivant la direction p_2). Si l'on choisit le paramètre P comme étant de l'ordre de Q , alors les composantes de q suivant p_1 et p_2 sont du même ordre. Dans les coordonnées du cône de lumière, de façon tout à fait équivalente, ceci s'écrirait

$$q^+ \sim q^- \sim Q. \quad (4.22)$$

Ce repère permet de systématiser les calculs perturbatifs des noyaux d'évolution des équations DGLAP, ERBL ou BFKL⁴.

Dans ce qui suit, nous allons étudier la diffusion profondément inélastique dans le référentiel de Bjorken⁵. Le repère de Sudakov nous sera utile pour étudier la factorisation colinéaire, ainsi que la k_T -factorisation spécifique à la physique à petit x_{Bj} .

4.2.2 Echelles de temps des processus mis en jeu

Référentiel du proton :

Dans le référentiel du proton, en utilisant l'inégalité d'Heisenberg, on peut relier la durée du processus d'interaction du photon à l'inverse de l'énergie du photon échangé, i.e.

$$\mathcal{T}_{int} \sim \frac{1}{q^0} \sim \frac{2x_{Bj}M}{Q^2}. \quad (4.23)$$

On peut être un tout petit peu plus précis en se souvenant que notre modèle suppose une interaction avec un constituant du proton, de virtualité typique donnée par Λ_{QCD} . Dans le référentiel lié à ce parton on aura donc plutôt

$$\mathcal{T}_{int} \sim \frac{2x_{Bj}\Lambda_{QCD}}{Q^2}. \quad (4.24)$$

³Dans la littérature, on note en général $2p_1 \cdot p_2 = s$, qui est égale à la variable de Mandelstam s_{γ^*p} uniquement pour un photon réel.

⁴Notons que les variables introduites par Radyushkin pour paramétrer les GPD sont directement inspirées de ces variables de Sudakov.

⁵Bien entendu la nature ne sait rien sur les référentiels : tous les points de vue sont donc équivalents !

Le temps typique d'interaction des quarks et gluons entre eux dans le même référentiel est

$$T \sim \frac{1}{\Lambda_{QCD}}. \quad (4.25)$$

Enfin, le quark qui a interagi avec le photon possède une énergie de l'ordre de q_0 , et donc un temps de vie

$$\mathcal{T}_{final} \sim \frac{2x_{Bj}\Lambda_{QCD}}{Q^2}. \quad (4.26)$$

On a donc

$$\boxed{\mathcal{T}_{int} \sim \mathcal{T}_{final} \ll T.} \quad (4.27)$$

Référentiel de moment infini :

Dans le référentiel au repos du proton, les constituants interagissent, ce qui prend un temps fini. Passant à la limite des grands P , ce temps typique est dilaté d'un facteur γ_P avec

$$\gamma_P = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{p}^2}{p_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{p}^2}{\vec{p}^2 + M^2}}} = \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{M^2}{\vec{p}^2}} \right]^{-1/2} \sim \frac{P}{M}$$

L'échelle typique des fluctuations dans le référentiel au repos du proton est donnée par $\frac{1}{\Lambda_{QCD}}$, d'où

$$T \sim \frac{P}{M\Lambda_{QCD}}.$$

Le raisonnement n'est pas tout à fait correct : on doit plutôt considérer le boost d'un *constituant* du proton, et non du proton lui-même, ce qui revient à faire $\gamma_P \rightarrow \gamma_{constituant}$ avec

$$\gamma_{constituant} \sim \frac{x_{Bj} P}{\Lambda_{QCD}}$$

d'où

$$T_\infty \sim \frac{x_{Bj} P}{\Lambda_{QCD}^2}. \quad (4.28)$$

Il est instructif d'obtenir cette échelle à partir un petit modèle simulant l'interaction entre un parton et les autres constituants du proton comme illustré dans la figure 4.2. Utilisons la théorie des perturbations sur de la mécanique quantique (i.e. théorie des perturbations non covariante)⁶. Elle consiste à intégrer par rapport au temps (ce temps peut être un "temps" sur le cône de lumière) en chaque point d'espace-temps où le potentiel agit, ce qui conduit à l'apparition de dénominateur d'énergie. En conséquence, à chaque vertex \vec{p} est conservée, mais l'énergie ne l'est pas. Chaque état intermédiaire est sur couche de masse, et l'énergie de l'état intermédiaire s'en déduit. Nous n'aurons pas besoin ici de connaître le détail du

⁶Appelée souvent "vieille théorie des perturbations" dans la littérature.

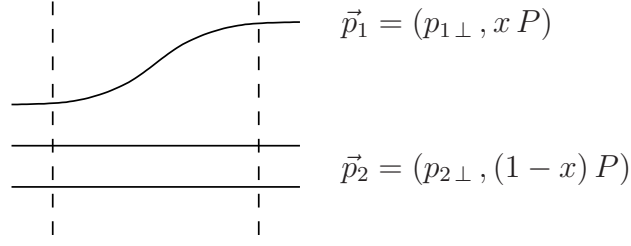


FIG. 4.2 – Interaction proton-parton en théorie des perturbations dans le référentiel du moment infini.

potentiel d'interaction. Au premier ordre en perturbation, l'amplitude de transition est de la forme

$$\frac{C}{E_1 + E_2 - E} = \frac{C}{\sqrt{(xP)^2 + p_{1\perp}^2 + m_1^2} + \sqrt{((1-x)P)^2 + p_{2\perp}^2 + m_2^2} - \sqrt{P^2 + M^2}}$$

$$\stackrel{P \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C 2P}{[x + (1-x) - 1]P^2 + \frac{m_1^2 + p_{1\perp}^2}{x} + \frac{m_2^2 + p_{2\perp}^2}{1-x} - M^2} \quad (4.29)$$

$$= \frac{C 2P}{\frac{m_1^2 + p_{1\perp}^2}{x} + \frac{m_2^2 + p_{2\perp}^2}{1-x} - M^2} \quad (4.30)$$

et donc, pour des impulsions transverse petites, de l'ordre de M ,

$$T \sim \frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{E_1 + E_2 - E} \sim \frac{P}{M^2} \quad (4.31)$$

A nouveau, ce modèle peut être amélioré en tenant compte du fait que nous nous intéressons aux interactions des partons et non du proton lui-même. On doit donc remplacer P par $x_{Bj} P$ et M par la virtualité typique Λ_{QCD} . Ceci mène finalement à

$$T_\infty \sim \frac{xP}{\Lambda_{QCD}^2}, \quad (4.32)$$

résultat identique à (4.28). On notera que le fait de considérer des impulsions transverses non-nulles, de l'ordre de grandeur des échelles non perturbatives ici en jeu, ne change rien à notre évaluation. Ceci est cohérent avec l'image partonique suivant laquelle les impulsions transverse des partons peuvent être négligées.

Notre résultat (4.32), tiré de la relation (4.29), est susceptible d'être modifié lorsque $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow 1$. Effectivement, l'émission de partons mous demande en général un traitement particulier (voir par exemple la prescription + introduite plus loin pour l'équation DGLAP, et les dynamiques particulières aux limites $x_{Bj} \rightarrow 0$ et $x_{Bj} \rightarrow 1$).

En plus de l'échelle de temps caractéristique, l'expression (4.29) contient une information dynamique intéressante : les partons sont tous émis dans la même direction.

Preuve:

Si $x < 0$, on aurait, dans le développement de (4.29) dans la limite P grand, au lieu de $x + (1-x) - 1$, $|x| + 1 - x - 1 = |x| - x = 2|x|$, et le dénominateur serait en P au lieu d'être en $1/P$, donc l'amplitude serait supprimée par un facteur relatif $1/P^2$. L'argument est le même pour $1 - x > 0$. Ainsi les partons ne peuvent être produits vers l'arrière. A nouveau, l'argument est pris en défaut si xP est petit ("wee" parton)

Cette remarque a des conséquences techniques très intéressantes : contrairement à l'approche covariante, cette théorie des perturbations exige de considérer *tous les diagrammes correspondant à des configurations temporelles distinctes*. Ceci augmente a priori le nombre de diagrammes à considérer, mais il se trouve que dans de nombreuses situations, nombre de ces diagrammes sont nuls à cause de la cinématique particulière, comme nous venons de le voir sur un exemple. Les diagrammes qui sont effectivement non nuls sont en pratique en nombre réduit, et peuvent en général permettre de développer une intuition physique assez éclairante sur le processus étudié.

Il nous reste à évaluer le temps typique de l'interaction du photon virtuel. On peut raisonner également en partant de la théorie des perturbations non covariante, comme on l'a fait pour estimer le temps de vie de l'état virtuel, comme illustré dans la figure 4.3.

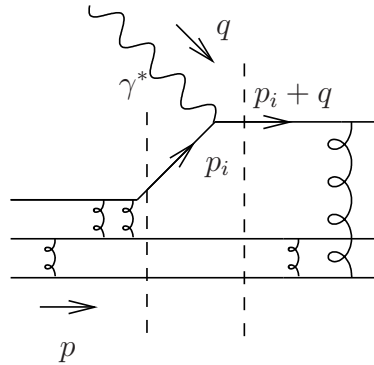


FIG. 4.3 – Interaction photon-proton en théorie des perturbations dans le référentiel du moment infini.

$$\mathcal{T}_{int(\infty)} \sim \frac{1}{E_{p_i+q} - E_q - E_{p_i}} \quad (4.33)$$

avec comme plus haut

$$E_p = \sqrt{(xP)^2 + p_{i\perp}^2 + m^2} \sim xP + \frac{p_{i\perp}^2 + m^2}{2xP} \quad (4.34)$$

$$E_{p+q} \sim xP + \frac{(p_{i\perp} + q_{\perp})^2 + m^2}{2xP}. \quad (4.35)$$

Dans ce processus, le couplage a photon est traité comme un potentiel extérieur, et l'énergie E_q du photon est donc fixée, égale à q_0 . On en déduit donc que

$$\mathcal{T}_{int(\infty)} \sim \frac{2x_{Bj}P}{Q^2}, \quad (4.36)$$

toutes les impulsions transverses étant petites devant q_\perp . Notons que ces impulsions transverses, pour le processus dur ici considéré, peuvent en pratique être grandes devant Λ_{QCD} . En revanche (voir plus loin l'étude des singularités colinéaires et de l'équation DGLAP), le processus est complètement dominé par la cinématique suivant laquelle $p_{i\perp} \ll q_\perp$.

Le quark virtuel qui a interagi avec le photon a une énergie E_{p+q} , donc un temps de vie

$$\mathcal{T}_{final(\infty)} \sim \frac{1}{E_{p+q} - E_{p_i}} \sim \frac{2x_{Bj}P}{Q^2} \sim \mathcal{T}_{int(\infty)} \quad (4.37)$$

On a donc finalement

$$\boxed{\mathcal{T}_{int(\infty)} \sim \mathcal{T}_{final(\infty)} \ll T_\infty}, \quad (4.38)$$

ces temps caractéristiques étant dans le même rapport que les temps caractéristiques dans le référentiel du proton que nous avons obtenu dans (4.27). Dans la limite où P est fixé à une valeur très grande et où l'on fait tendre Q^2 vers l'infini, on constate que

$$\mathcal{T}_{int(\infty)} \sim \mathcal{T}_{final(\infty)} \rightarrow 0 \ll T_\infty \rightarrow \infty. \quad (4.39)$$

En conclusion, le temps caractéristique de l'interaction électromagnétique est très faible devant le temps caractéristique de l'interaction forte entre constituants du proton. On peut donc considérer que le parton est libre durant l'interaction, et que les interactions non-perturbatives sur l'état final peuvent être négligées. Les interactions perturbatives sur l'état final interviennent avec des temps caractéristiques du même ordre que le temps d'interaction électromagnétique. Elles donnent lieu en particulier à l'apparition des facteurs de Sudakov pour les processus semi-inclusif.

Si l'on revient à notre introduction, on voit que l'argument lié à l'intensité de l'énergie de liaison a été contourné. L'énergie (ou encore l'impulsion transverse) reçue de la part de la sonde électromagnétique est tellement élevée (par rapport à l'énergie de liaison) que le parton peut être considéré comme libre pendant et après l'interaction. L'image est la même que celle d'un choc en mécanique classique, pour lequel les forces de répulsion sont tellement élevées que toutes les autres énergies en jeu sont négligeables pendant le choc.

Dans le référentiel de Bjorken, $|q_\perp| \sim Q$ donc le photon est absorbé et réémis sur un domaine de taille transverse $|\Delta x| \sim \frac{1}{Q}$: le parton qui absorbe le photon peut être considéré comme ponctuel, jusqu'à une échelle transverse $\frac{1}{Q}$. A cette échelle, il n'est entouré par aucun nuage de particule. Bien entendu, les corrections radiatives seront là pour tenir compte de ce nuage.

En réalité, dans la théorie des champs de l'interaction forte, les particules virtuelles échangées entre fermions peuvent avoir des impulsions arbitraires, en particulier grandes, ce qui correspond à des distances courtes, ou encore à des échelles de temps courte, ce qui semble contredire la discussion précédente concernant T . La solution vient de la *la liberté asymptotique*, propriété satisfaite par QCD ('t Hooft, Politzer, Gross et Wilczek) :

$$\alpha_s(Q^2) \text{ diminue lorsque } Q^2 \text{ croît.}$$

Plus précisément, à l'ordre une boucle⁷

$$\boxed{\alpha_s(\mu^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}}} \quad (4.40)$$

⁷ α_s est connu à 3 boucles.

avec $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f$. Dans le processus de diffusion profondément inélastique étudié plus haut, l'échelle μ^2 est donnée par Q^2 . Ce couplage $\alpha_s(Q^2)$ ne tend vers 0 que lentement, et le modèle des partons est nécessairement approximatif, puisque les partons ne sont jamais exactement libres. Les corrections dues aux échanges de gluons et aux émissions de gluons sont spécifiques à QCD. Elles ont été testées avec succès à depuis la fin des années 70.

4.3 Distributions de partons et fonctions de structure

4.3.1 Un peu de cinématique

La cinématique de la diffusion électron-proton a déjà été introduite page 31. Il est d'usage de noter

$$y = \frac{q \cdot p}{k \cdot p} = \frac{\nu}{E} = \frac{E - E'}{E} \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (4.41)$$

la fraction d'énergie perdue par le lepton incident dans le référentiel du proton, et donc transmise au photon. Rassemblons les relations utiles entre toutes les variables cinématiques :

$$\boxed{Q^2 = -q^2 = 2 M \nu x_{Bj} = 2 M E x_{Bj} y = 4 E E' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (4.42)$$

$$\boxed{W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2 M \nu - Q^2 = M^2 + Q^2 \left(\frac{1}{x_{Bj}} - 1 \right)} \quad (4.43)$$

et

$$\boxed{S = (k + p)^2 = 2 M E + M^2 = \frac{Q^2}{x_{Bj} y} + M^2} \quad (4.44)$$

Pour une énergie totale dans le centre de masse \sqrt{S} (en mode cible fixe ou en mode collisionneur), le domaine accessible cinématiquement dans le couple (x_{Bj}, Q^2) a donc une forme triangulaire (en échelles linéaires ou en échelles doublement logarithmiques), comme illustré dans la figure 4.4. Pour un x_{Bj} donné, les valeurs maximales Q^2 sont obtenues pour $y = 1$. La région élastique profonde correspond à $x_{Bj} = 1$, (plus généralement la région quasi-élastique correspond à $Q^2(1 - x_{Bj}) \ll M^2$) et $Q^2 \gg M^2$ tandis que la région profondément inélastique $W^2 \gg Q^2$ est obtenue pour Q^2 grand et x_{Bj} non paramétriquement proche de 1.

Remarque:

Dans la limite $x_{Bj} \rightarrow 0$,

$$W^2 \sim \frac{Q^2}{x_{Bj}} \quad (4.45)$$

ce qui justifie le fait que la limite de Regge dans le canal $\gamma^* p$ correspond à la limite des petits x_{Bj} . En outre

$$S \sim \frac{Q^2}{x_{Bj} y} \quad (4.46)$$

et donc

$$W^2 \sim y S. \quad (4.47)$$

Donc la région des petits x_{Bj} , étudiée à HERA, correspond à $y \simeq 1$.

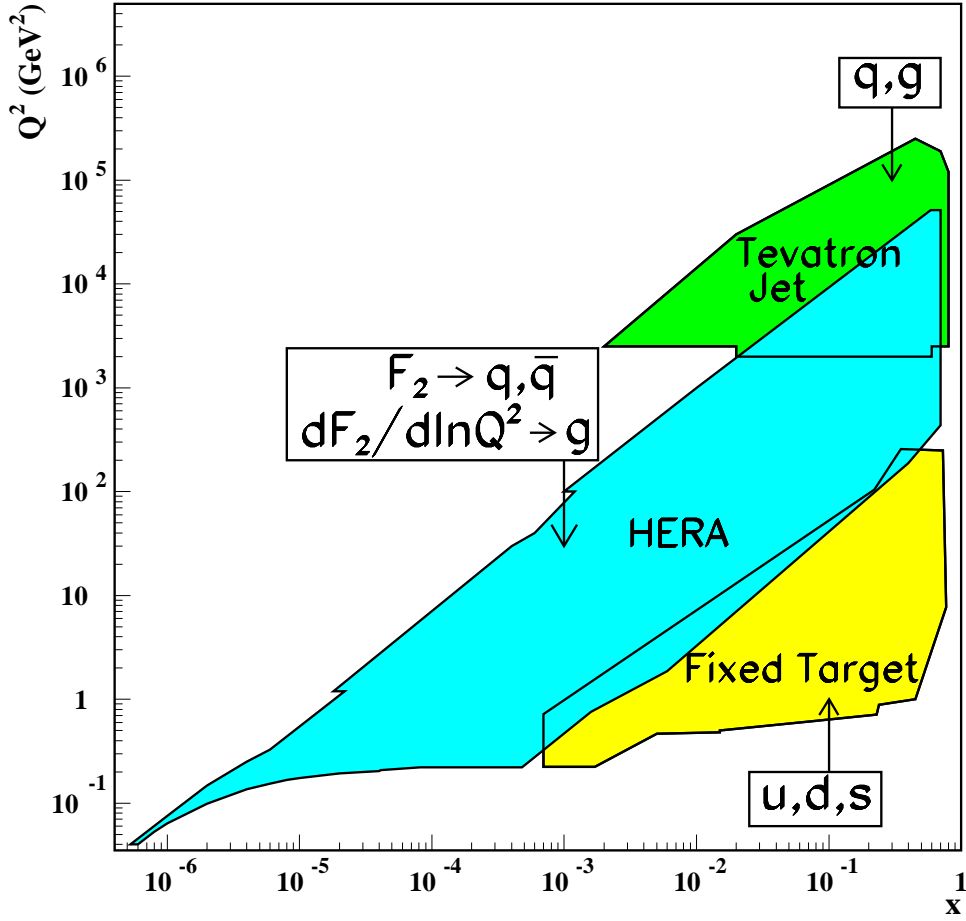


FIG. 4.4 – Domaines cinématiques en x_{Bj} et Q^2 dans les expériences sur cible fixe et en mode collisionneur dans les processus e^-p et $p\bar{p}$ (Tevatron), et contraintes sur les différentes distributions de partons (*PDG 2008*).

4.3.2 Section efficace et fonctions de structure

La section efficace différentielle (3.95) peut être écrite de façon complètement adimensionnée. Posons

$$\begin{aligned} M W_1(q^2, \nu) &= F_1(x_{Bj}, Q^2) \\ \nu W_2(q^2, \nu) &= F_2(x_{Bj}, Q^2). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Les quantités F_1 et F_2 seront appelées fonctions de structure⁸ On peut alors écrire (3.95) sous les formes équivalentes

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_{Bj} dy} &= \frac{2\pi\alpha^2}{M E x_{Bj}^2 y^2} \left[x_{Bj} y^2 F_1 + \left(1 - y - x_{Bj}^2 y^2 \frac{M^2}{Q^2} \right) F_2 \right] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{x_{Bj} y Q^2} \left[x_{Bj} y^2 F_1 + \left(1 - y - x_{Bj}^2 y^2 \frac{M^2}{Q^2} \right) F_2 \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

⁸Dans la littérature, $F_{1,2}$ et $W_{1,2}$ sont tous appelés fonctions de structure. Les définitions de $F_{1,2}$ sont universelles, ce qui n'est pas le cas de $W_{1,2}$.

Preuve:

- De $x_{Bj} = \frac{E E'}{M(E-E')}(1 - \cos \theta)$ et $y = (E - E')/E$ on tire, puisque y ne dépend pas de θ ,

$$\frac{\partial(x_{Bj}, y)}{\partial(\Omega, E')} = \frac{\partial x_{Bj}}{\partial \Omega} \frac{\partial y}{\partial E'} = \frac{E'}{2\pi(E-E')M} = \frac{E'}{2\pi E y M}. \quad (4.50)$$

donc

$$\frac{d^2 \sigma}{dx_{Bj} dy} = \frac{2\pi \alpha^2 M}{4 E E'^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[2 y E' W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + y E' W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.51)$$

- D'autre part

$$\begin{aligned} 2 E' \sin^2 \frac{\theta}{2} &= M x_{Bj} y \\ E' y \cos^2 \frac{\theta}{2} &= E' y \left(1 - \frac{M x_{Bj} y}{2 E'} \right) = \nu \left(\frac{E'}{E} - \frac{M x_{Bj} y}{2 E} \right) = \nu \left(1 - y - \frac{M x_{Bj} y}{2 E} \right) \\ &= \nu \left(1 - y - x_{Bj}^2 y^2 \frac{M^2}{Q^2} \right). \end{aligned}$$

qui conduit à l'expression cherchée en injectant dans (4.51) et en utilisant (4.48).

4.3.3 Les fonctions de structure vues comme des sections efficaces

$\gamma^* p$

Dans le cas d'un photon réel, la section efficace du processus γp s'obtient en partant de (3.31) où l'on doit simplement enlever la partie de l'espace des phases correspondant à l'électron sortant, et remplacer dans le terme de flux $2 E 2 M$ par $2 K_{\gamma p} = 2 q_0 2 M$. Utilisant la définition (3.35) du tenseur $W^{\mu\nu}$, dans lequel le facteur de densité $2 M$ a été absorbé (on posera donc $K_\gamma = q_0$), on a

$$\sigma^{tot}(\gamma p \rightarrow X) = \frac{e^2}{2 q_0} 2\pi W^{\mu\nu} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = \frac{4\pi^2 \alpha}{q_0} W^{\mu\nu} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu, \quad (4.52)$$

où les polarisations du photon transverse sont données par (3.69) ou (3.70).

Dans le cas où le photon est virtuel, l'expression (4.52) reste valable, d'après la décomposition (3.66) du propagateur du photon. On doit bien sûr considérer, outre les 2 polarisations transverses du photon, la polarisation longitudinale (3.74). La seule complication est de normaliser le flux de photon entrant. Cette normalisation est arbitraire. On trouve deux conventions dans la littérature.

La première, due à Gilman (1968), consiste à partir de la définition (1.18) du flux, qui s'écrit ici

$$2K_{\gamma^* p} = 4\sqrt{(p \cdot q)^2 - M^2 q^2} = 4\sqrt{M^2 \nu^2 - M^2 q^2} \underset{\nu \gg Q^2}{\sim} 4 M \left(\nu + \frac{Q^2}{2\nu} \right) \quad (4.53)$$

ce qui signifie donc que l'on doit effectuer dans la formule (4.52) le remplacement

$$\gamma : K_\gamma = q_0 = \nu \quad \longrightarrow \quad \gamma^* : K_{\gamma^*}^{Gilman} = \nu + \frac{Q^2}{2\nu}. \quad (4.54)$$

La seconde, due à Hand (1963), consiste à définir le flux de photon comme celui d'un photon réel dont l'énergie produirait le même état hadronique final. On écrit donc

$$W^2 = M'^2 = M^2 + 2 M \nu + q^2 = M^2 + 2 M q_0 \quad (4.55)$$

soit

$$\gamma : K_\gamma = q_0 = \nu \quad \longrightarrow \quad \gamma^* : K_{\gamma^*}^{Hand} = \nu + \frac{Q^2}{2M}. \quad (4.56)$$

Ainsi, avec une convention donnée Schoisie pour K_{γ^*} ,

$$\boxed{\sigma^{tot}(\gamma^* p \rightarrow X) = \frac{4\pi^2 \alpha}{K_{\gamma^*}} W^{\mu\nu} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu.} \quad (4.57)$$

Considérons maintenant les deux situations correspondant aux polarisations transverses et longitudinales. Partant de la décomposition (3.76)

$$W^{\mu\nu}(p, q) = -W_1 g_\perp^{\mu\nu} + \left[-W_1 + \left(1 - \frac{(p \cdot q)^2}{M^2 q^2} \right) W_2 \right] F_L^{\mu\nu}$$

nous déduisons immédiatement que

$$\epsilon_\mu^{(i)*} W^{\mu\nu} \epsilon_\nu^{(i)} = W_1 \quad (i = 1, 2) \quad (4.58)$$

et donc que

$$\sigma^{tot}(\gamma_\perp^{(i)*} p \rightarrow X) = \frac{4\pi^2 \alpha}{K_{\gamma^*}} W_1 = \frac{4\pi^2 \alpha}{K_{\gamma^*}} \frac{F_1}{M}$$

On a donc

$$\sigma^{tot}(\gamma_\perp^* p \rightarrow X) = \frac{1}{2} \left[\sigma^{tot}(\gamma_\perp^{(1)*} p \rightarrow X) + \sigma^{tot}(\gamma_\perp^{(2)*} p \rightarrow X) \right] = \frac{4\pi^2 \alpha}{K_{\gamma^*}} \frac{F_1}{M} \quad (4.59)$$

que nous écrirons sous la forme

$$\boxed{\sigma_T \equiv \sigma^{tot}(\gamma_\perp^* p \rightarrow X) = \frac{4\pi^2 \alpha}{K_{\gamma^*}} \frac{F_T}{2 M x_{Bj}}} \quad (4.60)$$

avec

$$\boxed{F_T \equiv 2 x_{Bj} F_1,} \quad (4.61)$$

dont la normalisation apparaîtra clairement dans le cadre du modèle des partons.

De même, puisque $\nu = p \cdot q/M$, (3.76) conduit à

$$\epsilon_{L\mu}^* W^{\mu\nu} \epsilon_{L\nu} = -W_1 + \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) W_2 = \frac{1}{\nu} \left[1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right] \left[F_2 - \frac{\nu}{M \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right)} F_1 \right]. \quad (4.62)$$

Or

$$1 + \frac{\nu^2}{Q^2} = 1 + \frac{Q^2}{4 M^2 x_{Bj}^2} \quad (4.63)$$

et

$$x_{Bj} y S = Q^2 + M^2.$$

La contribution des polarisations longitudinales n'est significative que pour y assez proche de 1 (typiquement $y \simeq .5$ à $.9$ à HERA), situation pour laquelle

$$\frac{Q^2}{x_{Bj}^2} \simeq \frac{S}{x_{Bj}} \gg M^2$$

avec une erreur de l'ordre de 1% à HERA, où cette section efficace a été mesurée. Dans cette approximation, nous pouvons donc écrire

$$\epsilon_{L\mu}^* W^{\mu\nu} \epsilon_{L\nu} \simeq \frac{1}{2 M^2 x_{Bj}} [F_2 - 2 x_{Bj} F_1] \quad (4.64)$$

qui conduit donc à

$$\sigma_L \equiv \sigma^{tot}(\gamma_L^* p \rightarrow X) = \frac{4\pi^2 \alpha}{K_{\gamma^*}} \frac{F_L}{2 M x_{Bj}} \quad (4.65)$$

avec

$$F_L \equiv F_2 - 2 x_{Bj} F_1. \quad (4.66)$$

Avec ces définitions,

$$F_2 = F_T + F_L. \quad (4.67)$$

Il est d'usage de noter⁹

$$R \equiv \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{F_L}{F_T}, \quad (4.68)$$

Examinons à présent la section efficace différentielle complète (4.49) du processus $e^- p \rightarrow e^- X$ du point de vue des différents sous-processus $\gamma^* p \rightarrow X$ mis en jeu. Toujours dans la même approximation,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_{Bj} dy} &\simeq \frac{4\pi\alpha^2}{x_{Bj} y Q^2} [x_{Bj} y^2 F_1 + (1-y) F_2] \\ &= \frac{2\pi\alpha^2}{x_{Bj} y Q^2} \left[x_{Bj} y^2 \frac{F_2 - F_L}{2 x_{Bj}} + 2(1-y) F_2 \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_{Bj} dy} &= \frac{2\pi\alpha^2}{x_{Bj} y Q^2} \{ [2(1-y) + y^2] F_2 - y^2 F_L \} \\ &= \frac{2\pi\alpha^2}{x_{Bj} Q^4} \{ [2(1-y) + y^2] F_T + 2(1-y) F_L \}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

4.3.4 Fonctions de structure dans le modèle des partons

Nous allons maintenant utiliser le modèle des partons pour calculer les fonctions de structure F_1 et F_2 . L'idée est d'utiliser nos calculs concernant la diffusion élastique sur une particule ponctuelle, ici un parton, pour en déduire les expressions cherchées.

⁹Ne pas confondre ce rapport avec le rapport (2.3) du processus d'annihilation $e^+e^- \rightarrow$ hadrons.

Retour sur la relation de Callan-Gross

Notons tout d'abord que l'énergie transférée $\nu = p \cdot q/M$ est la même pour un parton de masse $m = x M$ qui absorbe toute l'énergie, ce qui se vérifie algébriquement par

$$\nu = \frac{p \cdot q}{M} = \frac{x p \cdot q}{x M}. \quad (4.71)$$

Partant des expressions (3.86) et (3.87)

$$\begin{aligned} W_{1pt}^{el} &= \frac{Q^2}{4m^2} Q^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) = \frac{Q^2}{4m^2\nu} Q^2 \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right), \\ W_{2pt}^{el} &= \frac{1}{\nu} Q^2 \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right). \end{aligned}$$

pour la diffusion sur une particule de masse m et de charge Q , nous écrirons donc pour la fonction de structure d'un proton possédant d'un constituant de ce type (de charge $Q = 1$ pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned} F_1 &= M W_{1pt}^{el} = \frac{M Q^2}{4 m^2 \nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) = \frac{Q^2}{4 m x \nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) \\ &= \frac{Q^2}{4 M x^2 \nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M x \nu}\right) = \frac{x_{Bj}}{2 x^2} \delta\left(1 - \frac{x_{Bj}}{x}\right) = \frac{x_{Bj}}{2 x} \delta(x_{Bj} - x) \end{aligned} \quad (4.72)$$

et

$$F_2 = \nu W_{2pt}^{el} = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) = \delta\left(\frac{x_{Bj}}{x} - 1\right) = x \delta(x_{Bj} - x). \quad (4.73)$$

En notant, comme page 52, par $f_i(x)$ la probabilité que le proton contienne un parton de type i , d'impulsion $x p$, de charge e_i mesurée en unité de $|e|$, nous avons donc

$$F_1(x_{Bj}) = \sum_i \int dx e_i^2 f_i(x) \frac{1}{2} \delta(x_{Bj} - x) \quad (4.74)$$

$$F_2(x_{Bj}) = \sum_i \int dx e_i^2 f_i(x) x \delta(x_{Bj} - x), \quad (4.75)$$

qui ne dépendent donc que de x_{Bj} . En outre, ces fonctions de structure vérifient

$$\boxed{F_2(x_{Bj}) = 2 x_{Bj} F_1(x_{Bj})}. \quad (4.76)$$

ou de façon équivalente, d'après (4.66) et (4.61),

$$\boxed{F_T = F_2 \quad \text{et} \quad F_L = 0}. \quad (4.77)$$

C'est la relation de Callan-Gross, que nous avons déjà rencontrée plus haut sous une forme un peu différente. Injectons en effet les fonctions de structure (4.74) et (4.75) dans l'expression (4.70), obtenue en négligeant dans le régime de diffusion profonde le terme en Q^2/M^2 . Nous obtenons alors

$$\frac{d^2\sigma}{dx_{Bj} dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{x_{Bj} y Q^2} [y^2 + 2(1-y)] F_2 = \frac{2\pi\alpha^2}{x_{Bj} y Q^2} [1 + (1-y)^2] F_2. \quad (4.78)$$

D'autre part, de $Q^2 = 2 M E x_{Bj} y$ on tire

$$\left| \frac{\partial(x_{Bj}, Q^2)}{\partial(x_{Bj}, y)} \right| = \frac{Q^2}{y} \quad (4.79)$$

et donc

$$\frac{d^2\sigma}{dx_{Bj} dy} = \frac{Q^2}{y} \frac{d^2\sigma}{dx_{Bj} dQ^2}. \quad (4.80)$$

Combinant (4.78) avec (4.80) on obtient alors, puisque $y \simeq Q^2/(x_{Bj} S)$ dans la limite $Q^2 \gg M^2$,

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{dx_{Bj} dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{x_{Bj} Q^4} \left[1 + \left(1 - \frac{Q^2}{x_{Bj} S} \right)^2 \right] F_2}, \quad (4.81)$$

qui est exactement la relation d'invariance d'échelle (4.7), ce qui nous permet d'identifier F_2 à la quantité \mathcal{F}_2 extraite des données expérimentales.

S'il existait des constituants du proton de spin 0 chargés électriquement, nous aurions obtenu une fonction de structure $F_1 = 0$ (et $F_2 \neq 0$). En conséquence la relation d'invariance d'échelle (4.81) serait différente, en contradiction avec les données expérimentales.

Fonctions de structure du proton et du neutron ; règles de somme

La forme de la fonction de structure F_2 peut se prédire avec quelques arguments simples, illustrés par la figure 4.5. Dans un modèle primitif où le proton serait constitué de 3 quarks de valence, $F_2(x_{Bj})$ serait simplement la somme de trois distributions de Dirac piquées en $x_{Bj} = 1/3$. Bien sûr, le fait que ces quarks soient plongés dans un potentiel confinant introduit un étalement de ces distributions. Les gluons virtuels échangé peuvent produire des paires quark-antiquark, avec une probabilité de type Bremsstrahlung, en $dk/k \sim dx/x$, donc piquée aux petits x . Cette contribution de la "mer" et des gluons sera donc très piquée dans la région des petits x_{Bj} , et du point de vue de la théorie des champs, l'effet des corrections radiatives de QCD, sera très marqué à petit x_{Bj} .

La conservation du tenseur d'énergie-impulsion permet de montrer que

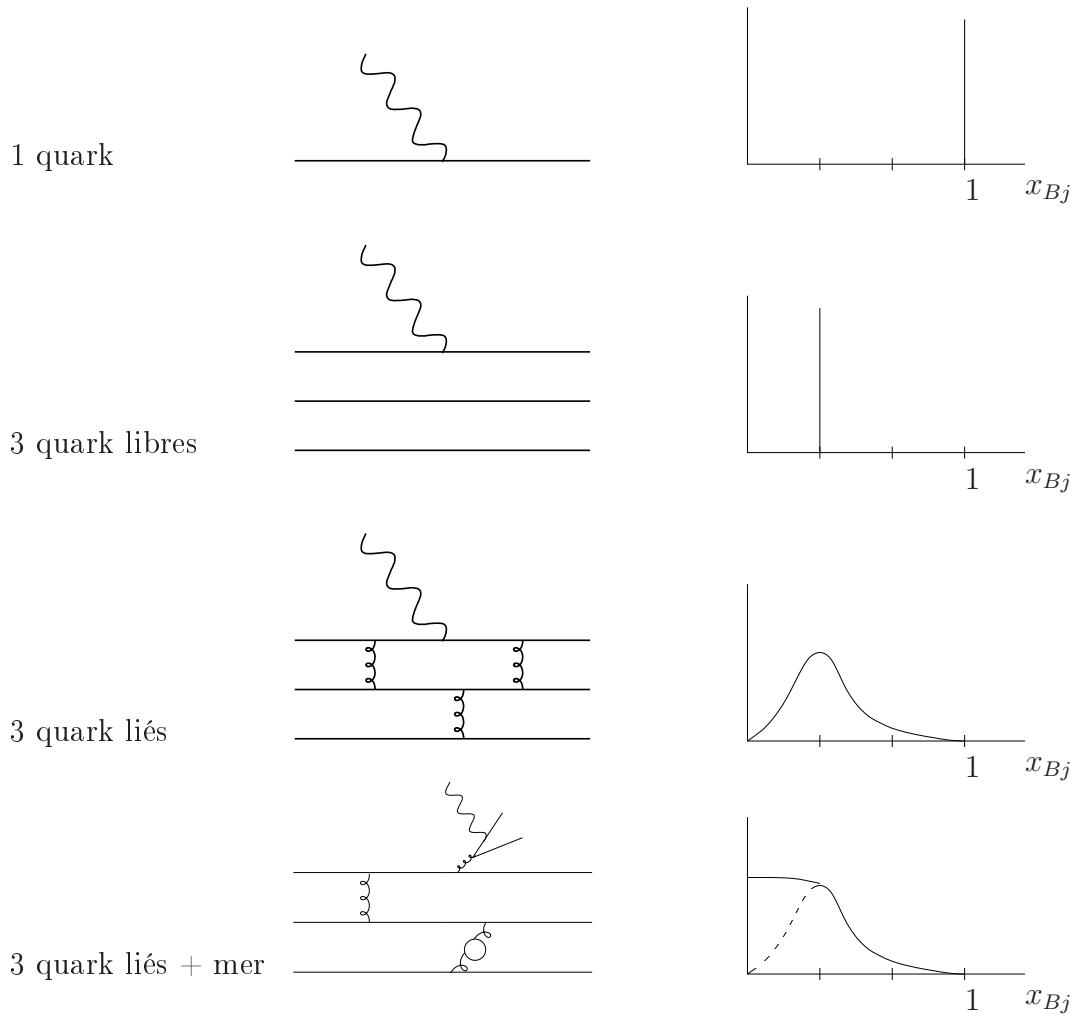
$$\int_0^1 dx_{Bj} F_2(x_{Bj}, Q^2) = \text{constante}. \quad (4.82)$$

D'autre part, lorsque Q^2 augmente, la résolution de la sonde électromagnétique étant en $1/Q$, le contenu en partons du proton augmente, et puisque le contenu en quarks de la mer et en gluons se révèle de plus en plus dans le domaine des petits x_{Bj} , le fait que la surface délimitée par F_2 soit constante montre que la contribution des régions de x_{Bj} modéré diminue. Dans la limite extrême où $Q^2 \rightarrow \infty$, on aura donc

$$F_2(x_{Bj}, Q^2) \xrightarrow[Q^2 \rightarrow \infty]{} \delta(x_{Bj}). \quad (4.83)$$

Nous pouvons être plus quantitatif, en rendant explicite le modèle des partons. Dans ce modèle, nous pouvons écrire, pour la fonction de structure du proton

$$\begin{aligned} \frac{F_2^{(p)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} &= \sum_i e_i^2 f_i(x_{Bj}) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left[f_u^{(p)}(x_{Bj}) + f_{\bar{u}}^{(p)}(x_{Bj}) \right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[f_d^{(p)}(x_{Bj}) + f_{\bar{d}}^{(p)}(x_{Bj}) + f_s^{(p)}(x_{Bj}) + f_{\bar{s}}^{(p)}(x_{Bj}) \right] \end{aligned} \quad (4.84)$$


 FIG. 4.5 – Modèle partonique pour F_2^p .

et de même, pour la fonction de structure du neutron

$$\begin{aligned}
 \frac{F_2^{(n)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} &= \sum_i e_i^2 f_i(x_{Bj}) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left[f_u^{(n)}(x_{Bj}) + f_{\bar{u}}^{(n)}(x_{Bj}) \right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[f_d^{(n)}(x_{Bj}) + f_{\bar{d}}^{(n)}(x_{Bj}) + f_s^{(n)}(x_{Bj}) + f_{\bar{s}}^{(n)}(x_{Bj}) \right].
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

Par symétrie d'isospin, i.e. sous la transformation $p \leftrightarrow n$ et $u \leftrightarrow d$, nous avons

$$\begin{aligned}
 f_u^{(p)} &= f_d^{(n)} \equiv u \\
 f_d^{(p)} &= f_u^{(n)} \equiv d \\
 f_s^{(p)} &= f_s^{(n)} \equiv s
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

d'où finalement

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{F_2^{(p)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} &= \frac{4}{9}(u + \bar{u}) + \frac{1}{9}(d + \bar{d} + s + \bar{s}) \\ \frac{F_2^{(n)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} &= \frac{4}{9}(d + \bar{d}) + \frac{1}{9}(u + \bar{u} + s + \bar{s}). \end{aligned}} \quad (4.87)$$

Comme les distributions partoniques doivent être positives, on en déduit que le rapport

$$\frac{F_2^{(p)}}{F_2^{(n)}} = \frac{4(u + \bar{u}) + (d + \bar{d}) + (s + \bar{s})}{(u + \bar{u}) + 4(d + \bar{d}) + (s + \bar{s})} \quad (4.88)$$

doit vérifier (Nachtmann (1972)) :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{(p)}}{F_2^{(n)}} \leq 4 \quad (4.89)$$

qui est bien vérifiée expérimentalement, comme on peut le voir sur la figure 4.6.

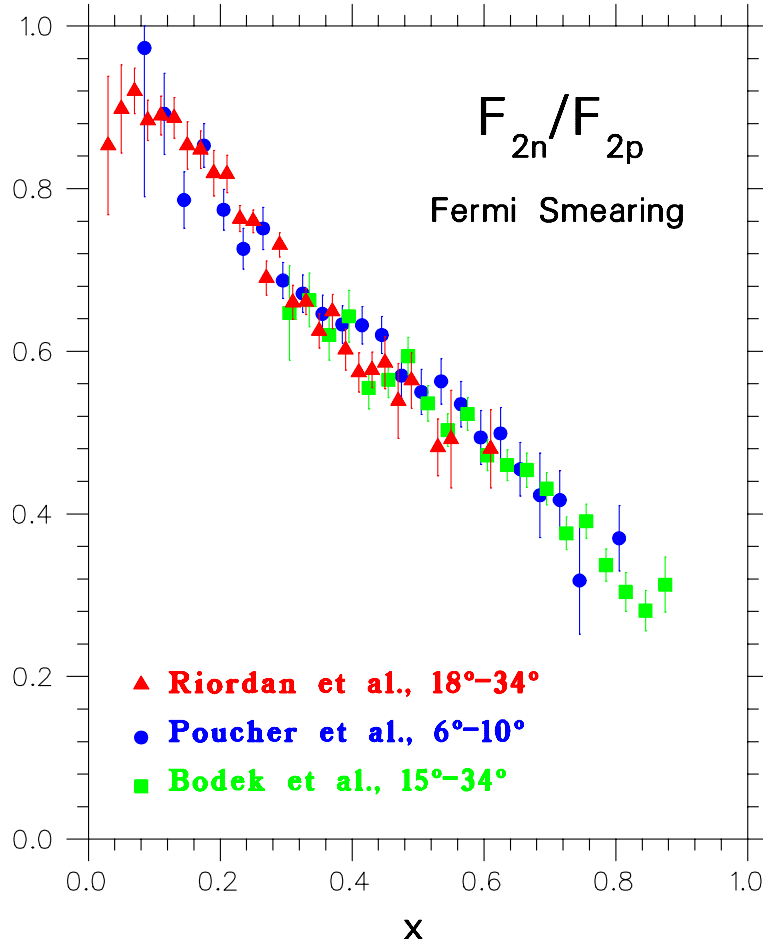


FIG. 4.6 – Données de SLAC (1973) pour le rapport $F_2^{(n)}/F_2^{(p)}$.

Les distributions de partons doivent vérifier les règles de somme suivantes :

Etrangeté nulle des nucléons :

$$\int_0^1 dx (s - \bar{s}) = 0. \quad (4.90)$$

Charge du proton=+1 :

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(u - \bar{u}) - \frac{1}{3}(d - \bar{d}) \right] = 1. \quad (4.91)$$

Charge du neutron=0 :

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(d - \bar{d}) - \frac{1}{3}(u - \bar{u}) \right] = 0, \quad (4.92)$$

d'où l'on déduit que

$$\int_0^1 dx (u - \bar{u}) = 2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 dx (d - \bar{d}) = 1. \quad (4.93)$$

Notons que la contrainte liée au nombre quantique d'isospin d'écrit, pour le proton (ou neutron : dans ce cas u et d sont échangés, en même temps que le signe de I_3) :

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 dx [(u - \bar{u}) - (d - \bar{d})] = \frac{1}{2}, \quad (4.94)$$

tandis que le fait que les nombres baryoniques du proton et du neutron soient égaux à 1 se traduit par

$$B = \frac{1}{3} \int [u - \bar{u} + d - \bar{d} + s - \bar{s}] = 1. \quad (4.95)$$

Bien entendu, l'ensemble des trois contraintes (4.94), (4.90) et (4.95) ou (4.91), (4.90) et (4.92) conduit aux contraintes (4.93) et (4.90), à cause de la relation de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad \text{avec} \quad Y = B + S. \quad (4.96)$$

La mise en application du modèle partonique avec une distribution de valence accompagnée d'une distribution de la mer, que l'on peut raisonnablement supposer respecter la symétrie du groupe $SU(3)$ de saveur, peut se faire en posant

$$u = u_v + m \quad \text{et} \quad d = d_v + m \quad (4.97)$$

et

$$u_m = \bar{u}_m = d_m = \bar{d}_m = s = \bar{s} = m, \quad (4.98)$$

ce qui conduit à écrire les fonctions de structure $F_2^{(p)}$ et $F_2^{(n)}$ sous la forme

$$\frac{F_2^{(p)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} = \frac{1}{9}(4u_v + d_v) + \frac{4}{3}m \quad (4.99)$$

$$\frac{F_2^{(n)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} = \frac{1}{9}(4d_v + u_v) + \frac{4}{3}m, \quad (4.100)$$

et donc

$$\frac{1}{x_{Bj}}(F_2^{(p)} - F_2^{(n)}) = \frac{1}{3}(u_v - d_v). \quad (4.101)$$

Expérimentalement, on constate effectivement que cette différence se comporte bien comme une distribution de valence, avec une valeur moyenne de x autour de $1/3$ comme attendu.

Réécrivons le rapport $F_2^{(p)}/F_2^{(n)}$ dans ce modèle :

$$\frac{F_2^{(p)}}{F_2^{(n)}} = \frac{4u_v + d_v + 12m}{4d_v + u_v + 12m}. \quad (4.102)$$

Dans la limite où $x_{Bj} \rightarrow 0$, les contributions provenant de la mer doivent dominer, on doit avoir

$$\frac{F_2^{(p)}}{F_2^{(n)}} \xrightarrow{x_{Bj} \rightarrow 0} 1, \quad (4.103)$$

ce qui est bien vérifié expérimentalement, comme on peut le constater sur la figure 4.6. En revanche, l'hypothèse naturelle qui consisterait à supposer que $u_v \simeq 2d_v$ est trop forte, puisqu'elle conduirait à

$$\frac{F_2^{(p)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} = \frac{1}{2}u_v + \frac{4}{3}m \quad (4.104)$$

$$\frac{F_2^{(n)}(x_{Bj})}{x_{Bj}} = \frac{1}{3}u_v + \frac{4}{3}m, \quad (4.105)$$

et donc

$$\frac{F_2^{(p)}}{F_2^{(n)}} \xrightarrow{x_{Bj} \rightarrow 1} \frac{3}{2}, \quad (4.106)$$

ce qui n'est pas le cas expérimentalement, comme le montre la figure 4.6. En fait, on constate que ce rapport tend vers $1/4$, ce qui est compatible avec une hypothèse de dominance des quarks u de valence pour $x_{Bj} \simeq 1$. On peut montrer que la distribution de quark qui domine au voisinage de $x_{Bj} = 1$ doit s'annuler comme

$$q_v(x_{Bj}) \sim (1 - x_{Bj})^3. \quad (4.107)$$

La puissance 3 peut être reliée (relation de Drell-Yan-West¹⁰) au comportement de la section efficace élastique à grand Q^2 , comportement qui est régit (voir l'expression (3.84) du tenseur hadronique élastique) par le comportement à grand Q^2 de G_M , qui lui-même se comporte comme $1/Q^4$. En ce qui concerne le comportement de la distribution de valence sous-dominante (qui pourrait même avoir le même comportement selon certains modèles) au voisinage de $x_{Bj} = 1$, la situation est moins claire, d'où l'importance de disposer de mesures précises des distributions u_v et d_v . En principe, les expériences de diffusion profondément inélastique avec un neutrino ou un antineutrino permettent de mesurer séparément u et d . Mais les valeurs maximales atteintes pour x_{Bj} par cette méthode ne sont que de $x_{Bj}^{max} \simeq 0.65$ (CHORUS). Les mesures séparées de u et d ne sont possibles à grand x_{Bj} (jusqu'à .85) qu'à partir de la diffusion d'électrons sur le proton et sur le deuton. Il semble que les modèles

¹⁰Voir par exemple Close page 206.

nucléaires utilisés pour extraire la fonction de structure $F_2^{(n)}$ conduisent à une incertitude relativement importante, dans cette région des grands x_{Bj} .

Terminons cette discussion en revenant sur la conservation du tenseur d'énergie impulsion. Dans le modèle des partons, cette contrainte se réduit à une règle de somme sur l'impulsion longitudinale. En effet, puisque les quarks doivent porter une impulsion totale égale à celle du proton, nous devons avoir

$$\int_0^1 (u(x) + d(x) + s(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x) + g(x)) x dx = 1, \quad (4.108)$$

contrainte qui peut être démontrée à partir de la relation (4.82) dans le cas du modèle des partons, pour lequel la fonction coefficient pour F_2 (qui décrit le couplage des partons au photon) est simplement proportionnelle à la charge au carré des partons.

HERA a permis de mettre en évidence l'importance des corrections radiatives, en particulier dans le domaine des x_{Bj} faible pour lesquels les violations d'invariance d'échelle sont importantes (voir les figures suivantes). Il a ainsi été possible de tester avec succès les prédictions de QCD perturbatives, qui prédisent les violations d'invariance d'échelle. L'évolution avec Q^2 et x_{Bj} des distributions partoniques, basée sur les équations DGLAP, qui sont connues actuellement à l'ordre NNLO, est en très bon accord avec l'expérience.

A petit x_{Bj} , le comportement de la fonction de structure F_2 est typiquement en $1/x_{Bj}^\lambda$ avec $\lambda \simeq .3$, correspondant à une distribution des gluons en $g(x_{Bj}) \sim 1/x_{Bj}^{1+\lambda}$. Sans l'effet des corrections radiatives, cette distribution devrait être en $1/x_{Bj}$. La valeur précise de λ dépend de Q^2 (donc une explication purement à la Regge n'est pas possible) mais le fait que cette valeur soit positive est un signe d'effet de resommation du type $\sum_n (\alpha_s \ln 1/x_{Bj})^n$, ces termes étant compétitifs de ceux apparaissant dans la resommation colinéaire en $\sum_n (\alpha_s \ln Q^2)^n$. Un tel comportement est compatible à la fois avec une évolution de type groupe de renormalisation (voir partie suivante) ou avec une approche de type Regge perturbative à la BFKL.

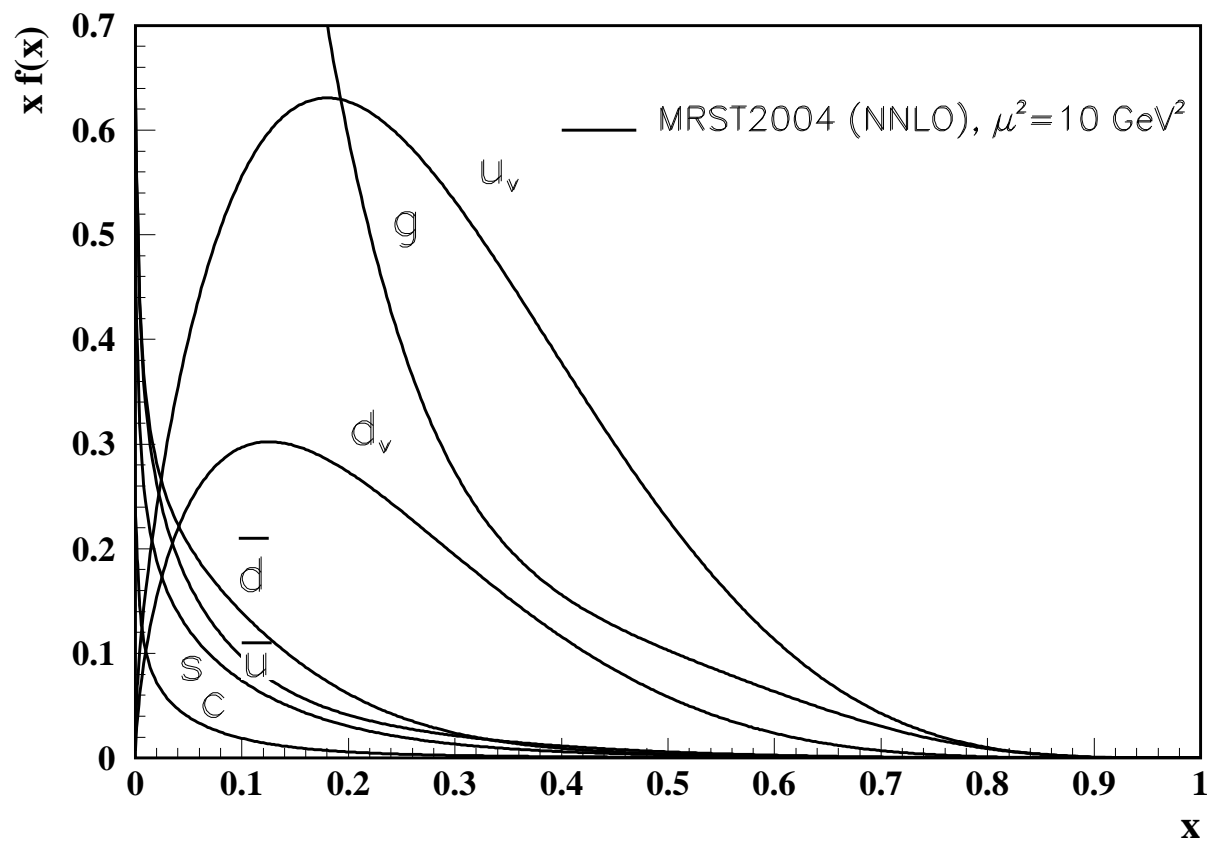


FIG. 4.7 – Distributions partoniques $x f(x)$, basées sur la paramétrisation NNLO MRST 2004, à l'échelle $\mu^2 = 10 \text{ GeV}^2$ (*PDG 2007*).

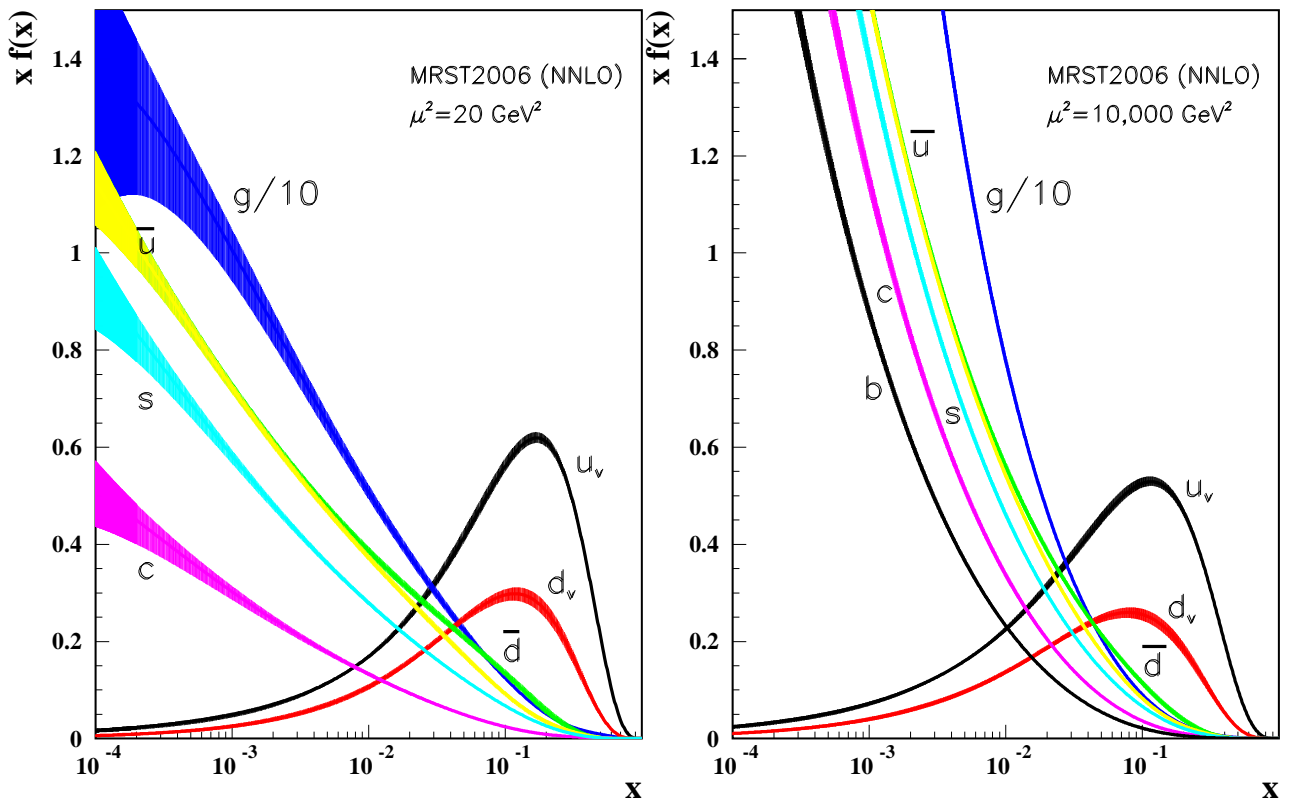


FIG. 4.8 – Distributions partoniques $x f(x)$ (u_v , d_v , \bar{u} , \bar{d} , s , c , b , g) accompagnées de leurs incertitudes respectives, basées sur la paramétrisation NNLO MRST 2006, aux échelles $\mu^2 = 20 \text{ GeV}^2$ et $\mu^2 = 10000 \text{ GeV}^2$ (*PDG 2008*).

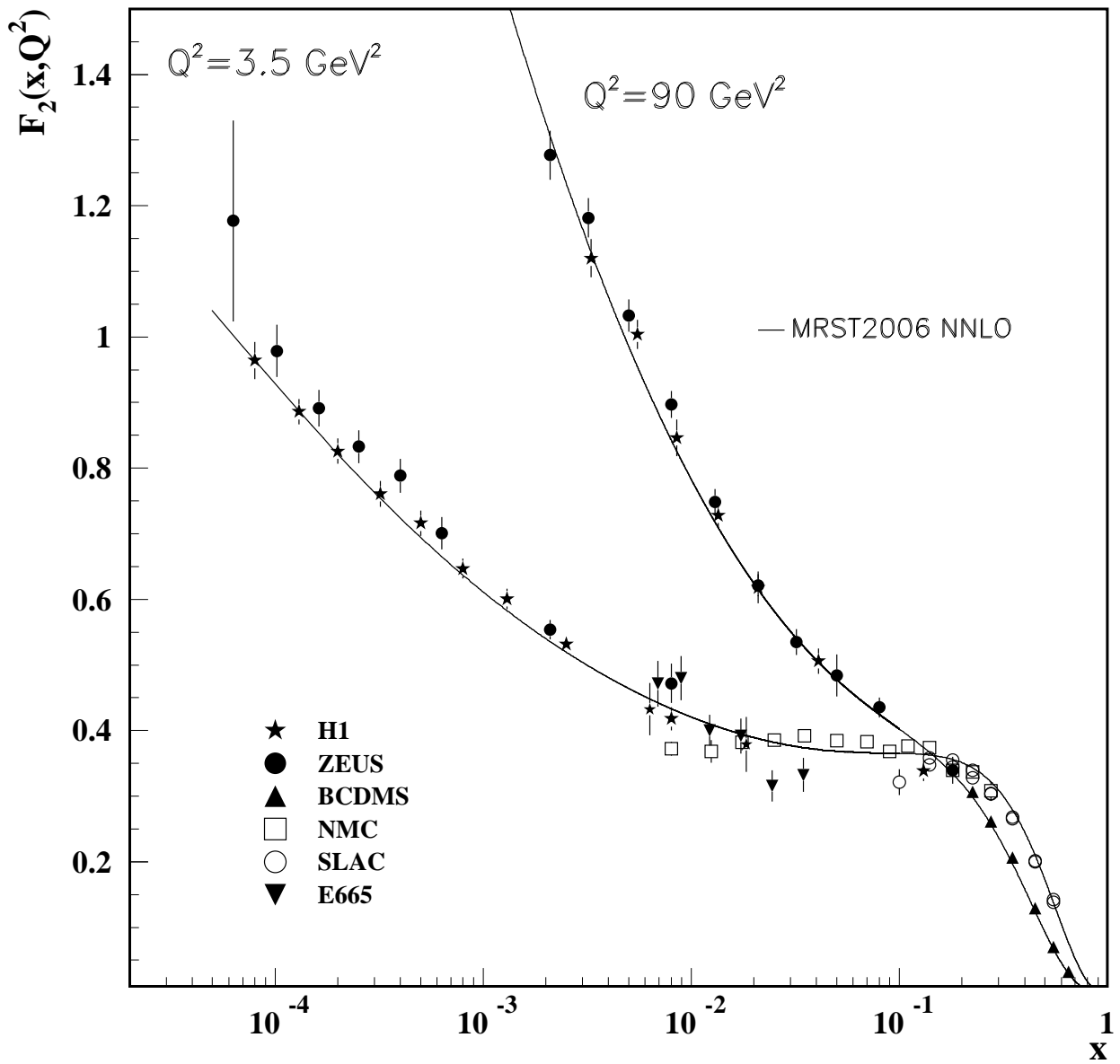


FIG. 4.9 – Données expérimentales pour F_2^p et paramétrisation NNLO MRST 2006, pour les deux valeurs de $Q^2 = 3.5 \text{ GeV}^2$ et $Q^2 = 90 \text{ GeV}^2$ (PDG 2008).

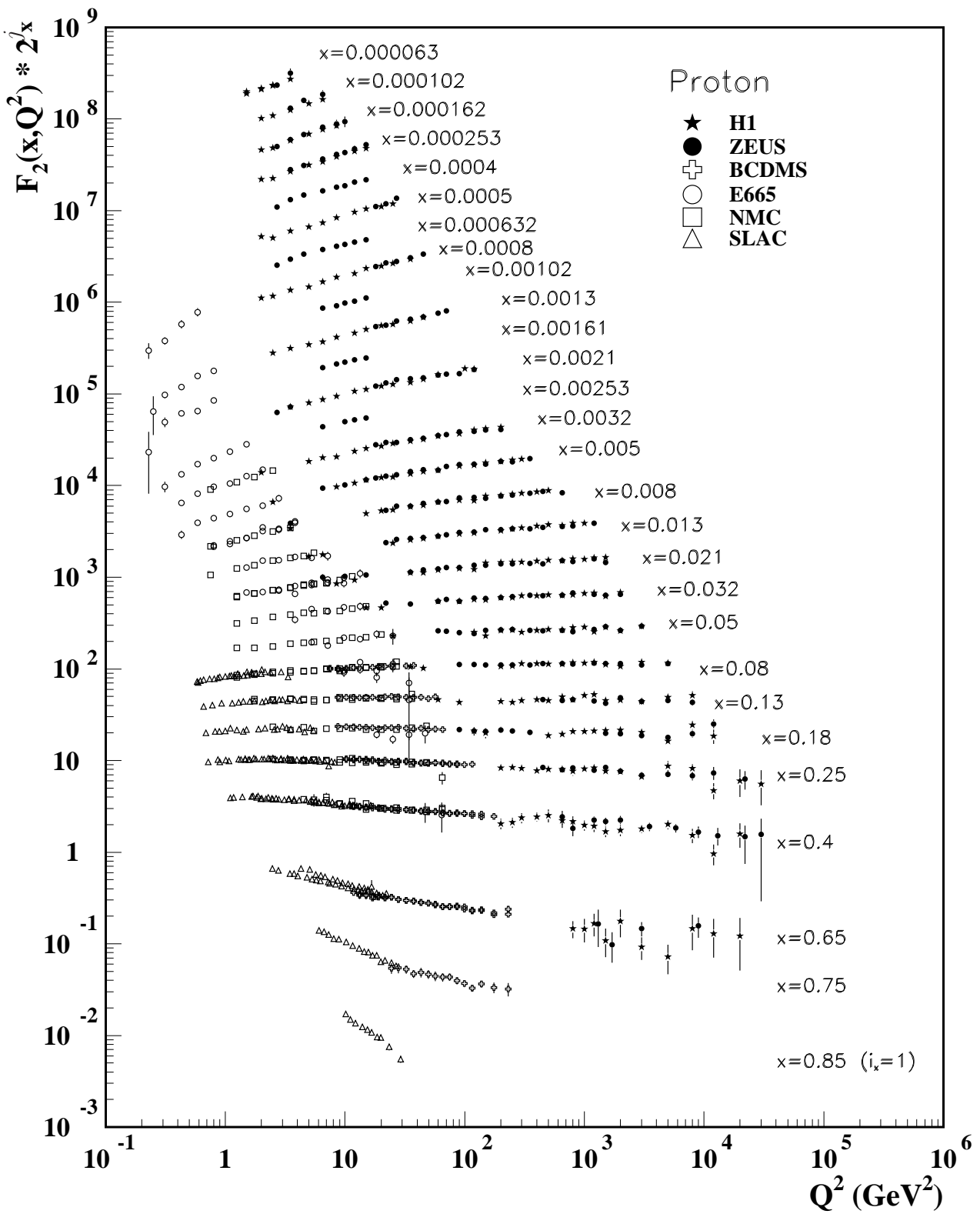


FIG. 4.10 – Données expérimentales pour F_2^p (PDG 2008).

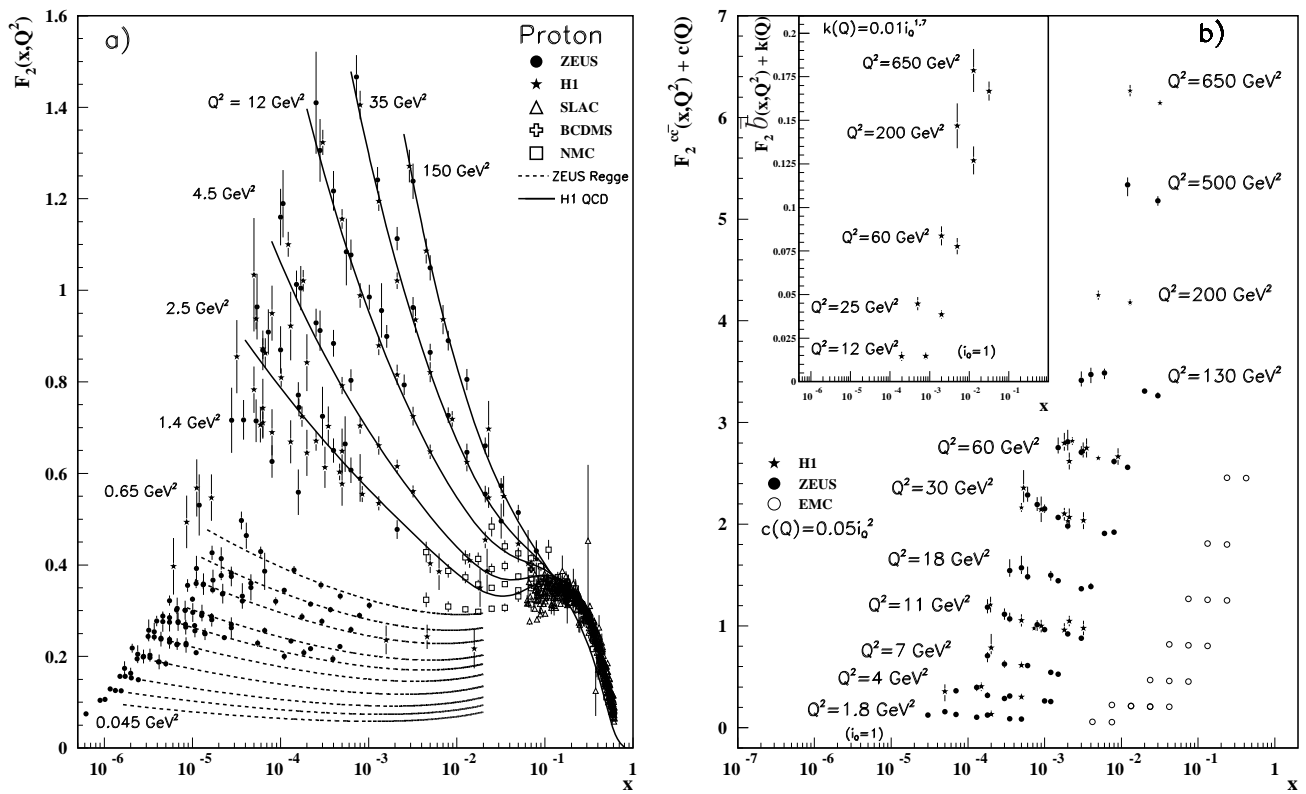


FIG. 4.11 – a) Données expérimentales pour F_2^p à x_{Bj} petit et Q^2 modéré. b) Données expérimentales pour $F_2^{c\bar{c}}$ et $F_2^{b\bar{b}}$ (PDG 2008).