

Introduction aux Théories de Jauge Non Abéliennes

et à la

Chromodynamique Quantique Perturbative

Samuel Wallon

LPT

Table des matières

1	Intégrale de chemin et méthodes fonctionnelles	1
1.1	La mécanique quantique revisitée	1
1.1.1	Amplitude de probabilité infinitésimale	1
1.1.2	Cas d'un hamiltonien quadratique en P	3
1.1.3	Cohérence de l'approche	4
1.1.4	Amplitude finie	5
1.1.5	Eléments de matrice d'opérateurs	7
1.1.6	Formule générale pour l'intégrale de chemin	8
1.1.7	Généralisation : théorème de Wick	11
1.1.8	Intégration fonctionnelle sur les fermions	13
1.2	Intégrale de chemin en théorie quantique des champs	17
1.2.1	Corrélateurs en formulation fonctionnelle	17
1.2.2	Fonctionnelle génératrice	21
1.2.3	Méthode perturbative	21
1.2.4	Théorie scalaire	22
1.2.5	Théorie fermionique et propagateur de Dirac	23
1.3	Quantification du champ électromagnétique	24
2	Théories de Yang-Mills	31
2.1	Théorie de jauge abélienne	31
2.2	Quelques éléments de théorie des groupes	34
2.2.1	Algèbre de Lie	34
2.2.2	Représentations	34
2.2.3	Compacité, simplicité et semi-simplicité	38
2.3	Théories de jauge non abéliennes	39
2.3.1	Principe de jauge et couplage matière-champ de jauge	39
2.3.2	Dynamique du champ de jauge	42
3	Quantification des théories de jauge non abéliennes	47
3.1	Terme de fixation de jauge et propagateur bosonique	47
3.2	Fantômes de Faddeev-Popov	48
4	Petit memento	53
4.1	Règles de Feynman pour QED et QCD en jauge covariante	53
4.1.1	QED	53
4.1.2	QCD	54
4.1.3	Lignes externes	56

4.2	Des amplitudes aux sections efficaces	56
4.2.1	Facteur de flux	57
4.2.2	Espace des phases	58
4.2.3	Variables de Mandelstam	60
4.2.4	Somme sur les spins	65
4.2.5	Calcul des traces : un peu de γ -gymnastique	65
4.3	Théorème optique	66
4.4	Décomposition de Fierz	67
4.5	Kaléidoscope : un peu de couleur	68
5	Représentation spectrale de Källén-Lehmann	73
5.1	Propagateur scalaire complet	73
5.1.1	Décomposition sur l'identité	73
5.1.2	Représentation en terme du propagateur de Feynman	74
5.1.3	Représentation spectrale de Källén-Lehman	75
5.2	Généralisation aux champs de spin arbitraire	77
6	Formule de réduction et corrections radiatives	79
6.1	Formule de réduction	79
6.2	Corrections radiatives et propagateur complet	81
6.3	Facteur de forme de l'électron	83
7	Renormalisation	85
7.1	Comptage de puissance	85
7.1.1	Diagrammes superficiellement divergents	85
7.1.2	Analyse des degrés de divergence	89
7.1.3	Renormalisabilité d'une théorie des champs	94
7.1.4	Renormalisation en théorie des perturbations nue	99
7.2	Théorie des perturbations renormalisée	99
7.2.1	Contre-termes	99
7.2.2	Renormalisation en théorie des perturbations renormalisée	102
7.2.3	Renormalisabilité d'une théorie quelconque	103
7.2.4	Structure des contre-termes	104
7.3	Renormalisation à une boucle de ϕ^4	105
7.3.1	calcul de δ_λ	105
7.3.2	Calcul de δ_Z et δ_m	107
7.4	Renormalisation de QED	109
7.4.1	Théorie des perturbations renormalisée	109
7.4.2	Conditions de renormalisation	111
7.4.3	Renormalisation de QED à une boucle	112
7.5	Méthodes de calcul des diagrammes en boucles	114
7.5.1	Régularisation dimensionnelle	114
7.5.2	Méthode des paramètres de Feynman	117
7.5.3	Lien entre régularisation dimensionnelle et régularisation avec coupure	119
7.6	Renormalisation de la charge électrique	122
7.6.1	Structure analytique de $\widehat{\Pi}_2$	124
7.6.2	Interprétation du couplage effectif	125

8	Fonctionnelles génératrices	131
8.1	Fonctionnelle génératrice connexe	131
8.2	Fonctionnelle génératrice propre	134
8.3	Extension au cas des fermions	140
8.4	Action effective et développement en boucles	144
8.4.1	Point selle	144
8.4.2	Ordre dominant	146
8.4.3	Corrections d'ordre \hbar	147
8.4.4	Lien avec le développement en boucle	149
9	Identités de Ward en QED	151
9.1	Les identités de Ward dans la formulation canonique	151
9.1.1	Preuve formelle	151
9.1.2	Identité de Ward pour le propagateur du photon	152
9.1.3	Self-énergie et vertex	155
9.2	Identité de Ward en formulation fonctionnelle	157
10	Renormalisation des théories de Yang-Mills	163
10.1	QCD en théorie des perturbations renormalisée	163
10.1.1	Lagrangien renormalisé	164
10.1.2	Comptage de puissance	166
11	Groupe de renormalisation et liberté asymptotique	181
11.1	Groupe de renormalisation	181

Chapitre 1

Intégrale de chemin et méthodes fonctionnelles

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord relier la mécanique quantique usuelle basée sur l'algèbre des opérateurs à l'approche de Feynman en terme d'intégrale sur des chemins classiques.

La généralisation au cas des systèmes possédant un nombre infini de degrés de liberté nous permettra alors de donner une formulation de la théorie quantique des champs en tant qu'intégrale fonctionnelle sur des champs classiques.

Nous terminerons ce chapitre par une discussion détaillée de la quantification de l'électromagnétisme dans le formalisme fonctionnel, comme préambule à la quantification des théories de jauge non-abéliennes qui sera examinée plus loin.

1.1 La mécanique quantique revisitée

1.1.1 Amplitude de probabilité infinitésimale

Considérons un système quantique (pour le moment bosonique), auquel on associe les opérateurs Q_i (coordonnées) et P_i (moment)

$$[Q_i, P_j] = i\delta_{ij} \quad [Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0$$

(en théorie des champs on aura $Q_i \rightarrow Q_a(\vec{x})$ et $P_i \rightarrow P_a(\vec{x})$ où a symbolise un indice d'espèce éventuel, ou un indice codant la représentation d'espace-temps du champ), par exemple un indice spinoriel ou vectoriel, et $\delta_{ij} \rightarrow \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}$).

Dans cette représentation de Schrödinger pour l'opérateur Q_i , on associe une base commune d'états propres $|q\rangle$, tels que

$$Q_i |q\rangle = q_i |q\rangle$$

avec

$$\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q) \quad \text{et} \quad \mathbb{1} = \int \prod_i dq_i |q\rangle \langle q|.$$

De même, on définit une base commune d'états propres $|p\rangle$ pour l'opérateur P_i , tels que

$$P_i |p\rangle = p_i |p\rangle$$

avec

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p' - p) \quad \text{et} \quad \mathbb{1} = \int \prod_i dp_i |p\rangle\langle p|.$$

La relation de commutation

$$[Q_i, P_j] = i \delta_{ij}$$

conduit alors à

$$\langle q|p\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_i p_i}.$$

Afin d'alléger les notations, on considérera dans la suite un système possédant une seule dimension d'espace, la généralisation aux systèmes à plusieurs dimensions étant immédiate.

Les opérateurs en représentation d'Heisenberg sont donnés par

$$\begin{cases} Q(t) = e^{iHt} Q e^{-iHt} \\ P(t) = e^{iHt} P e^{-iHt} \end{cases} \quad (1.1)$$

où H est l'hamiltonien complet. Les états propres de $Q_i(t)$ et $P_i(t)$ sont

$$\begin{cases} |q, t\rangle = e^{iHt} |q\rangle \\ |p, t\rangle = e^{iHt} |p\rangle \end{cases}$$

Remarque:

Il ne faut pas confondre l'état propre $|q, t\rangle$ de $Q_i(t)$ avec $|q(t)\rangle = e^{-iHt} |q\rangle$ qui représente l'évolution de l'état propre $|q\rangle$ de Q dans la représentation de Schrödinger. Dans ce dernier cas,

$$\langle q'|Q(t)|q\rangle = \langle q'(t)|Q|q(t)\rangle$$

dépend en général de t . En revanche,

$$\langle q'|Q|q\rangle = \langle q', t|Q(t)|q, t\rangle = q \delta(q - q')$$

est indépendant de t puisque Q est un opérateur sans dépendance explicite en t .

Les états ainsi définis satisfont

$$\begin{aligned} \langle q', t|q, t\rangle &= \delta(q' - q) \\ \langle p', t|p, t\rangle &= \delta(p' - p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int \prod_i dq_i |q, t\rangle\langle q, t| &= 1 \\ \int \prod_i dp_i |p, t\rangle\langle p, t| &= 1 \end{aligned}$$

avec

$$\langle q, t|p, t\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_i q_i}. \quad (1.2)$$

Supposons maintenant qu'une mesure à l'instant t montre que le système est dans l'état $|q, t\rangle$. Nous allons évaluer l'amplitude de probabilité $\langle q', t' | q, t \rangle$ pour qu'à l'instant t' il soit dans l'état $|q', t'\rangle$.

Considérons d'abord le cas d'une évolution infinitésimale, et notons $t = \tau$ et $t' = \tau + d\tau$. Alors

$$\langle q', \tau + d\tau | q, \tau \rangle = \langle q', \tau | e^{-iHd\tau} | q, \tau \rangle. \quad (1.3)$$

D'après la représentation d'Heisenberg (1.1),

$$H \equiv H(Q, P) \quad (1.4)$$

$$= e^{iHt} H(Q, P) e^{-iHt} \quad (\text{car } [H, H] = 0) \quad (1.5)$$

$$= H(Q(t), P(t)) \quad (1.6)$$

On suppose que H est écrit (parmi toutes les possibilités) de telle sorte que tous les opérateurs Q sont à **gauche** des opérateurs P .

Comme $e^{-iHd\tau} \underset{d\tau \ll 1}{\sim} 1 - iHd\tau$, on peut alors remplacer, dans le calcul de (1.3), $Q_i(t)$ et $P_i(t)$ par leurs valeurs propres q_i et p_i . En insérant l'identité, on obtient

$$\langle q', \tau + d\tau | q, \tau \rangle = \int dp \langle q', \tau | e^{-iHd\tau} | p, \tau \rangle \langle p, \tau | q, \tau \rangle \quad (1.7)$$

où

$$e^{-iHd\tau} = U(\tau, \tau + d\tau)$$

est l'opérateur d'évolution infinitésimal. D'après (1.4) et (1.2) on a donc

$$\langle q', \tau + d\tau | q, \tau \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{i(q'-q)p} (1 - iH(q', p) d\tau) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iH(q', p)d\tau + i(q'-q)p}. \quad (1.8)$$

1.1.2 Cas d'un hamiltonien quadratique en P

Supposons que H est de la forme $H = \frac{p^2}{2m} + V(Q, t)$. Alors, en réintroduisant le facteur \hbar ,

$$\begin{aligned} \langle q', \tau + \Delta\tau | q, \tau \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} \Delta\tau + \frac{i}{\hbar} (q' - q)p - \frac{i}{\hbar} V(q, t) \Delta\tau} \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-i \frac{\Delta\tau}{2m\hbar} \left[p - m \frac{(q' - q)}{\Delta\tau} \right]^2 + i \frac{m(q' - q)^2}{2\Delta\tau\hbar} - \frac{i}{\hbar} V(q, t) \Delta\tau}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Pour assurer la convergence de cette intégrale, nous allons formellement effectuer le remplacement $\Delta\tau \rightarrow \Delta\tau(1 - i\varepsilon)$ où $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

En utilisant l'intégrale gaussienne bien connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

l'amplitude de probabilité (1.9) devient

$$\langle q', \tau + \Delta\tau | q, \tau \rangle = \left(\frac{m e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\hbar 2\pi\Delta\tau} \right)^{1/2} e^{i \frac{m}{2} \frac{(q' - q)^2}{\hbar\Delta\tau} - \frac{i}{\hbar} V(q, t) \Delta\tau}. \quad (1.10)$$

En écrivant $\frac{q'-q}{\Delta\tau} \sim \dot{q}$, on a alors

$$i\frac{m}{2}\frac{(q'-q)^2}{\Delta\tau} - iV(q, t)\Delta\tau \sim iL(q, \dot{q})\Delta\tau,$$

soit

$$\langle q', \tau + \Delta\tau | q, \tau \rangle = \left(\frac{m e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\hbar 2\pi \Delta\tau} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} L(q, \dot{q})\Delta\tau}. \quad (1.11)$$

1.1.3 Cohérence de l'approche

L'approche précédente satisfait la contrainte physique

$$\langle q', \tau + \Delta\tau | q, \tau \rangle \xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} \delta(q' - q)$$

Preuve:

Dans la limite $\Delta\tau \rightarrow 0$, la relation (1.11) se réduit à

$$\langle q', \tau + \delta\tau | q, \tau \rangle \underset{\Delta\tau \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{m e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\hbar 2\pi \Delta\tau} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2} \frac{(q'-q)^2}{\hbar \Delta\tau}}.$$

Cette dernière expression tend vers $\delta(q' - q)$. Ceci se vérifie aisément en considérant la transformée de Fourier et en montrant qu'elle tend vers 1 dans la limite où $\Delta\tau \rightarrow 0$. Notons que par la méthode de la phase oscillante, si $\Delta\tau \rightarrow 0$ seul $|q' - q| \lesssim \left(\frac{\hbar \Delta\tau}{m}\right)^{1/2}$ donne une contribution non négligeable. Ce domaine correspond à l'étalement typique du mouvement brownien. La normalisation est automatiquement correcte par transformation gaussienne.

Examinons à présent à quelle condition la manipulation des opérateurs P et Q dans H est sous contrôle, et à quelle condition le remplacement de $Q(t)$ et $P(t)$ par leurs valeurs propres dans $e^{-iHd\tau}$ est licite.

Si $(q' - q) \gg \left(\frac{\hbar \Delta\tau}{m}\right)^{1/2}$, l'amplitude de probabilité oscille fortement et la contribution devient négligeable.

En partant de l'identité $e^{A+B} \sim e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$, il s'agit donc d'examiner à quelle condition la contribution du dernier facteur est négligeable. Cette identité s'écrit ici

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\Delta\tau} \sim e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta\tau} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\Delta\tau} \cdot e^{\frac{\Delta\tau^2}{2\hbar^2}\left[\frac{p^2}{2m}, V\right]}$$

De $\left[\frac{p^2}{2m}, V\right] = -\frac{\hbar}{m}(PV' + V'P)$ on tire donc la condition :

$$\frac{(\Delta\tau)^2 \hbar}{\hbar^2 m} PV' \ll \frac{V}{\hbar} \Delta\tau$$

d'où $\frac{V'}{V} \ll \frac{m}{p\Delta\tau} \sim \frac{1}{q'-q}$ qui s'écrit encore

$$|q' - q|V' \ll V.$$

Ceci est en accord avec le fait que les variations de V doivent être négligeables dans le voisinage de q et q' . Alors pendant $\Delta\tau$ le transfert d'énergie est négligeable entre énergie cinétique et potentielle.

Remarque:

La correction discutée ci-dessous est typiquement, sur le domaine $|q' - q| \sim \left(\frac{\hbar\Delta\tau}{m}\right)^{1/2}$ où l'amplitude est non négligeable, en $\frac{(\Delta\tau)^2}{m\hbar}PV' \sim \left(\frac{\Delta\tau}{m\hbar}\right)^{1/2}V'\Delta\tau$, à comparer au terme dominant en $\Delta\tau$, qui vaut $V\Delta\tau/m$.

Si la condition $\frac{V'}{V} \left(\frac{\hbar\Delta\tau}{m}\right)^{1/2} \ll 1$ est réalisée, on peut donc, dans le domaine où l'amplitude contribue, modifier V , par exemple en considérant la forme plus symétrique $\frac{1}{2}[V(q) + V(q')]$ au lieu de $V(q)$ par exemple.

Si l'on évalue $\exp[i/\hbar \int_{q(\tau)}^{q'(\tau+\Delta\tau)} dt' L(q, \dot{q})]$, d'après la discussion précédente seule la région avec un étalement en $\left(\frac{\hbar\Delta\tau}{m}\right)^{1/2}$ contribue. A des corrections en $(\Delta\tau)^{3/2}$ près, la phase de l'amplitude de transition s'obtient à partir de l'action classique

$$I_{cl.} = \int_{q(\tau)}^{q'(\tau+\Delta\tau)} dt' L(q, \dot{q})$$

obtenue en calculant l'action le long de la trajectoire classique entre (q, τ) et $(q', \tau + \Delta\tau)$. Cette trajectoire classique est très proche d'une ligne droite :

$$q(t') = \left(1 + \frac{t - t'}{\Delta\tau}\right) q + \frac{t' - t}{\Delta\tau} q'$$

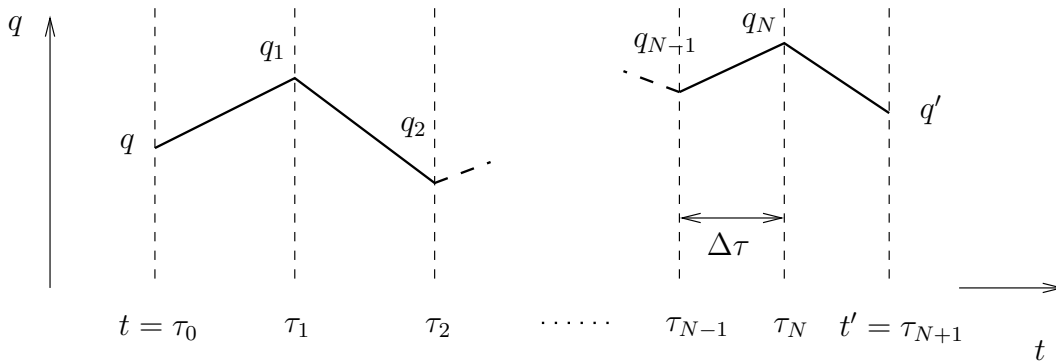
soit

$$I_{cl.} \sim \frac{m(q' - q)^2}{2\Delta\tau} - \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} dt' V[q(t')] \sim \frac{m(q' - q)^2}{2\Delta\tau} - \Delta\tau V(q)$$

qui est bien en accord avec l'expression (1.10).

1.1.4 Amplitude finie

Evaluons maintenant $\langle q', t' | q, t \rangle$ pour $t < t'$ avec $t' - t$ fini



On divise l'intervalle temporel en N intervalles :

$$\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta\tau = \frac{t' - t}{N + 1}$$

Alors

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_N \langle q', t' | q_N, \tau_N \rangle \langle q_N, \tau_N | q_{N-1}, \tau_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1, \tau_1 | q, t \rangle$$

soit

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_N \left[\frac{Nm e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\hbar 2\pi(t' - t)} \right]^{\frac{N+1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(q, \dot{q}) dt}.$$

L'action est calculée le long d'un chemin formé de lignes brisées.

Le problème du passage à la limite $N \rightarrow \infty$ est difficile¹. Nous allons supposer que la limite $N \rightarrow \infty$ n'est pas pathologique, et écrire sans plus de justification

$$\boxed{\langle q', t' | q, t \rangle = \int_{\substack{q(t)=q \\ q(t')=q'}} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt L(q, \dot{q})}} \quad (1.12)$$

La mesure d'intégration sur les chemins est notée $\mathcal{D}q$. Elle inclut le produit des facteurs de normalisation. On notera dans la suite

$$I(q', t'; q, t) = \int_t^{t'} dt L(q, \dot{q}) \quad (1.13)$$

l'action du système le long du chemin q , avec les contraintes $q(t) = q$ et $q(t') = q'$.

Remarques importantes:

- la formulation que nous avons obtenue de la mécanique quantique en terme d'intégrale de chemin satisfait au principe de superposition :

$$\int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} I(t', t)} = \int dq(t'') \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} I(t', t'')} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} I(t'', t)}$$

qui est l'analogie du principe de Huygens.

- La limite classique correspond à $\hbar \rightarrow 0$. D'après la relation (1.12), en utilisant la méthode de la phase stationnaire, on déduit que la trajectoire est donnée par celle correspondant à une action extrême (sur **toute la trajectoire** de t à t' , et non plus sur chaque trajectoire infiniment petite de τ_k à τ_{k+1}).

En particulier, si la trajectoire classique de t à t' est unique, en notant $I_{cl.}(f, i)$ l'action classique sur cette trajectoire,

$$\langle f | i \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} e^{\frac{i}{\hbar} I_{cl.}(f, i)} \quad (\text{à une normalisation près})$$

¹Mathématiquement, l'espace des fonctions $q(t)$ sur lequel on intègre est constitué des fonctions Lipschitziennes d'ordre $\frac{1}{2}$, i.e. $|q(t') - q(t)| < C|t' - t|^{1/2}$, en accord avec l'étalement typique de l'amplitude infinitésimale discutée plus haut.

La mécanique quantique correspond donc à tenir compte des fluctuations autour de la trajectoire classique.

1.1.5 Éléments de matrice d'opérateurs

Nous allons maintenant généraliser la discussion précédente au cas des éléments de matrice d'un opérateur, noté \mathcal{O} . Le passage de la représentation d'Heisenberg à la représentation de Schrödinger permet d'écrire

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{O}(t) | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(t_f-t)} \mathcal{O} e^{-iH(t-t_i)} | q_i \rangle.$$

En insérant l'identité et en utilisant la représentation (1.12) des amplitudes en termes d'intégrales de chemin, on obtient

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{O}(t) | q_i, t_i \rangle = \int dq' dq'' \int_{\substack{q(t_f)=q_f \\ q(t)=q''}}^{\substack{q(t_f)=q_f \\ q(t)=q''}} \mathcal{D}q e^{iI(q_f, t_f; q'', t)} \langle q'' | \mathcal{O} | q' \rangle \int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t)=q'}}^{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t)=q'}} \mathcal{D}q e^{iI(q', t; q_i, t_i)}.$$

Supposons pour le moment que \mathcal{O} est diagonal dans la représentation q :

$$\langle q'' | \mathcal{O} | q' \rangle = \mathcal{O}(q') \delta(q'' - q')$$

où $\mathcal{O}(q')$ est la valeur propre correspondante de \mathcal{O} . Alors

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{O}(t) | q_i, t_i \rangle = \int_{\substack{q(t_f)=q_f \\ q(t_i)=q_i}} \mathcal{D}q e^{iI(f,i)} \mathcal{O}(q(t))$$

Cette écriture est symbolique : $q(t)$ est la valeur de q sur la "tranche" t . En réalité $\mathcal{O}(q(t))$ ne dépend pas de t , sauf si l'opérateur $\mathcal{O}(t)$ a une dépendance **explicite** en t .

Plus généralement, si $t_1 \geq t_2 \geq \dots$ alors

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{O}_1(t_1) \mathcal{O}_2(t_2) \dots | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{iI(f,i)} \mathcal{O}_1[q(t_1)] \mathcal{O}_2[q(t_2)] \dots$$

Dans le membre de gauche de cette relation, l'ordonancement en t est essentiel, alors qu'il ne joue aucun rôle dans le membre de droite. D'où la généralisation :

$$\boxed{\langle q_f, t_f | T(\mathcal{O}_1(t_1) \mathcal{O}_2(t_2) \dots) | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{iI(f,i)} \mathcal{O}_1[q(t_1)] \mathcal{O}_2[q(t_2)] \dots,} \quad (1.14)$$

où T est le produit ordonné dans le temps habituel.

Remarques importantes:

- dans l'expression précédente, les \mathcal{O}_i sont des *opérateurs* alors que les $\mathcal{O}_i[q(t_i)]$ sont des *nombres*.

• insistons sur le fait que les trajectoires sur lesquelles on intègre ne satisfont pas les équations du mouvement : a priori,

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L[q, \dot{q}]}{\delta \dot{q}} - \frac{\delta L}{\delta q}[q, \dot{q}] \neq 0$$

ou de manière équivalente,

$$\dot{p}(\tau) + \frac{\delta H[q(\tau), p(\tau)]}{\delta q(\tau)} \neq 0$$

En revanche, la relation $\dot{q} = \frac{\delta H}{\delta p}$ est satisfaite dans cette formulation Lagrangienne.

Variation de l'action

On peut varier l'action de manière infinitésimale durant la dynamique entre t_i et t_f .

Exemples:

• si l'on varie le potentiel, on peut construire une fonctionnelle génératrice pour les fonctions de corrélation.

• par variation des conditions aux limites : d'après la seconde variation de l'action de la mécanique analytique qui consiste à effectuer des variations t et q de la forme $t'(t) = t + \delta t(t)$ et $q'(t') = q(t) + \delta q(t)$, on obtient pour l'action la variation correspondante $\delta I = [P \delta q - H \delta t]_{t_i}^{t_f}$, qui ne dépend que des variations aux limites.

Dans tous les cas, on obtient immédiatement

$$\delta \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} I(f, i)} \delta I(f, i) = \frac{i}{\hbar} \langle q_f, t_f | \delta I | q_i, t_i \rangle. \quad (1.15)$$

Notons que δI peut en particulier dépendre d'un temps intermédiaire t .

L'équation de Schrödinger s'obtient comme cas particulier du résultat précédent : à la variation $t_f \rightarrow t_f + \delta t_f$ correspond $\delta I = -H \delta t_f$ soit

$$\delta \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle q_f, t_f | H(t_f) | q_i, t_i \rangle \delta t_f$$

qui est bien l'équation de Schrödinger pour l'amplitude $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$:

$$i \hbar \frac{\delta}{\delta t_f} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f, t_f | H(t_f) | q_i, t_i \rangle.$$

1.1.6 Formule générale pour l'intégrale de chemin

Expression de l'amplitude

Dans le cas général où H n'est pas quadratique en p , l'intégrale

$$\langle q', \tau + \Delta\tau | q, \tau \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta\tau + i(q' - q)p}$$

n'est plus gaussienne. Partant de

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_N \langle q', t' | q_N, \tau_N \rangle \langle q_N, \tau_N | q_{N-1}, \tau_{N-1} \rangle \\ &\quad \cdots \langle q_1, \tau_1 | q, t \rangle \end{aligned}$$

on a, d'après l'expression (1.8),

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N dq_k \prod_{k=0}^N \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} (q_k - q_{k-1}) p_{k-1} - H(q_k, p_{k-1}) \Delta\tau}$$

où $q_0 \equiv q$ et $q_N \equiv q'$. On introduit maintenant des fonctions $q(\tau)$ et $p(\tau)$ qui interpolent les points q_k et p_k , avec pour contraintes $q(\tau_k) = q_k$ et $p(\tau_k) = p_k$, d'où l'écriture formelle :

$$\boxed{\langle q', t' | q, t \rangle = \int_{\substack{q(t)=q \\ q(t')=q'}} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [\dot{q}(\tau)p(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))] d\tau}} \quad (1.16)$$

avec

$$\mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N dq_k \quad \text{et} \quad \mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^N \frac{dp_k}{2\pi\hbar}.$$

Notons que dans cette formulation, aucune des équations d'Hamilton n'est satisfaite : a priori,

$$\begin{cases} \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \neq 0 \\ \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \neq 0 \end{cases}$$

Eléments de matrice

On écrit $\mathcal{O}(P(t), Q(t))$ avec les opérateurs P à gauche et Q à droite (convention contraire à celle utilisée pour H). Alors

$$\begin{aligned} &\langle q', \tau + d\tau | \mathcal{O}(P(t), Q(t)) | q, \tau \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \langle q', \tau | e^{-iH(Q(\tau), P(\tau))d\tau} | p, \tau \rangle \langle p, \tau | \mathcal{O}(P(\tau), Q(\tau)) | q, \tau \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iH(q', p)d\tau + i(q' - q)p} \mathcal{O}(p, q). \end{aligned}$$

La dernière écriture est rendue nécessaire par le fait que \mathcal{O} n'est pas a priori diagonal en q . Il suffit maintenant d'écrire, en supposant $t' > \tau_{k+1} > t_1 > \tau_k > t$,

$$\begin{aligned} &\langle q', t' | \mathcal{O}(P(t_1), Q(t_1)) | q, t \rangle \\ &= \int dq_{k+1} dq_k \langle q', t' | q_{k+1}, \tau_{k+1} \rangle \langle q_{k+1}, \tau_{k+1} | \mathcal{O}(P(t_1), Q(t_1)) | q_k, \tau_k \rangle \langle q_k, \tau_k | q, t \rangle \end{aligned}$$

et d'utiliser le résultat précédent, combiné avec l'expression des amplitudes de probabilité (1.16) pour obtenir :

$$\langle q', t' | \mathcal{O}(P(t_1), Q(t_1)) | q, t \rangle = \int_{\substack{q(t)=q \\ q(t')=q'}} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [\dot{q}p - H(q, p)] d\tau} \mathcal{O}(p(t_1), q(t_1))$$

et plus généralement

$$\langle q', t' | T \mathcal{O}_1(t_1) \mathcal{O}_2(t_2) \cdots | q, t \rangle = \int_{\substack{q(t)=q \\ q(t')=q'}} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [\dot{q}p - H(q, p)] d\tau} \mathcal{O}_1(t_1) \mathcal{O}_2(t_2) \cdots \quad (1.17)$$

Nous avons formulé l'intégrale dans le cas le plus général. Il est instructif de retrouver la formulation lagrangienne dans le cas d'un hamiltonien quadratique en P , avec un oeil éclairé. Considérons donc un hamiltonien de la forme

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + pF(q) + V(q). \quad (1.18)$$

Rappelons qu'a priori l'équation $\dot{q} = \frac{\delta H}{\delta p}$ (où p est l'inconnue) n'est pas satisfaite. Notons \bar{p} la solution de cette équation. Dans le cas de notre exemple, $\frac{\delta H}{\delta p} = \frac{p}{m} + F(q)$ donc $\dot{q} = \frac{\bar{p}}{m} + F(q)$ soit $\bar{p} = m(\dot{q} - F(q))$.

Calculons de façon pédestre l'intégrale de chemin. En partant de la formulation de l'amplitude de probabilité en terme d'intégrale de chemin, en complétant le carré par rapport à chaque p_k intermédiaire et en intégrant chaque gaussienne correspondante, on obtient

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N dq_k \prod_{k=0}^N \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \\ &\times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ (q_k - q_{k-1}) p_{k-1} + \left[-\frac{1}{2} \frac{p_{k-1}^2}{m} - p_{k-1} F(q_k) - V(q_k) \right] \Delta\tau \right\}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N dq_k \left(\frac{m e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\hbar 2\pi \Delta\tau} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2} (\dot{q}_k - F(q_k))^2 - V(q_k) \right] \Delta\tau} \end{aligned}$$

Or $\bar{p}_{k-1} = m(\dot{q}_k - F(q_k))$ donc

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &\equiv \bar{p}\dot{q} - H(q, \bar{p}) \\ &= m\dot{q}(\dot{q} - F(q)) - \frac{1}{2}m(\dot{q} - F(q))^2 - m(\dot{q} - F(q))F(q) - V(q) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{q} - F(q))^2 - V(q) \end{aligned}$$

soit $L(q_k, \dot{q}_k) = \frac{1}{2}m(\dot{q}_k - F(q_k))^2 - V(q_k)$. On retrouve donc bien la relation

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int_{\substack{q(t)=q \\ q(t')=q'}} \mathcal{D}q e^{i \int L(q, \dot{q}) dt}.$$

Ce n'est pas miraculeux : lorsque l'on calcule une intégrale gaussienne, on change de variable pour intégrer autour du point selle de l'intégrand. Le résultat de l'intégrale, au préfacteur près, est égal à l'exponentielle de l'intégrand calculé au point selle. Ici, en chaque τ_k intermédiaire, le point selle de $p\dot{q} - H(q, p)$ est donné par

$$\frac{\delta}{\delta p} [p\dot{q} - H(q, p)] = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{q} = \frac{\delta H}{\delta p}$$

dont la solution en tant qu'équation pour l'inconnue p est par définition l'impulsion canonique \bar{p} . La valeur de l'intégrand en ce point est

$$[p\dot{q} - H(q, p)]_{p=\bar{p}} = \bar{p}\dot{q} - H(q, \bar{p}) \equiv L(q, \dot{q}) .$$

Notons que l'équation de point selle est à résoudre en chaque τ_k intermédiaire, ce qui permet de définir une fonction $\bar{p}(\tau)$ par interpolation des points $\bar{p}(\tau_k)$.

1.1.7 Généralisation : théorème de Wick

Dans cette partie, nous allons nous intéresser, de manière purement algébrique, au calcul d'intégrales gaussiennes (ou presque gaussiennes) à plusieurs dimensions, généralisant ainsi le type d'intégrale que nous venons de rencontrer. La justification d'un tel intérêt se trouvera naturellement donné dans la partie qui suivra.

Intégrales gaussiennes multidimensionnelles

Considérons la fonction génératrice

$$I(A, b) = \int \prod_{i=1}^n dx_i e^{-\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i} \quad (1.19)$$

où A est une matrice $n \times n$ symétrique non dégénérée et b est un vecteur à n composantes. On note λ_i les valeurs propres de A , et l'on supposera que $Re(\lambda_i) \geq 0$. Le calcul explicite de (1.19) est immédiat en généralisant la technique du point selle rappelée plus haut. Les équations de point selle s'écrivent

$$\frac{d}{dx_k} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) = 0$$

soit encore

$$\sum_{i=1}^n A_{ki} x_i = b_k$$

puisque A est symétrique.

La solution des équations de point selle est donnée par

$$\bar{x}_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} b_j .$$

On effectue donc le changement de variable $x_i = \bar{x}_i + y_i$. Alors

$$I(A, b) = e^{\sum_{i,j} \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j} \int \prod_i dy_i e^{-\sum_{i,j} \frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j}$$

Une matrice symétrique pouvant se diagonaliser par une transformation orthogonale, qui ne change pas l'élément d'intégration, on obtient finalement

$$I(A, b) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\sum_{i,j} \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j} . \quad (1.20)$$

Notons que dans l'exemple unidimensionnel examiné plus haut, A se réduisait à $\frac{1}{m}$. Si l'on pose

$$\langle x_{k_1} \cdots x_{k_\ell} \rangle = N \int \prod_i dx_i x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_\ell} e^{-\sum_{i,j} \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j}$$

en fixant $N = I(A, 0)^{-1} = (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\det A}$ pour que $\langle 1 \rangle = 1$, on peut calculer aisément cette moyenne gaussienne par **différentiation** de $I(A, b)$ par rapport au **générateur** \mathbf{b} :

$$\langle x_{k_1} \cdots x_{k_\ell} \rangle = (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\det A} \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} I(A, b) \Big|_{b=0} \quad (1.21)$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} e^{\sum_{i,j} \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j} \Big|_{b=0} . \quad (1.22)$$

$I(A, b)$ est donc une fonction génératrice des valeurs moyennes gaussiennes. De l'expression (1.21), on déduit immédiatement le théorème de Wick pour les intégrales gaussiennes :

$$\boxed{\langle x_{k_1} \cdots x_{k_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{tous les} \\ \text{appariements par} \\ \text{paires de } k_1 \cdots k_\ell}} A_{k_{p_1} k_{p_2}}^{-1} \cdots A_{k_{p_{\ell-1}} k_{p_\ell}}^{-1} \quad (\ell \text{ pair}).} \quad (1.23)$$

Les valeurs moyennes définies précédemment sont bien sûr nulles pour ℓ impair.

Développement perturbatif

Dans le cas où les intégrales à évaluer ne sont pas gaussiennes, il n'est plus possible en général de les calculer exactement. Cependant, lorsque l'exposant est voisin d'une forme quadratique, au sens où la correction est multiple d'un petit paramètre λ , il est possible de donner un *développement perturbatif* systématique par rapport à λ . Considérons donc l'intégrale générique

$$I = \int \prod_{i=1}^n dx_i e^{-\sum_{i,j} \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j - \lambda V}$$

où $V(x)$ est un polynôme en x . On tire, en développant en série par rapport à λ ,

$$I = \int \prod_{i=1}^n dx_i e^{-\sum_{i,j} \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} V^k(x)$$

qui se calcule ordre par ordre grâce au théorème de Wick.

Variables bosoniques complexes

Dans le cas où les variables sont complexes (ex. : bosons chargés), on se ramène au cas réel en posant

$$\begin{cases} z_i = \frac{x_i + iy_i}{\sqrt{2}} \\ \bar{z}_i = \frac{x_i - iy_i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Dans ces variables, $dz_i d\bar{z}_i = dx_i dy_i$, et le produit scalaire bidimensionnel s'écrit

$$(x_i, y_i) \cdot (x'_i, y'_i) = x_i x'_i + y_i y'_i = z_i \bar{z}'_i + z'_i \bar{z}_i .$$

On peut alors écrire, en supposant A hermitienne,

$$\bar{z}_i A_{ij} z_j = \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j .$$

L'intégrale générique, en introduisant des générateurs complexes, est donc (z_i et \bar{z}_i sont maintenant indépendants)

$$I(A, b, \bar{b}) = \int \prod_{i=1}^n dz_i d\bar{z}_i e^{-\sum_{i,j} \bar{z}_i A_{ij} z_j + \sum_i \bar{b}_i z_i + b_i \bar{z}_i}$$

En effectuant comme ci-dessus un changement de variable pour centrer l'intégrale sur le point selle,

$$\begin{cases} z_i = z'_i + \sum_j (A^{-1})_{ij} b_j \\ \bar{z}_i = \bar{z}'_i + \sum_j \bar{b}_j (A^{-1})_{ji} \end{cases} ,$$

on obtient, en revenant aux variables "réelles" (x'_i, y'_i) et en intégrant les gaussiennes correspondantes,

$$I(A, b, \bar{b}) = (2\pi)^n (\det A)^{-1} e^{\sum_{i,j} \bar{b}_i (A^{-1})_{ij} b_j}$$

En définissant les valeurs moyennes par

$$\langle \bar{z}_{i_1} z_{j_1} \cdots \bar{z}_{i_n} z_{j_n} \rangle \equiv (2\pi)^{-n} \det A \int \prod_{i=1}^n dz_i d\bar{z}_i \bar{z}_{i_1} z_{j_1} \cdots \bar{z}_{i_n} z_{j_n} e^{-\sum_{i,j} \bar{z}_i A_{ij} z_j} .$$

la normalisation étant choisie pour que $\langle 1 \rangle = 1$, on déduit alors le théorème de Wick pour des variables complexes :

$$\boxed{\langle \bar{z}_{i_1} z_{j_1} \cdots \bar{z}_{i_n} z_{j_n} \rangle = \sum_{\substack{\text{permutations } P \\ \text{de } \{j_1, \dots, j_n\}}} A_{j_{p_1} i_1}^{-1} A_{j_{p_2} i_2}^{-1} \cdots A_{j_{p_n} i_n}^{-1} .} \quad (1.24)$$

Pour que les valeurs moyennes ci-dessus soit non nulles, les z et \bar{z} doivent être en nombres égaux.

1.1.8 Intégration fonctionnelle sur les fermions

Variation de Grassmann

La formule de l'intégrale de chemin développée plus haut s'applique au cas des systèmes qui obéissent aux relations de **commutation**

$$[Q_i, P_j] = i \delta_{ij} \quad [Q_i Q_j] = 0 \quad [P_i, P_j] = 0 .$$

Nous allons à présent généraliser cette approche au cas où P et Q **anticommutent**. On introduit pour cela des nombres anticommutant (nombres ou variables de Grassmann), qui satisfont

$$\theta \eta = -\eta \theta .$$

Conséquences immédiates :

- $\theta^2 = 0$
- $[\theta\eta, \theta'] = \theta\eta\theta' - \theta'\theta\eta = -\theta\theta'\eta + \theta\theta'\eta = 0$

Addition et multiplication par un scalaire obéissent aux règles ordinaires. Le point essentiel nécessaire pour la généralisation de l'intégrale de chemin est de construire l'intégrale fonctionnelle sur ces variables. Considérons donc les intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta f(\theta). \quad (1.25)$$

Nous allons voir que le caractère anticommutant des variables de Grassman suffit à fixer la valeur de ces intégrales.

Tout d'abord, puisque le développement en série de $f(\theta)$ s'arrête à l'ordre 1 à cause de $\theta^2 = 0$, l'étude des intégrales (1.25) se ramène à celle des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta(A + B\theta).$$

La linéarité de l'intégration par rapport à f implique la linéarité du résultat par rapport à A et B , donc

$$\int d\theta(A + B\theta) = \alpha A + \beta B.$$

L'intégration doit être invariante lorsque l'on translate la variable d'intégration par une constante. Cette propriété est cruciale comme on l'a vu plus haut lors de l'évaluation des intégrales gaussiennes dans le cas bosonique.

On impose donc la propriété :

$$\int d\theta(A + B\theta) = \int d\theta((A + B\eta) + B\theta).$$

La linéarité du résultat par rapport à A et B impose donc qu'il s'écrive

$$\alpha A + \beta B = \alpha(A + B\eta) + \beta B,$$

d'où $\alpha = 0$. Par convention on choisit $\beta = 1$. Ainsi (Berezin 1966)

$$\boxed{\int d\theta(A + B\theta) = B.} \quad (1.26)$$

Dans le cas d'intégrations multiples, comme $\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1$, on fixe le signe arbitraire par la convention :

$$\int d\theta_2 \left[\int d\theta_1 \theta_1 \right] \theta_2 = +1$$

en suivant l'ordre des intégrations de l'intérieur vers l'extérieur de l'expression. Dans le cas du champ de Dirac, on aura à manipuler des champs complexes. Il est plus pratique de définir la conjugaison complexe dans l'ordre inverse d'écriture : $(\theta\theta')^* = \theta'^*\theta^* = -\theta^*\theta'^*$. De manière à définir l'intégration sur des variables de Grassmann complexes, on pose $\theta = \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}}$, $\theta^* = \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}}$, d'où $d\theta_1 d\theta_2 = d\theta^* d\theta$. θ et θ^* peuvent alors être traitées comme des variables grassmanniennes indépendantes.

Intégration Gaussienne

$$\begin{aligned} \int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* b \theta} &= \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* b \theta) = \int d\theta^* d\theta (1 + \theta \theta^* b) \\ &= \int d\theta^* d\theta \theta \theta^* b = b. \end{aligned}$$

Dans le cas habituel d'un nombre complexe, on aurait obtenu

$$\int d\theta d\theta^* e^{-\theta^* b \theta} = \int d\theta_1 d\theta_2 e^{-(\theta_1)^2 \frac{b}{2}} e^{-(\theta_2)^2 \frac{b}{2}} = \frac{2\pi}{b}$$

A l'ordre suivant (calcul utile pour l'évaluation des fonctions de Green),

$$\int d\theta^* d\theta \theta \theta^* e^{-\theta^* b \theta} = \int d\theta^* d\theta \theta \theta^* = 1$$

que l'on peut écrire $\frac{1}{b} \cdot b$, à comparer à $\frac{1}{b} \cdot \frac{2\pi}{b}$ dans le cas bosonique. Dans les deux cas, le facteur $1/b$ s'obtient grâce au théorème de Wick (1.24).

Intégration Gaussienne multidimensionnelle

Dans le cas général de l'intégration d'une Gaussienne de dimension n , il nous faut diagonaliser la matrice B . Notons tout d'abord que la transformation unitaire correspondante ne change pas l'élément d'intégration.

Preuve:

Soit U la transformation unitaire qui diagonalise B .

$$\begin{aligned} \theta'_i &= U_{ij} \theta_j \\ \prod_i \theta'_i &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \theta'_{i_1} \theta'_{i_2} \dots \theta'_{i_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} U_{i_1 j_1} \theta_{j_1} \dots U_{i_n j_n} \theta_{j_n}. \end{aligned}$$

En réordonnant les θ_i , on obtient

$$\prod_i \theta'_i = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} U_{i_1 j_1} \dots U_{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \theta_1 \dots \theta_n = \det U \prod_i \theta_i = \prod_i \theta_i$$

Considérons maintenant $\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i f(\theta)$. Lorsque l'on développe f , la seule contribution provient du terme proportionnel à $\prod_{i=1}^n \theta_i \prod_{i=1}^n \theta_i^*$, donc un changement de variable unitaire multiplier le résultat par $\det U \det U^*$ qui vaut 1.

Si B est une matrice $n \times n$ de valeurs propres b_i , alors

$$\begin{aligned} \int \prod_i (d\theta_i^* d\theta_i) e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} &= \int \prod_i (d\theta_i^* d\theta_i) e^{-\sum_i \theta_i^* b_i \theta_i} \\ &= \prod_i b_i = \det B \end{aligned}$$

à comparer au cas bosonique $\frac{(2\pi)^n}{\det B}$.

Le calcul des valeurs moyennes s'effectue de la même manière, et donne

$$\int \prod_i (d\theta_i^* d\theta_i) \theta_k \theta_\ell^* e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} = \det B (B^{-1})_{k\ell}. \quad (1.27)$$

Fonction génératrice

Posons

$$\langle \theta_{i_1} \theta_{j_1}^* \cdots \theta_{i_k} \theta_{j_k}^* \rangle = (\det B)^{-1} \int \prod_i (d\theta_i^* d\theta_i) \theta_{i_1} \theta_{j_1}^* \cdots \theta_{i_k} \theta_{j_k}^* e^{-\sum_{i,j} B_{ij} \theta_i^* \theta_j}, \quad (1.28)$$

la normalisation étant choisie de sorte que $\langle 1 \rangle = 1$.

Nous allons définir une fonction génératrice pour ces fonctions de corrélation. Pour cela, introduisons les variables de Grassmann η_i et η_i^* (qui jouent ici le rôle de générateurs) et posons

$$Z_G(\eta, \eta^*) = \prod_i (d\theta_i d\theta_i^*) e^{-\sum_{i,j} B_{ij} \theta_i^* \theta_j + \sum_i \eta_i^* \theta_i + \theta_i^* \eta_i}. \quad (1.29)$$

Z_G se calcule aisément en centrant l'intégration sur le point selle, suivant

$$\begin{cases} \theta_i = \theta'_i + \sum_j (B^{-1})_{ij} \eta_j \\ \theta_i^* = \theta'^*_i + \sum_j \eta_j^* (B^{-1})_{ji} \end{cases},$$

d'où l'on tire

$$\boxed{Z_G(\eta, \eta^*) = \det B e^{\sum_{i,j} \eta_i^* (B^{-1})_{ij} \eta_j}}. \quad (1.30)$$

La dérivée de $Z_G(\eta, \eta^*)$ par rapport à η s'écrit

$$\frac{\partial Z_G(\eta, \eta^*)}{\partial \eta_{jk}} = -(\det B)^{-1} \int \prod_i (d\theta_i^* d\theta_i) \theta_{jk}^* e^{-\sum_{i,j} B_{ij} \theta_i^* \theta_j + \sum_i \eta_i^* \theta_i + \theta_i^* \eta_i}. \quad (1.31)$$

On notera le signe $-$ provenant du fait que $\frac{\partial}{\partial \eta} \theta^* \eta = -\frac{\partial}{\partial \eta} \eta \theta^* = -\theta^*$. La dérivée par rapport à η^* donne alors

$$\frac{\partial^2 Z_G(\eta, \eta^*)}{\partial \eta_{ik}^* \partial \eta_{jk}} = - \int \prod_i (d\theta_i d\theta_i^*) \frac{\partial}{\partial \eta_{jk}^*} \left[\theta_{jk}^* e^{-\sum_{i,j} B_{ij} \theta_i^* \theta_j + \sum_i \eta_i^* \theta_i + \theta_i^* \eta_i} \right] \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} &= \int \prod_i (d\theta_i d\theta_i^*) \theta_{jk}^* \theta_{ik} e^{-\sum_{i,j} B_{ij} \theta_i^* \theta_j + \sum_i \eta_i^* \theta_i + \theta_i^* \eta_i} \\ &= - \int \prod_i (d\theta_i d\theta_i^*) \theta_{ik} \theta_{jk}^* e^{-\sum_{i,j} B_{ij} \theta_i^* \theta_j + \sum_i \eta_i^* \theta_i + \theta_i^* \eta_i} \end{aligned}$$

$$(1.33)$$

ce qui montre plus généralement que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \eta_j} & \text{ produit un facteur } \theta_j^* \\ +\frac{\partial}{\partial \eta_j^*} & \text{ produit un facteur } \theta_j \end{aligned} \quad (1.34)$$

ces règles devant être comprise comme produisant le facteur correspondant à *gauche* lorsque la dérivée correspondante agit sur une expression donnée. On en déduit donc la relation cherchée :

$$\langle \theta_{i_1} \theta_{j_1}^* \cdots \theta_{i_k} \theta_{j_k}^* \rangle = \frac{1}{Z_G(0,0)} (-1)^k \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \eta_{i_k}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{j_k}} Z_G(\eta, \eta^*) \Big|_{\eta=\eta^*=0}. \quad (1.35)$$

En utilisant (1.30), on obtient donc

$$\langle \theta_{i_1} \theta_{j_1}^* \cdots \theta_{i_k} \theta_{j_k}^* \rangle = (-1)^k \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \eta_{i_k}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{j_k}} e^{\sum_{i,j} \eta_j^* (B^{-1})_{ji} \eta_i} \Big|_{\eta=\eta^*=0}, \quad (1.36)$$

d'où l'on déduit le théorème de Wick pour les fermions

$$\boxed{\langle \theta_{i_1} \theta_{j_1}^* \cdots \theta_{i_k} \theta_{j_k}^* \rangle = \sum_{\substack{\text{Permutations } P \\ \text{de } \{j_1 \cdots j_n\}}} \varepsilon(P) (B^{-1})_{j_{P_1} i_1} \cdots (B^{-1})_{j_{P_k} i_k},} \quad (1.37)$$

où $\varepsilon(P)$ est la signature de la permutation P . Notons que k et la dimension de B sont bien entendu indépendants.

1.2 Intégrale de chemin en théorie quantique des champs

1.2.1 Corrélateurs en formulation fonctionnelle

De la mécanique quantique à la théorie quantique des champs

Le passage de la mécanique quantique à la théorie quantique des champs correspond, dans la formulation basée sur l'intégrale de chemin, à remplacer les coordonnées par des champs classiques :

$$\begin{aligned} Q_i & \rightarrow \phi(\vec{x}) \\ P_i & \rightarrow \pi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Les champs et leurs impulsions portent éventuellement des indices de Lorentz pour des champs non scalaires, et des indices d'espèce. Sauf mention explicite, nous garderons les notations génériques des champs scalaires dans ce qui suit.

Ce passage peut se faire en se plaçant dans un volume fini V et en divisant l'espace en N cellules de volume $v : V = Nv$. On passe à la limite $N \rightarrow \infty$, puis à la limite $V \rightarrow \infty$. De même, on discrétise le temps, comme on l'a fait plus haut en mécanique quantique. On obtient ainsi

$$\boxed{\langle \phi_b(\vec{x}), t' | \phi_a(\vec{x}), t \rangle = \int_{\substack{\phi(\vec{x}, t) = \phi_a(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}, t') = \phi_b(\vec{x})}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi e^{i \int_t^{t'} d^4x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{H})}} \quad (1.39)$$

où \mathcal{H} est la densité hamiltonienne. Cette expression est la généralisation de (1.16) pour la théorie quantique des champs.

Quelques exemples

Dans le cas habituel où H ne dépend pas explicitement du temps,

$$\langle \phi_b(\vec{x}), t' | \phi_a(\vec{x}), t \rangle = \langle \phi_b(\vec{x}) | e^{-iH(t'-t)} | \phi_a(\vec{x}) \rangle .$$

En général \mathcal{H} sera quadratique en π , et on pourra alors se ramener à la formulation lagrangienne par intégration sur π .

Remarque:

cette intégration sur π peut parfois réserver des surprises. Considérons par exemple le cas du modèle σ non linéaire, dont le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j [\delta_{ij} + U_{ij}(\phi)] - V(\phi)$$

qui donne

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi_i \underbrace{(1 + U(\phi))_{ij}^{-1}}_{\text{dépend de } \phi} \pi_j + \frac{1}{2} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j (1 + U(\phi))_{ij} + V(\phi)$$

Dans ce cas l'intégration gaussienne sur π_i donne un préfacteur du type $(\det A)^{-1/2}$, où A est l'opérateur $A_{ij}(x, y) = [1 + U(\phi(x))]_{ij}^{-1} \delta(x - y)$. Notons que $A_{ij}(x, y)$ est à comprendre comme une matrice $A_{ix, jy}$. En notant λ_i les valeurs propres de A , $\det A = \prod_i \lambda_i = e^{\sum_i \log \lambda_i} = e^{Tr(\log B)}$ va donc donner des contributions supplémentaires au lagrangien.

Considérons à présent le cas plus simple d'un champ scalaire réel

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) .$$

On obtient alors

$$\langle \phi_b(\vec{x}), t' | \phi_a(\vec{x}), t \rangle = \int_{\substack{\phi(\vec{x}, t) = \phi_a(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}, t') = \phi_b(\vec{x})}} \mathcal{D}\phi e^{i \int_t^{t'} \mathcal{L} dt} \quad \text{où } \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) . \quad (1.40)$$

Symétries et anomalies

Dans cette formulation du corrélateur (en dehors de t et t' qui brisent l'invariance de Lorentz), l'expression obtenue est entièrement invariante de Lorentz (en pratique on fera $t \rightarrow -\infty$ et $t' \rightarrow +\infty$).

En outre, si l'action $\int_t^{t'} \mathcal{L} dt$ est invariante sous une symétrie, alors $\langle \phi_b(\vec{x}), t' | \phi_a(\vec{x}), t \rangle$ l'est aussi.

Exception notable : si le jacobien correspondant à cette transformation de symétrie n'est pas égal à 1, $\mathcal{D}\phi$ n'est pas invariant : c'est le problème des anomalies qui apparaissent au niveau quantique pour des symétries exactes au niveau classique.

Expression générale d'un corrélateur par l'intégrale de chemin

Nous pouvons maintenant établir le résultat central suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} & \langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \cdots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) e^{i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}}} \quad (\text{par intégrale de chemin}). \end{aligned}} \quad (1.41)$$

où Ω est le vide physique, i.e. le fondamental de l'hamiltonien complet H . Cette formule est le point de départ de la théorie des perturbations dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle. Il suffit en effet d'écrire

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V(\phi)$$

où V est un polynôme en ϕ , dont les coefficients sont paramétriquement petits, et de développer en puissance de V jusqu'à l'ordre souhaité.

Cette relation est à mettre en parallèle avec la relation

$$\boxed{\begin{aligned} & \langle \Omega | T \phi_H(x_1) \cdots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T (\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n)) e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} | 0 \rangle} \quad (\text{formulation canonique}), \end{aligned}} \quad (1.42)$$

qui est le point de départ de la théorie des perturbations dans la formulation canonique.

Dans l'expression (1.41), le membre de droite ne fait apparaître que des champs **classiques** $\phi(x)$. En revanche le membre de droite de l'expression (1.42) fait intervenir les **opérateurs** $\phi_I(x)$ de la représentation d'interaction, et le vide $|0\rangle$ de l'hamiltonien non perturbé H_0 . Rappelons que les champs ϕ_I sont définis par

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi_H(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (1.43)$$

Ce sont des champs qui ont une expression identique à celle de champs libres en (t, \vec{x}) , ce qui fait tout leur intérêt, en particulier pour les calculs perturbatifs.

Preuve de (1.41) :

Il suffit d'adapter la relation établie dans la formulation par l'intégrale de chemin de la mécanique quantique. De la relation (1.14) on tire

$$\langle q_b, t' | T(Q_{i_1}(t_1) \cdots Q_{i_n}(t_n)) | q_a, t \rangle = \int_{\substack{q(t')=q_b \\ q(t)=q_a}} \mathcal{D}q e^{i \int_t^{t'} L dt} q_{i_1}(t_1) \cdots q_{i_n}(t_n)$$

qui se traduit en théorie quantique des champs par la relation

$$\langle \phi_b(\vec{x}), t' | T(\phi_H(x_1) \cdots \phi_H(x_n)) | \phi_a(\vec{x}), t \rangle = \int_{\substack{\phi(t, \vec{x}) = \phi_a(\vec{x}) \\ \phi(t', \vec{x}) = \phi_b(\vec{x})}} \mathcal{D}\phi e^{i \int_t^{t'} \mathcal{L} d^4x} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)$$

avec $x_k = (t_k, \vec{x}_k)$. Il nous reste à faire apparaître le vide physique $|\Omega\rangle$. En développant sur les états propres $|n\rangle$ de H , d'énergies E_n , on obtient

$$\begin{aligned} |\phi_a(\vec{x}), t \rangle &= e^{iHt} |\phi_a(\vec{x})\rangle = e^{iHt} \sum_n |n\rangle \langle n | \phi_a(\vec{x}) \rangle \\ &= \sum_n e^{iE_n t} |n\rangle \langle n | \phi_a(\vec{x}) \rangle. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} t = -T \\ t' = T \end{cases}$$

avec $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$. Alors

$$e^{iE_n t} \rightarrow e^{-iE_n \infty(1-i\varepsilon)} \sim e^{-iE_n \infty} e^{E_0 \varepsilon \infty} e^{-(E_n - E_0) \varepsilon \infty}$$

où E_0 est l'énergie du vide $|\Omega\rangle$. Le dernier facteur est un terme d'amortissement exponentiel pour $E_n > E_0$. En résumé, on peut donc écrire :

$$|\phi_a(\vec{x}), -T \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle \Omega | \phi_a(\vec{x}) \rangle e^{-iE_0 \infty(1-i\varepsilon)} |\Omega\rangle.$$

De même

$$\langle \phi_b(\vec{x}), T | \xrightarrow{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle \phi_b(\vec{x}) | \Omega \rangle e^{-iE_0 \infty(1-i\varepsilon)} \langle \Omega |.$$

En divisant par $\langle \phi_b(\vec{x}), t' | \phi_a(\vec{x}), t \rangle$, on se débarrasse de ces termes. Or ce corrélateur s'écrit encore, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} \langle \phi_b(\vec{x}), t' | \phi_a(\vec{x}), t \rangle &= \langle \Omega | \phi_a(\vec{x}) \rangle \langle \phi_b(\vec{x}) | \Omega \rangle \langle \Omega | \Omega \rangle e^{-2iE_0 \infty(1-i\varepsilon)} \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{-T}^T \mathcal{L} d^4x}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

ce qui achève la preuve, puisque $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$.

Remarque:

Dans le membre de droite de l'expression (1.41), la contrainte sur l'intégrale sur ϕ a disparu puisque quels que soient $|\phi_a(\vec{x})\rangle$ et $\langle \phi_b(\vec{x})|$, tout se passe comme si l'on avait considéré $|\Omega\rangle$ et $\langle \Omega|$, à une phase (horrible!) près qui disparaît entre numérateur et dénominateur de (1.41).

1.2.2 Fonctionnelle génératrice

Nous sommes maintenant (presque) prêts à calculer les fonctions de corrélation en théorie de perturbation, et en particulier à formuler les règles de Feynman.

Il nous reste avant cela à adapter la machinerie de l'intégrale gaussienne dans le cas des champs, i.e. à définir l'analogue de $I(A, b, \bar{b})$ et $Z_G(\eta, \bar{\eta})$ que nous avons définies plus haut (voir (1.19) et (1.19)) pour la mécanique quantique. On parlera alors de **fonctionnelle génératrice**. Cette terminologie est liée au fait que les fonctions de corrélation seront obtenues par dérivation par rapport à une fonction courant $J(x)$ (et non plus par rapport à un paramètre, qu'il soit bosonique ou fermionique) d'une fonctionnelle de ce courant. La notion de dérivée fonctionnelle, habituelle en théorie classique des champs (exemple : équation d'Euler-Lagrange), est basée sur les relations

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^4(x - y) \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4x J(y) \phi(y) = \phi(x)$$

dont on déduit, par exemple l'identité

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y \partial_\mu J(y) V^\mu(y) = -\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y) \partial_\mu V^\mu(y)$$

par intégration par partie. En posant, de manière analogue à (1.19),

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J(x)\phi(x))} \quad \uparrow_{\text{source}}$$

on déduit immédiatement que

$$\boxed{\langle \Omega | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \cdots \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}} \quad (1.45)$$

Le facteur $Z_0 = Z[J = 0]$ est proportionnel aux contributions vide-vide. On peut montrer que ces contributions se compensent exactement entre numérateur et dénominateur de (1.45).

Nous allons à présent examiner en détails quelques théories des champs typiques rencontrées en physique subatomique.

1.2.3 Méthode perturbative

L'approche perturbative est basée sur la décomposition

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}. \quad (1.46)$$

Dans cette décomposition, \mathcal{L}_0 est quadratique en ϕ et \mathcal{L}_{int} est un polynôme en ϕ . La fonctionnelle libre

$$Z_{libre}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x)]}$$

peut donc être calculée exactement.

En effectuant le développement en série de $e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}}$, on constate que le calcul des corrélateurs (1.45) s'exprime perturbativement à l'aide des dérivées fonctionnelles de la fonctionnelle génératrice libre $Z_{libre}[J]$ en 0, c'est-à-dire en terme des corrélateurs de la théorie libre. Les dérivées de $Z_{libre}[J]$ se calculent elles-même aisément à l'aide du théorème de Wick (1.23).

1.2.4 Théorie scalaire

Dans le cas d'une théorie scalaire libre de type Klein-Gordon,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \quad \text{avec} \quad V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

i.e.

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \phi (-\partial^2 - m^2) \phi.$$

Nous devons donc calculer

$$Z_{\text{libre}}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon) \phi + J\phi \right]}$$

Le terme $i\varepsilon$ est introduit pour assurer la convergence de l'intégrale sur ϕ . La fonctionnelle génératrice libre peut s'écrire sous la forme gaussienne

$$Z_{\text{libre}}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi [-i(-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon)] \phi - iJ\phi \right]},$$

ce qui permet, en identifiant $A = -i(-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon)$ et $b = iJ$, et en utilisant nos résultats sur l'intégration gaussienne, d'obtenir

$$\boxed{Z_{\text{libre}}[J] = Z_0 e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)} \quad \text{avec} \quad D_F(x-y) \equiv A^{-1}(x,y) = \frac{i}{-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon}} \quad (1.47)$$

C'est le propagateur de Feynman, avec la prescription $+i\varepsilon$, en accord avec la formulation canonique de la théorie des champs.

Les notations précédentes peuvent paraître obscures, et méritent d'être précisées. En écrivant l'action de A sous la forme

$$\phi(x) [-i(-\partial_x^2 - m^2 + i\varepsilon)] \phi(x) = \phi(x) [-i(-\partial_x^2 - m^2 + i\varepsilon) \delta^4(x-y)] \phi(y)$$

on peut identifier dans le membre de droite le terme entre crochets avec $A_{x,y}$. Ainsi l'inverse $A^{-1}(x,y)$ satisfait par définition l'équation

$$-i(-\partial_x^2 - m^2 + i\varepsilon) \delta^4(x-x') A^{-1}(x',y) = \delta^4(x-y)$$

où le membre de droite est à comprendre matriciellement comme $\mathbb{1}_{x,y}$. On en déduit donc que $-i(-\partial_x^2 - m^2 + i\varepsilon) A^{-1}(x,y) = \delta^4(x-y)$, ce qui définit bien le propagateur de Feynman $D_F(x-y)$.

On obtient ainsi, par application immédiate du théorème de Wick, la fonction de corrélation à deux points

$$\begin{aligned} &< \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega > \\ &= \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)} \\ &= D_F(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

On notera la présence du facteur combinatoire $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, le 2 provenant des deux possibilités d'action des dérivées fonctionnelles ($x_1 = x, x_2 = y$) et ($x_1 = y, x_2 = x$).

Lorsque l'on utilise le théorème de Wick, chaque appariement entre champs fait apparaître un propagateur. En pratique, il est plus aisé de traduire le thorem de Wick sous forme de règles dites de Feynman. Examinons le cas de la théorie ϕ^4 , dont le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

Le développement perturbatif correspondant s'écrit

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left(1 - i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \dots \right)$$

D'après le théorème de Wick démontré plus haut, il faut examiner, pour une corrélation $\langle \Omega | T \phi_1 \dots \phi_n | \Omega \rangle$ calculée à un ordre λ^k donné, toutes les contractions des $\phi_1 \dots \phi_n$ avec chaque terme $-i \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x)$. Pour un choix donné des 4 champs à contracter avec $\phi^4(x)$, il y a $4!$ possibilités de le faire.

On en déduit que le vertex correspondant au terme de couplage est $-i\lambda$.

1.2.5 Théorie fermionique et propagateur de Dirac

La généralisation au cas des champs fermionique s'effectue en utilisant la technique des intégrales gaussiennes sur des variables grassmaniennes développée plus haut et en passant des fonctions aux fonctionnelles génératrices. On définit donc la fonctionnelle

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \bar{\psi}(i\partial - m + i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta} \quad (1.48)$$

Le facteur $i\varepsilon$ est introduit comme plus haut afin d'assurer la convergence.

Remarque:

On sait bien, dans la théorie de Dirac, que $\bar{\psi}$ n'est pas le complexe conjugué de ψ : $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$. Cela ne change cependant rien d'intégrer sur ψ^+ ou sur $\bar{\psi}$, puisque la mesure est la même.

Dans le cas général, par extension immédiate au cas fonctionnel des règles (1.34) avec le remplacement

$$\left| \begin{array}{l} \eta \rightarrow i\eta \\ \eta^* \rightarrow i\bar{\eta} \end{array} \right.,$$

on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} & \langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_n) | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{Z[0, 0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta \eta(y_1)} \right) \dots \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_n)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta \eta(y_n)} \right) Z[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}. \end{aligned}} \quad (1.49)$$

Dans le cas où $n > 1$, ces corrélateurs seront disconnectés pour la théorie libre correspondant à la fonctionnelle (1.48). Dans une théorie avec des fermions en interactions, des connections peuvent apparaître par l'intermédiaire des vextex.

Le calcul explicite de la fonctionnelle $Z[\eta, \bar{\eta}]$ est immédiat par intégration gaussienne et donne

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = Z_0 e^{-\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)} \quad (1.50)$$

avec

$$S_F(x_1 - x_2) = \frac{i}{i\partial - m + i\varepsilon}. \quad (1.51)$$

En particulier, on déduit de (1.49) que

$$\boxed{\langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | \Omega \rangle = S_F(x_1 - x_2) = \frac{i}{i\partial - m + i\varepsilon}.} \quad (1.52)$$

1.3 Quantification du champ électromagnétique

Le lagrangien du champ électromagnétique libre s'écrit

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2.$$

Considérons l'intégrale fonctionnelle

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]}. \quad (1.53)$$

avec

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu})^2 = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x),$$

qui s'écrit encore, par transformée de Fourier,

$$S[A] = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(k).$$

Si l'on suit la procédure d'intégration gaussienne développée plus haut, il nous faut inverser l'opérateur $\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu$, ce qui est impossible sous cette forme. En effet,

$$[\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] \partial_\mu \alpha(x) = 0, \quad \forall \alpha(x)$$

ce qui montre que $\partial_\mu \alpha(x)$ appartient au noyau de cet opérateur, qui n'a donc pas d'inverse. Ceci est directement lié à l'invariance de jauge de S sous les transformations de jauge

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).$$

En effet, celles-ci ne modifient pas $F_{\mu\nu}$ et laissent donc \mathcal{L} et S invariant.

$\partial_\mu \alpha(x)$ est appelé champ de pure jauge, au sens où il peut être ramené à 0 par transformation de jauge. En passant à l'image de Fourier, on obtient le point de vue équivalent

$$[-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] k_\mu \alpha(k) = 0, \quad \forall \alpha(k).$$

En terme d'intégration fonctionnelle, l'impossibilité de donner un sens à (1.53) est due au fait que l'on ne doit pas intégrer sur toutes les configurations A : on a intégré ici sur des configurations équivalentes de jauge, et le fait d'avoir pris un espace de phase trop grand fait diverger l'intégrale fonctionnelle. Il faudrait donc n'intégrer que sur les représentants des configurations distinctes physiquement : c'est l'idée mise en oeuvre par Faddeev et Popov (1967).

Fixons la jauge par une condition du type G , i.e. imposons

$$G(A) = 0 \quad (\text{i.e. } \forall x, G(A(x)) = 0),$$

où G est une fonction.

Exemple : jauge covariante $G(A) = \partial_\mu A^\mu$.

L'idée est maintenant d'insérer $\delta(G(A))$ dans l'intégrale fonctionnelle, en partant de l'identité

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det \left[\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right] \quad (1.54)$$

avec $A_\mu^\alpha(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$.

Preuve:

La relation précédente est l'analogue fonctionnel de

$$1 = \int \prod_k da_k \delta^{(n)}(\vec{g}(\vec{a})) \det \left[\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right] \quad (1.55)$$

où \vec{g} et \vec{a} sont des vecteurs à n dimensions. Justifions cette identité (1.55). A une dimension, on a la relation

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad \text{avec } x_i \text{ solution de } f(x_i) = 0.$$

Dans la relation (1.55), on suppose que l'équation $\vec{g}(\vec{a}) = 0$ possède une solution unique \vec{a}_0 . La généralisation à partir de

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$$

est alors immédiate en choisissant une base pour que $\frac{\partial g_i}{\partial a_j}$ soit diagonale.

Dans la jauge de Lorentz, $G(A^\alpha) = \partial^\mu A_\mu + \frac{1}{e} \partial^2 \alpha$ donc

$$\det \left[\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right] = \det \left[\frac{\partial^2}{e} \right]$$

qui est **indépendant** de A . Ce déterminant ne joue donc pas de rôle dans l'intégrale fonctionnelle. Dans les théories de jauge non abéliennes, cette propriété ne sera pas satisfaite en

général (sauf pour les jauges dites physiques, non covariantes). Ce point sera discuté en détail dans le chapitre 3.

Nous pouvons à présent réécrire l'intégrale fonctionnelle sous la forme

$$\det \left[\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right] \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A^\alpha)).$$

Effectuons maintenant le changement de variable $A \rightarrow A^\alpha$. Cela ne change pas l'élément d'intégration : $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\alpha$. L'invariance de jauge implique $S[A] = S[A^\alpha]$. Finalement on a donc

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det \left[\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right] \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A)).$$

Le facteur $\int \mathcal{D}\alpha$ est infini mais n'a pas de conséquence physique. Le dernier facteur est maintenant fini : à présent on intègre uniquement sur les configurations physiquement équivalentes.

Nous sommes à mi-chemin : il nous reste à interpréter le terme $\delta(G(A))$ comme une contribution à $S[A]$. L'idée est de l'exponentier comme un terme gaussien, en introduisant une fonction auxiliaire $\omega(x)$: au lieu de $G(A) = \partial^\mu A_\mu(x)$, on considère $G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)$. Alors

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det \left[\frac{1}{e} \partial^2 \right] \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x))$$

Cette identité est indépendante du choix de ω . On peut donc intégrer sur ω (avec un poids gaussien) !

Remarque:

L'identité

$$\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} = \frac{\partial^2}{e}$$

n'est pas modifiée par cette fonction auxiliaire ω .

On a alors

$$\begin{aligned} & N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \det \left[\frac{\partial^2}{e} \right] \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)) \\ &= N(\xi) \det \left[\frac{\partial^2}{e} \right] \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} e^{-i \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2} \\ &= N(\xi) \det \left[\frac{\partial^2}{e} \right] \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Si l'on considère à présent un opérateur $\mathcal{O}(A)$ invariant de jauge, on pourra donc écrire, en

utilisant toute la construction qui précède :

$$\boxed{\langle \Omega | T \mathcal{O}(A) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) e^{i \int_{-T}^T d^4x \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right]}}{\int \mathcal{D}A e^{i \int_{-T}^T d^4x \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right]}}} \quad (1.56)}$$

En particulier, dans le cas où $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$, l'intégration, gaussienne en A , est maintenant possible, et permet d'obtenir l'expression de la fonction de corrélation libre à deux points. L'action libre

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x)$$

est remplacée par

$$S_\xi = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \right) A_\nu(x)$$

après intégration par partie, et l'équation

$$\left[-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu \right] \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu^\rho \quad (1.57)$$

a pour solution

$$\boxed{\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)} \quad (1.58)$$

Il est d'usage d'appeler jauge de Landau le cas $\xi = 0$ et jauge de Feynman le cas $\xi = 1$.

Preuve:

Pour obtenir la solution il suffit d'introduire le projecteur transverse

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

et le projecteur longitudinal

$$L_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

On vérifie que

$$T_{\mu\nu} k^\nu = 0, \quad L_{\mu\nu} k^\nu = k^\mu$$

et que

$$T_{\mu\nu} T^{\nu\nu'} = T_\mu^{\nu'} \quad \text{et} \quad L_{\mu\nu} L^{\nu\nu'} = L_\mu^{\nu'},$$

ce qui justifie les noms donnés à $T_{\mu\nu}$ et $L_{\mu\nu}$. Enfin, ces deux projecteurs fournissent une décomposition complète de l'identité : $T_{\mu\nu} + L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

L'équation à résoudre

$$\left[-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu \right] \tilde{D}_F^{\nu\rho} = i\delta_\mu^\rho$$

s'écrit donc encore

$$-k^2 \left[\underbrace{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}_{T_{\mu\nu}} + \frac{1}{\xi} \underbrace{\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}_{L_{\mu\nu}} \right] \tilde{D}_F^{\nu\rho} = i\delta_\mu^\rho,$$

soit

$$\left(T_{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} L_{\mu\nu} \right) \tilde{D}_F^{\nu\rho} = \frac{-i}{k^2} \delta_\mu^\rho.$$

Ecrivons $\tilde{D}_F^{\nu\rho}$ sous la forme $\tilde{D}_F^{\nu\rho} = AT^{\nu\rho} + BL^{\nu\rho}$. Alors

$$AT_\mu^\rho + \frac{1}{\xi} BL_\mu^\rho = \frac{-i}{k^2} (T_\mu^\rho + L_\mu^\rho)$$

d'où

$$A = \frac{-i}{k^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{-i}{k^2} \xi.$$

Ainsi

$$\boxed{\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} [T^{\mu\nu} + \xi L^{\mu\nu}]}, \quad (1.59)$$

forme équivalente à la relation (1.58).

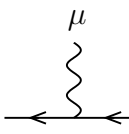
Nous verrons plus loin que les corrections radiatives modifient uniquement la partie transverse du propagateur.

Nous pouvons à présent écrire le lagrangien complet de QED et écrire les règles de Feynman correspondantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\text{fixation de jauge}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \\ &= \underbrace{-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\text{cf. (1.58)}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi}_{\text{cf. (1.51)}} + \underbrace{-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{terme d'interaction}} \\ &= \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned}$$

Les règles de l'intégration gaussienne (à la fois sur les champs bosoniques A et sur les champs fermioniques $\bar{\psi}$ et ψ) permettent d'évaluer perturbativement les fonctions de corrélations formées à partir de

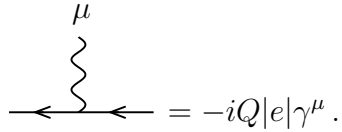
$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{QED}} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left[1 - ie \int d^4x \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \dots \right].$$

On en déduit le vertex  $= -ie\gamma^\mu$.

Le lagrangien ci-dessus correspond au cas de l'électron, de charge $e = -|e|$. Dans le cas d'une particule de charge $Q|e|$ ($Q = -1$ pour l'électron), en partant de la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iQ|e|A_\mu, \quad (1.60)$$

on en déduit que le vertex d'interaction s'écrit



$$\text{---}\overset{\mu}{\text{~}}\text{---} = -iQ|e|\gamma^\mu.$$

Remarque:

Les notations peuvent parfois prêter à confusion. Ainsi Peskin, Schroeder et Itzykson, Zuber notent $e = -|e|$ la charge de l'électron, tandis que Muta note $e = |e|$ l'unité de charge positive!

Chapitre 2

Théories de Yang-Mills

Le principe qui guide la construction des théories de Yang-Mills est le suivant : en rendant locales les symétries globales, on peut engendrer la dynamique du système. Ce principe sera le fil conducteur de ce chapitre¹, et des suivants, puisqu'il fournit de l'information tant au niveau classique qu'au niveau quantique.

En QED, A_0 produit des états de norme négative. Grâce à l'identité de Ward, qui découle de l'invariance de jauge locale, on montre que ces états de norme négative sont exactement compensés par les modes longitudinaux. Il ne reste alors que deux degrés de liberté physique, correspondant aux états de polarisation transverse.

La même propriété est valable pour les théories de jauge non abéliennes. Les identités de Ward associées sont alors plus complexes, mais la conclusion sera la même. L'existence de cette symétrie permet également de montrer que la théorie est renormalisable, i.e. que les contre-termes sont invariants de jauge (et qu'en particulier le photon et le gluon sont bien des particules de masse nulle, à tous les ordres en perturbation).

2.1 Théorie de jauge abélienne

Nous allons effectuer un petit retour sur QED, en montrant que c'est la seule théorie, en partant du lagrangien de Dirac libre, qui puisse être obtenue si l'on impose l'invariance de jauge locale et la renormalisabilité, ainsi bien entendu que l'invariance de Lorentz.

Considérons donc le lagrangien de l'électron libre

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x)$$

Il est invariant sous la transformation globale $U(1)$ suivante :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x) & (\alpha \text{ réel}) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha} \bar{\psi}(x). \end{aligned}$$

¹Ce chapitre utilise des notions élémentaires de théorie des groupes et algèbres de Lie, rappelées brièvement. Elle ne sont pas indispensables pour la suite du cours et peuvent être sautées en première lecture

Construisons une théorie qui soit invariante de jauge locale, i.e. laissée invariante par

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) &= \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)) \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - \underbrace{i\bar{\psi}(x)\partial_\mu\alpha(x)}_{\text{terme non compensé!}}\psi(x) \end{aligned}$$

Introduisons une dérivée covariante D_μ , construite à partir de ∂_μ , de manière à compenser le terme en trop : $D_\mu = \partial_\mu + ?$

Le terme à ajouter doit porter un indice de Lorentz : c'est donc un champ vectoriel (champ car il doit dépendre de x puisque $\partial_\mu\alpha(x)$ dépend de x). On le choisit réel, et on pose donc

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu.} \quad (2.1)$$

e est ici un paramètre arbitraire (ce sera la charge électrique). Si

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

sous une transformation de jauge, alors

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' &= [(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x)]' = [\partial_\mu + ieA_\mu + i\partial_\mu\alpha(x)]e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \\ &= e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x) = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{D_\mu\psi(x) \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x),} \quad (2.2)$$

i.e. $D_\mu\psi(x)$ possède la même loi de transformation que $\psi(x)$

A présent le terme $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ est invariant de jauge

Le lagrangien $\mathcal{L}'_0 = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$ est donc invariant de jauge.

Ce champ de jauge n'est pas dynamique. En effet, le lagrangien ne possède pas de terme dérivatif en $\partial_0 A^\mu$, donc le moment conjugué de A^μ est nul. Nous devons donc modifier le lagrangien.

Résultat préliminaire :

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \text{ est invariant de jauge.}} \quad (2.3)$$

Preuves:

- directement : le résultat est immédiat d'après la loi de transformation de A_ν
- $(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = ieF_{\mu\nu}\psi$

Comme $D_\nu\psi \rightarrow [D_\nu\psi]' = e^{-i\alpha(x)}D_\nu\psi$ (i.e. $D_\nu\psi$ se transforme comme ψ comme nous l'avons vu en (2.2)), on en déduit que $(D_\mu D_\nu)\psi = D_\mu(D_\nu\psi)$ se transforme comme $D_\mu\psi$, donc

$$[D_\mu D_\nu\psi]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu D_\nu\psi,$$

d'où

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi]' = e^{-i\alpha(x)}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)$$

qui s'écrit encore

$$[F_{\mu\nu}\psi]' = F'_{\mu\nu}\psi' = e^{-i\alpha(x)}F_{\mu\nu}\psi = (F_{\mu\nu}\psi)e^{-i\alpha(x)}$$

d'où

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

Le terme le plus simple qui soit de dimension inférieure ou égale à 4 (critère de renormalisabilité qui sera justifié dans les chapitres suivants), scalaire de Lorentz et invariant de jauge est

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{à une divergence totale près})$$

Le facteur $1/4$ est conventionnel. Il est là pour assurer que les équations du mouvement obtenues sont bien les équations de Maxwell correctement normalisées. Le lagrangien de QED s'écrit donc finalement :

$$\boxed{\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.} \quad (2.4)$$

Remarques:

- le photon est de masse nulle car un terme en $A_\mu A^\mu$ n'est pas invariant de jauge
- le couplage du photon à la matière est complètement déterminé par l'exigence d'avoir une théorie de jauge locale (ce couplage apparaît lors du remplacement $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$). Un couplage non minimal du type $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ n'est pas possible car il briserait la renormalisabilité (seuls les termes de dimension ≤ 4 sont permis). Un tel terme de couplage est cependant intéressant pour décrire, à basse énergie, un couplage phénoménologique au proton ou au neutron (pour décrire le moment magnétique qui est différent de celui de la théorie de Dirac corrigée par QED par exemple). On parle alors de théorie effective, au sens où, si l'on introduit une coupure UV à la main, il devient licite de considérer un lagrangien non renormalisable.

• rien n'oblige à ce que la charge électrique élémentaire soit la même pour toutes les particules chargées. Ceci est dû au fait que le groupe de jauge est $U(1)$. Comme les constantes de structure du groupe sont nulles, il n'y a pas de relation entre les différentes charges des particules de matière couplées au champ de jauge.

• le lagrangien ne comporte pas de terme d'interaction du boson de jauge avec lui-même : le photon ne possède pas de charge $U(1)$. Donc sans matière, QED est une théorie libre.

Les deux premières remarques restent valables pour les théories de jauge non abélienne. En revanche, comme une théorie de jauge abélienne est non linéaire (à cause de la structure

du groupe), les deux dernières remarques sont susceptibles d'être modifiées.

Le principe que vous venons de mettre en oeuvre pour l'électromagnétisme a été généralisé en 1954 par Yang et Mills pour le groupe $SU(2)$ d'isospin. Nous allons examiner ici plus généralement le cas d'un groupe de jauge G dont l'algèbre de Lie est la somme directe de sous-algèbres de Lie simples compactes et de sous algèbres $U(1)$. Commençons par donner quelques éléments utiles de théorie des groupes et de leur représentations.

2.2 Quelques éléments de théorie des groupes

2.2.1 Algèbre de Lie

Pour un groupe de Lie donné, l'algèbre de Lie s'obtient par différentiation au voisinage de l'identité, suivant toutes les directions indépendantes. On note alors n la dimension du groupe, qui est le nombre de générateurs de sa \mathbb{R} -algèbre de Lie. Par exemple $n = N^2 - 1$ pour $SU(N)$. L'algèbre de Lie est simplement l'ensemble des combinaisons linéaires de ces générateurs (sur \mathbb{R} si on parle de la \mathbb{R} -algèbre de Lie, sur \mathbb{C} si on parle de la \mathbb{C} -algèbre de Lie), muni d'un crochet de Lie (c'est le commutateur dans le cas des algèbres de matrices). Les éléments de l'algèbre de Lie vérifient l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (2.5)$$

X, Y, Z étant 3 combinaisons linéaires arbitraires des générateurs.

Nous noterons conventionnellement par T^a ($a = 1, \dots, n$) les générateurs de l'algèbre de Lie. Ces générateurs vérifient la relation

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c, \quad (2.6)$$

où f_{ab}^c sont les constantes de structure du groupe. Dans le cas qui nous intéressera des groupes de Lie compacts semi-simples (voir ci-dessous), la covariance des indices sur le groupe ne joue aucun rôle et on pourra écrire $f_{abc} = f_{ab}^c$, et donc

$$\boxed{[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c.} \quad (2.7)$$

2.2.2 Représentations

Représentation d'un groupe

Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , de dimension d .

Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est un homomorphisme D de G dans le groupe $GL(d)$ des opérateurs linéaires et inversibles de V . On a donc

$$\boxed{\forall g_1, g_2 \in G, D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2).}$$

En particulier $D(e) = \mathbb{1}$ et $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$,
où e et $\mathbb{1}$ sont les éléments neutres de G et de $GL(d)$.

V est appelé espace de représentation, et $d = \dim V$ est la dimension de la représentation. $D(g)$ s'écrit donc comme une matrice $d \times d$. Il ne faut surtout pas confondre cette dimension avec celle du groupe. De façon générale, un groupe donné possède plusieurs représentations, de dimensions différentes. On ne confondra pas cette dimension avec celle de la représentation du groupe ou de son algèbre de Lie (les dimensions sont égales dans le cas de la représentation adjointe).

Représentation d'une algèbre de Lie g

Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On dit que D est une représentation linéaire de g dans l'espace vectoriel V si

$$\begin{aligned} [D(A), D(B)] &= D([A, B]) \\ D(\alpha A + \beta B) &= \alpha D(A) + \beta D(B) \end{aligned}$$

Théorème :

Une représentation D_G d'un groupe G induit par différentiation une représentation D_A de son algèbre de Lie. Cela signifie que l'on passe d'une représentation du groupe à une représentation de son algèbre de Lie exactement comme on passe du groupe à son algèbre de Lie.

Représentations unitaires

Si $\forall g \in G$, les opérateurs $D(g)$ sont unitaires, la représentation est dite unitaire.

Représentations équivalentes

Deux représentations D et D' sont dites équivalentes si et seulement si il existe un opérateur S inversible t.q.

$$\forall g \in G, D'(g) = S^{-1}D(g)S.$$

S est appelé opérateur d'entrelacement.

Quelques représentations utiles

Représentation fondamentale :

C'est la représentation la plus simple (en dehors de la représentation "triviale" pour laquelle $T(g) = 1$). Elle consiste simplement à représenter chaque élément du groupe par lui-même. Ainsi un champ de matière ψ appartenant à l'espace de représentation de la représentation fondamentale de G , se transforme suivant

$$\psi \xrightarrow{G} \psi'_i = U_{ij}\psi_j \quad U \in G \quad (U : \text{matrice } N \times N \text{ pour } SU(N))$$

soit localement :

$$\psi \xrightarrow{G} \psi' = \psi - i\alpha^a T^a \psi$$

(ou $\psi' = \psi + i\alpha^a T^a \psi$ si l'on préfère cette paramétrisation) qui doit se comprendre comme

$$\psi'_i = \psi_i - i\alpha^a T_{ij}^a \psi_j \quad (2.8)$$

où α possède n composantes : l'indice a est une étiquette pour le a -ième générateur tandis que i et j sont des indices matriciels pour la représentation de ce générateur agissant sur les vecteurs ψ_j à N composantes.

La relation de transformation (2.8) fait intervenir la matrice U avec ses coefficients U_{ij} . Nous n'avons pas utilisé la notation covariante pour la représentation fondamentale pour simplifier la discussion. C'est néanmoins utile (et indispensable !) dans le cas où les représentations fondamentales complexes conjuguées ne sont pas équivalentes. Ainsi, dans le cas de $SU(N)$, dès que $N > 2$, les représentations conjuguées ne sont pas équivalentes. Par exemple, 3 et $\bar{3}$ ne sont pas équivalentes sous $SU(3)$. On écrira alors ψ^i pour une représentation (conventionnellement, c'est celle correspondant aux quarks) et $\psi_i (= \psi^{*i})$ pour sa complexe conjuguée (c'est celle des antiquarks) avec

$$\begin{array}{ll} \psi'^i = U^i_j \psi^j & U^i_j \equiv (U)_{ij} \\ \psi'_i = U_i^j \psi_j & U_i^j \equiv (\bar{U})_{ij} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{matriciellement :} \\ \psi' = U\psi \\ \psi^{*'} = \bar{U}\psi^* \end{array}}$$

Comme pour les fermions on utilise $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ plutôt que Ψ^* , il est utile d'écrire la loi de transformation de $\bar{\Psi}$ sous le groupe. Partant de

$$\psi^{*'} = \bar{U}\psi^*$$

on déduit que

$$\psi^{\dagger'} = {}^t\Psi^* {}^t\bar{U} = {}^t\Psi^* U^\dagger$$

et donc, puisque U n'agit que sur les indices du groupe (et non sur les indices spinoriels),

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^\dagger.$$

Ainsi, en résumé, pour des fermions (cas des quarks)

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi' = U\psi \\ \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^\dagger \end{array}} \quad (2.9)$$

Représentation adjointe :

Une représentation particulière joue un rôle important dans la construction de Yang-Mills : il s'agit de la représentation adjointe. Elle est définie de la façon suivante.

★ sur le groupe :

Sur le groupe G , l'application $g \rightarrow ad\ g$ définie par $ad\ g(h) = ghg^{-1}$ est une représentation de G sur lui-même.

Preuve:

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in G, \forall h \in G, ad(g_1 g_2)(h) &= (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1} \\ &= ad_{g_1}(ad_2(h)) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'on a bien construit un morphisme.

★ sur l'algèbre :

A cette représentation sur le groupe correspond la représentation $X \rightarrow adX$ définie par $adX(Y) = [X, Y]$.

Ceci signifie que les générateurs jouent deux rôles simultanément : celui de générateur et celui de vecteur de base sur lesquels agissent les générateurs. *La dimension de la représentation adjointe est donc égale à celle du groupe.*

Preuve:

Il suffit de différentier $\exp(-itT_a)T_b \exp(itT_a)$ en $t = 0$ pour en déduire l'expression de la représentation adjointe sur l'algèbre de Lie. En utilisant le théorème qui assure qu'une représentation d'un groupe induit par différentiation une représentation de son algèbre de Lie, ceci achève la preuve. Il est cependant instructif de le vérifier directement de deux façons différentes :

- de manière intrinsèque, il faut montrer que $[adX_1, adX_2] = ad[X_1, X_2]$.

$$\begin{aligned} \forall Y \in g, [adX_1, adX_2](Y) &= adX_1 adX_2(Y) - adX_2 adX_1(Y) \\ &= [X_1, [X_2, Y]] - [X_2, [X_1, Y]] = [X_1, [X_2, Y]] + [X_2, [Y, X_1]] = -[Y, [X_1, X_2]] \end{aligned}$$

soit encore $[adX_1, adX_2](Y) = [[X_1, X_2], Y]$, ce qui prouve le résultat.

- matriciellement, en utilisant les constantes de structure (2.7) on peut construire cette représentation par les n matrices T_a^A (A comme adjointe) de coefficients

$$(T_a^A)_{cb} = i f_{abc}. \tag{2.10}$$

Cette définition est bien cohérente puisque

$$T_a(T_b) = [T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{2.11}$$

et donc par identification du coefficient c de l'image de T_b par T_a on en tire bien (2.10).

Ceci se visualise sous la forme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} b \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \right)_{n \times n} &= D(T_a) \\ \nwarrow & \\ \sum_c [D(T_a)]_{cb} T_c &= \text{image du vecteur } T_b \end{aligned}$$

Sous cette forme, il suffit donc de vérifier que $[D(T_a), D(T_b)]_{\alpha\beta} = D([T_a, T_b])_{\alpha\beta}$ pour ce convaincre que l'on a bien une représentation, ce qui se vérifie grâce à l'identité de Jacobi.

Remarque:

La dimension de la représentation adjointe est égale à la dimension du groupe. En revanche les générateurs T_a peuvent être dans une représentation complètement arbitraire. La seule chose qui compte finalement est que leur nombre soit la dimension du groupe (qu'il ne faut surtout pas confondre avec la dimension d de la représentation des générateurs T_a (i.e. les T_a sont des matrices $d \times d$). On obtient ainsi différentes formes isomorphes de la représentation adjointe.

Exemple : $SU(2)$

représentation fondamentale : matrices $\frac{\vec{\sigma}}{2}$ (3 matrices 2×2)

représentation adjointe : c'est la représentation vectorielle que l'on peut aussi fabriquer à partir des rotations infinitésimales $(J_k)_{ij} = -i \varepsilon_{kij} = -i \varepsilon_{ijk}$ (3 matrices 3×3).

En tant que matrice, T_a^A agit comme une matrice $n \times n$ ($n =$ dimension du groupe). En revanche si l'on décide de décrire T_a^A comme un opérateur construit à partir d'une représentation donnée (en général la représentation fondamentale) de dimension d , alors

$$T_a^A(T_b) = [T_a, T_b] \quad T_a : \text{pour } a \text{ fixé, c'est une matrice } d \times d$$

$\nwarrow n$ indices possibles

Notations usuelles dans la littérature : $ad \Leftrightarrow T^A \Leftrightarrow T$ pour l'adjointe
 $T^f \Leftrightarrow t$ pour la fondamentale

Dans la suite nous utiliserons T pour l'adjointe et t pour la(les) fondamentale(s). Il est assez usuel d'utiliser les indices i, j, k pour les coefficients des générateurs de la (des) représentation(s) fondamentale(s), et a, b, c pour les coefficients des générateurs de la représentation adjointe.

2.2.3 Compacité, simplicité et semi-simplicité

Compacité

On dit qu'un groupe est compact si le domaine dans lequel vivent les n paramètres du groupe est compact. Ainsi le groupe des rotations est compact, mais le groupe de Lorentz ne l'est pas, à cause des boosts qui sont codés par des rapidités² variant de $-\infty$ à $+\infty$. Notons dans ce dernier cas que l'on pourrait avoir la (fausse) impression qu'un boost pouvant être

²Rappelons que la rapidité ϕ est reliée aux paramètres d'un boost de Lorentz par les relations $\text{ch}\phi = \gamma$ et $\text{sh}\phi = \gamma\beta$.

codé par une vitesse variant de $-c$ à $+c$, cette notion de compacité est toute relative. Il n'en est rien, car c'est bien le codage en terme des rapidités qui permet d'obtenir une structure de groupe de Lie.

Simplicité

La notion d'algèbre simple (et semi-simple) est importante en mathématique d'un point de vue de classification. Pour nous, elle joue un rôle important puisqu'elle assurera la positivité de l'énergie associée au lagrangien ainsi construit (voir commentaire page 43).

Pour la définir, on introduit la notion d'idéal : c'est un sous-espace \mathcal{I} de l'algèbre g stable par multiplication (au sens du crochet de Lie). Cela signifie que $[\mathcal{I}, g] \subset \mathcal{I}$, c'est-à-dire que le commutateur de n'importe quel élément de \mathcal{I} avec un élément quelconque de g appartient à \mathcal{I} . Ceci étant dit, un idéal est abélien si tous les éléments de \mathcal{I} commutent entre eux.

Nous pouvons maintenant définir la notion d'algèbre de Lie simple : c'est une algèbre qui n'a pas d'autre idéal que $\{0\}$. Une algèbre est semi-simple si elle n'a pas d'autre idéal abélien que $\{0\}$ (ce qui n'interdit pas qu'elle possède d'autre idéal, d'où l'appellation semi-simple). Exemple : l'algèbre de Lie du groupe $SO(4)$, que l'on note $so(4)$, peut s'écrire sous la forme $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ (ceci se vérifie en partant des générateurs de $so(4)$ et en les combinant astucieusement. Ceci permet de montrer que $so(4)$ n'est pas simple, bien que semi-simple (on ne peut isoler de générateur abélien dans $so(4)$).

On montre (Cartan) que toute algèbre de Lie semi-simple est somme directe d'algèbres de Lie simple. Les algèbres de Lie simple sont complètement classifiées (classification due à Cartan).

Dans la composante connexe de l'identité, on peut écrire, le groupe étant compact, $U(\alpha) = e^{-i\alpha^a T^a}$. Ceci n'est possible pour un groupe de Lie arbitraire (i.e. qui n'est pas forcément compact) que dans un voisinage de l'identité, alors que la compacité permet d'avoir accès à toute la composante connexe de l'identité, qui est par définition l'ensemble des éléments du groupe que l'on peut obtenir à partir de l'identité en faisant varier continûment les paramètres.

Pour un groupe compact, on démontre que toute représentation irréductible est de dimension finie et équivalente à une représentation unitaire. Cette hypothèse étant supposée ici vérifiée, on considérera donc dans toute la suite que les matrices U sont unitaires : $U U^\dagger = U^\dagger U = 1$ et donc $U^{-1} = U^\dagger$.

2.3 Théories de jauge non abéliennes

2.3.1 Principe de jauge et couplage matière-champ de jauge

Examinons le terme cinétique $\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x)$. En utilisant (2.9), on obtient

$$\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \xrightarrow{G} \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) + \underbrace{\bar{\psi}(x)U^{-1}(\alpha)[\partial_\mu U(\alpha)]\psi(x)}_{\text{terme non compensé}}.$$

Nous allons suivre la même procédure que pour QED :

- on ajoute à ∂_μ un champ de jauge

- comme $U \underset{|\alpha| \ll 1}{\sim} 1 - i\alpha^a T^a$, $\partial_\mu U \sim -i\partial_\mu \alpha^a(x) T^a$

α^a porte un indice de la représentation adjointe ($N^2 - 1$ indices pour $SU(N)$), donc le champ de jauge doit obligatoirement être choisi dans la représentation **adjointe** (indépendamment du choix de la représentation T^a , en principe la fondamentale). On pose donc

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a}, \quad (2.12)$$

que l'on peut comparer à $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ en QED : dans ce cas trivial, le générateur de la représentation adjointe (comme de la représentation fondamentale) est simplement le nombre 1 (on peut difficilement faire plus simple comme matrice 1×1 hermitienne!!). Noter que les signes devant les parties faisant intervenir les champs de jauge sont conventionnels.

Nous allons maintenant exiger la loi de transformation

$$\boxed{D_\mu \psi \rightarrow (D_\mu \psi)' = U(\alpha) D_\mu \psi} \quad (2.13)$$

analogue de $(D_\mu \psi)' = e^{-i\alpha(x)} D_\mu \psi$ pour QED. Alors

$$(\partial_\mu - igT^a A_\mu^a) (U(\alpha)\psi) = U(\alpha) (\partial_\mu - igT^a A_\mu^a) \psi$$

soit

$$[\partial_\mu U(\alpha) - igT^a A_\mu^a U(\alpha)] \psi = -igU(\alpha) T^a A_\mu^a \psi$$

d'où finalement

$$\boxed{T^a A_\mu^a = U(\alpha) T^a A_\mu^a U^{-1}(\alpha) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\alpha)] U^{-1}(\alpha)}. \quad (2.14)$$

Dans le cas d'une transformation de jauge globale, $\alpha^a = \text{constante}$, et cette relation se simplifie en

$$T^a A_\mu^a = U(\alpha) T^a A_\mu^a U^{-1}(\alpha), \quad (2.15)$$

qui n'est autre que la représentation adjointe du groupe G sur son algèbre de Lie.

Si l'on développe (2.14) autour de l'identité, on obtient, en partant de $U(\alpha) \sim 1 - i\alpha^a T^a$,

$$T^a A_\mu^a = T^a A_\mu^a - i\alpha^b A_\mu^c [T^b, T^c] - \frac{1}{g} T^a \partial_\mu \alpha^a.$$

Or $[T^b, T^c] = if^{bca} T^a$. Donc puisque f^{abc} est complètement antisymétrique, on en déduit que

$$\boxed{A_\mu^a = A_\mu^a + f^{abc} \alpha^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a}. \quad (2.16)$$

Si l'on considère à nouveau le cas particulier d'une transformation de jauge globale $\alpha^a = \text{constante}$, on obtient

$$A_\mu^a = A_\mu^a + f^{abc} \alpha^b A_\mu^c$$

qui est bien la loi de transformation de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie de G . C'est bien sûr la version locale de (2.15).

Remarque:

On comparera utilement cette écriture avec la définition habituelle d'une représentation adjointe d'une algèbre de Lie : ici on a écrit la représentation sur les coordonnées (les A_μ^a) plutôt que sur les vecteurs de base de l'algèbre de Lie (les T^a). C'est bien sûr équivalent (on dit **dual** en mathématiques).

Pour s'en convaincre il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= \underbrace{\left(e^{-i\alpha_c T_c^A} \right)_{ab}} A_\mu^b \\ &= D^A(U) \text{ dans la représentation adjointe} \end{aligned}$$

La relation (2.14) s'écrit alors, pour une transformation de jauge globale,

$$\begin{array}{ccc} T^a \underbrace{(\delta_{ab} - i\alpha_c (T_c^A)_{ab})} A_\mu^b &= & \underbrace{(1 - i\alpha^b T^b)} T^a A_\mu^a (1 + i\alpha^b T^b) \\ \text{développement de } D^A(U) && \text{développement de } D^F(U) \\ \text{au voisinage de } U = \mathbb{1} && \text{au voisinage de } U = \mathbb{1} \end{array}$$

qui donne, en égalant les coefficients de A_μ^a ,

$$\underbrace{T^{a'} (T_c^A)_{a'a}} = [T^c, T^a] \quad (2.17)$$

image du **vecteur de base** T^a par T_c^A

qui est bien la représentation adjointe connue. Noter (ce n'est pas une erreur d'écriture) la position des indices : l'indice courant est à **gauche** de la matrice T_c^A (comme dans tout changement de base).

En écrivant $[T^c, T^a] = if_{caa'} T^{a'}$ on a bien sûr $(T_c^A)_{a'a} = -if_{ca'a}$. Au risque de se répéter, (2.17) peut être vue de deux façons : comme une identité matricielle (membre de gauche), avec une matrice agissant sur l'espace constitué des générateurs de la représentation considérée, ou comme une identité opératorielle (membre de droite), avec cette fois un calcul de commutateurs qui fait donc intervenir des produits de matrices avec des indices dans la représentation considérée :

- $[T^c, T^a]$ est une matrice dans la représentation des champs de matière (en général c'est la représentation fondamentale, mais ce n'est pas obligatoire) :

$[T^c, T^a]_{ij} = T_{ik}^c T_{kj}^a - T_{ik}^a T_{kj}^c$ où i, j sont des indices de la représentation des champs de matière ($i, j = 1 \cdots N$ pour une représentation fondamentale de $SU(N)$).

- $(T_c^A)_{a'a}$ est un élément de matrice de la représentation adjointe ($a, a' = 1 \cdots n$ où n est la dimension du groupe).

Notons que la relation (2.16) peut encore s'écrire

$$\boxed{A_\mu^a = A_\mu^a - \frac{1}{g} (D_\mu \alpha)^a} \quad (2.18)$$

où D_μ agit ici dans la *représentation adjointe*, que l'on notera aussi $(D_A)_\mu$ (la lettre A signifie adjointe).

Preuves:

• c'est immédiat en écrivant l'action de $(D_A)_\mu$, qui est une matrice $n \times n$ (n étant la dimension du groupe), sur α (vecteur à n composantes) :

$$(D_\mu \alpha)^a = \partial_\mu \alpha^a - ig(T_A^c)_{ab} A_\mu^c \alpha_b$$

avec $(T_A^c)_{ab} = -if_{cab}$.

• le même résultat peut bien sûr s'obtenir directement en utilisant la définition de $(D_A)_\mu$,

$$(D_A)_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - ig(T_A^c)_{ab} A_\mu^c = \partial_\mu \delta^{ab} - gf_{abc} A_\mu^c,$$

ce dernier point de vue faisant ressortir le fait que D_μ dépend de la représentation sur laquelle elle agit.

Notation:

on écrira

$$\boxed{A_\mu = A_\mu^a T^a}, \quad (2.19)$$

qui est donc un champ appartenant à la représentation adjointe de l'algèbre de Lie de G . Comme A_μ ne porte plus explicitement d'indice de la représentation du groupe, il ne faut pas se laisser abuser par la notation! (ainsi dans le plan euclidien habituel, $\vec{V} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ ne porte pas non plus d'indice, mais on y est plus habitué!).

2.3.2 Dynamique du champ de jauge

Il nous reste maintenant à déterminer la dynamique du champ de jauge, c'est-à-dire à déterminer l'équivalent de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ pour QED. Comme nous l'avons fait pour QED, considérons donc $(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi$:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu &= (\partial_\mu - igT^a A_\mu^a) (\partial_\nu - igT^b A_\nu^b) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= -igT^a \partial_\mu A_\nu^a - igT^a A_\mu^a \partial_\nu - g^2 T^a T^b A_\mu^a A_\nu^b \\ &\quad + igT^a \partial_\nu A_\mu^a + igT^a A_\nu^a \partial_\mu + g^2 T^b T^a A_\mu^a A_\nu^b \\ &= -igT^c (\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c) - g^2 if_{abc} A_\mu^a A_\nu^b T^c \end{aligned}$$

qui est donc *un objet se transformant suivant la représentation adjointe*, puisqu'il a la même structure (par rapport au groupe de jauge) qu'un champ tel que A^μ . Nous fixerons les coordonnées de cet objet dans la base T^a en posant $D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = -igT^a F_{\mu\nu}^a$.

Alors

$$\boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c}. \quad (2.20)$$

On notera la présence d'un terme supplémentaire *non linéaire* par rapport au cas abélien.

Comme $D_\mu \psi$ et ψ se transforment de la même façon sous le groupe de jauge, on en déduit que

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi]' = U(\alpha) (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi.$$

Or

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi]' = -igT^a F'_{\mu\nu} \psi' = -igT^a F'_{\mu\nu} U(\alpha)\psi,$$

d'où par comparaison

$$\boxed{T^a F'_{\mu\nu} = U(\alpha)T^a F_{\mu\nu} U(\alpha)^{-1}.} \quad (2.21)$$

qui traduit bien le fait attendu que $F_{\mu\nu}^a$ se transforme suivant la représentation adjointe. Si l'on développe autour de $\alpha = 0$, on aura bien sûr $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a + f_{abc} \alpha_b F_{\mu\nu}^c$, y compris si la transformation de jauge est locale (pas de terme en $\partial_\mu \alpha^a$ comme pour A_μ^{Ia}).

Nous pouvons à présent écrire la seule quantité scalaire, invariante de jauge et de dimension 4 disponible pour compléter le lagrangien (à une constante multiplicative près) :

$$\boxed{Tr(T^a F_{\mu\nu}^a)(T^b F_{\mu\nu}^b) \text{ est invariant de jauge.}} \quad (2.22)$$

Preuves:

- directement :

$$\begin{aligned} T^a F_{\mu\nu}^a T^b F_{\mu\nu}^b &\xrightarrow{G} U(\alpha)T^a F_{\mu\nu}^a U(\alpha)^{-1} U(\alpha)T^b F_{\mu\nu}^b U(\alpha)^{-1} \\ &= U(\alpha)T^a F_{\mu\nu}^a T^b F_{\mu\nu}^b U(\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Par invariance de la trace par permutation cyclique, on en déduit le résultat.

- mathématiquement, $TrT^a T^b$ est une métrique invariante, proportionnelle à la métrique de Cartan-Killing $TrT_a^A T_b^A$. Donc si l'on examine la loi de transformation de (2.22) de manière duale par rapport au groupe de jauge (i.e. on interprète la transformation de jauge comme un changement de repère affectant les vecteurs de base T^a de la représentation (point de vue passif) plutôt qu'en terme d'un changement des coordonnées $F_{\mu\nu}^a$ (point de vue actif), le résultat est immédiat.

Dans toute théorie physiquement raisonnable, la positivité de l'énergie doit être satisfaite (non pas au sens strict, le signe absolu de l'énergie n'ayant pas de sens puisque l'énergie est toujours définie à une constante près) : l'adjonction d'un mode physique supplémentaire à un état donné doit *augmenter* l'énergie. C'est aussi la raison pour laquelle, dans une théorie scalaire par exemple, le terme cinétique est de la forme $\frac{1}{2}Z \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$, où Z est *strictement positif* (on choisit en général $Z = 1$ pour la théorie non renormalisée). C'est la raison pour laquelle on exige que $TrT^a T^b$ soit une métrique *définie positive*. On démontre alors que ceci est équivalent à choisir pour groupe de jauge un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie soit la somme directe de sous-algèbres de Lie simples compactes et de sous algèbres $U(1)$.

En outre, ce résultat permet de montrer que $TrT^a T^b$ est proportionnelle à δ^{ab} .

Nous pouvons maintenant écrire le lagrangien complet de Yang-Mills

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi}$$

Développons ce lagrangien pour comprendre sa structure. Pour simplifier, on suppose que l'algèbre de Lie du groupe G est simple, ce qui évite d'introduire plusieurs types de charge. Ceci s'applique donc directement au cas $G = SU(N)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi && \text{terme cinétique (quark)} && \longrightarrow \\
 &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) && \text{terme cinétique (gluon)} && \text{~~~~~} \\
 &+gA_\mu^a\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi && \text{couplage quark-gluon} && \text{~~~~~} \\
 &-gf_{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu} && \text{couplage à 3 gluons} && \text{~~~~~} \\
 &-\frac{1}{4}g^2 f_{abc}f_{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} && \text{couplage à 4 gluons} && \text{~~~~~}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Remarques:

- le terme cinétique des gluons n'a pas de sens pour le moment, car la composante A^0 ne se propage pas. Nous étudierons la solution de ce problème, lié à l'invariance de jauge, dans le chapitre suivant.

- les bosons de jauge sont de masse nulle

- les interactions ont été fixées complètement par le fait d'imposer l'invariance de jauge locale.

- on retrouve le **même** couplage g pour la matière et pour les interactions entre bosons de jauge : lorsque le groupe de jauge est simple (comme pour QCD), il n'y a aucune liberté. La contrainte vient de la non-linéarité des relations de commutation de l'algèbre de Lie : ayant fixé une échelle g pour définir D_μ , cette échelle réapparaît dans l'expression de $F_{\mu\nu}^a$ (lors du calcul de $D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$, on a explicitement utilisé les constantes de structure), et donc dans le lagrangien. Si le groupe est simple, ce choix implicite de la forme de la transformation de jauge pour les bosons A_μ , valable pour tout le groupe, interdit un autre choix pour d'autres particules de matière.

Dans le cas du modèle standard, $G = SU(2) \times U(1) \times SU(3)$, qui n'est pas simple. Les couplages sont indépendants suivant chaque sous-groupe.

- même sans matière, la théorie de Yang-Mills n'est pas libre. Par exemple, des états dits "boules de glue" (glueballs en anglais) pourraient exister en QCD, comme états liés purement gluoniques.

- le terme $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ correspond à l'action la plus générale pour la partie de Yang-Mills à condition d'imposer la conservation de la parité P ou du produit CP . Sinon, on peut également inclure dans le lagrangien le terme $-\frac{1}{2}\theta_{ab}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a$. On peut montrer que ce

terme est une dérivée totale, de sorte qu'il ne contribue ni aux équations du mouvement ni aux règles de Feynman. En revanche, en tant que terme topologique (son unique effet vient des termes de bord dans l'intégration de cette dérivée totale, et peut dépendre de la topologie à l'infini), il peut avoir des effets quantiques. QCD est une théorie qui conserve P et CP dans les limites expérimentales actuelles, ce qui fournit des contraintes sur l'ordre de grandeur de ce terme supplémentaire, en particulier par la mesure du moment dipolaire du neutron (qui est plus petit que $10^{-25}e$ cm). Une possibilité de violation de P et de CP par la présence d'un tel terme reste cependant possible. Elle peut être décrite à l'aide d'un degré de liberté supplémentaire scalaire, appelé *axion*, qui est l'un des candidats possibles pour la matière noire. Ce mécanisme donnant lieu à l'apparition d'une violation de P et de CP en QCD (qui ne se manifesterait qu'à grande énergie) est basé sur un mécanisme de brisure spontanée de symétrie $U(1)$: à basse énergie, le champ axionique ϕ est dans un minimum de potentiel qui respecte les symétries P et de CP . Un terme supplémentaire provient d'un terme dit d'anomalie (on parle d'anomalie lorsqu'une symétrie vérifiée au niveau classique ne l'est plus au niveau quantique). A grande énergie (de l'ordre d'une échelle de brisure M très grande par rapport aux énergies actuelles), cette symétrie est spontanément brisée, et combinée au terme d'anomalie, elle fait apparaître une phase dans la matrice de masse (ainsi que des termes de couplage entre axion et hadrons), de façon semblable au mécanisme donnant lieu à des termes de violation de CP dans le secteur électro-faible à cause de l'existence d'une troisième génération qui rend impossible de choisir la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa purement réelle (pour le secteur électrofaible, un deuxième mécanisme existe, basé sur l'existence de plusieurs doublets de Higgs). Notons que dans le cas du secteur électro-faible, la violation de P n'est pas liée à l'échelle d'énergie, contrairement à celle de CP . En revanche, dans le mécanisme envisagé ici pour QCD, une telle violation de P et de CP ne peut apparaître qu'à très grande énergie.

Chapitre 3

Quantification des théories de jauge non abéliennes

3.1 Terme de fixation de jauge et propagateur bosonique

Considérons tout d'abord le cas d'une théorie de pure jauge. Il s'agit donc de donner un sens à l'intégrale

$$\int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \right]}$$

qui diverge.

La première étape est la même que pour l'électrodynamique, pour laquelle nous avons identifié le problème comme étant dû à un sur-comptage des degrés de liberté. Il s'agit donc de fixer la jauge, par une condition $G^a(A) = 0$ en chaque point x . On utilise ensuite la représentation suivante de l'identité :

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G^a(A^\alpha)) \det \left[\frac{\delta G^a(A^\alpha)}{\delta \alpha^b} \right] \quad (\text{pour chaque } a) \quad (3.1)$$

où A^α est défini comme le transformé de jauge de A :

$$T^a A_\mu^{\alpha a} = U(\alpha) T^a A_\mu^a U^{-1}(\alpha) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\alpha)] U^{-1}(\alpha) \quad (\text{voir (2.14)})$$

avec $U(\alpha) = e^{-i\alpha^a t^a}$ dans un voisinage de $\mathbb{1}$, que l'on écrira localement

$$A_\mu^{\alpha a} = A_\mu^a + f^{abc} \alpha^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a = A_\mu^a - \frac{1}{g} (D_\mu \alpha)^a \quad (\text{voir (2.18)})$$

où D_μ est dans la représentation adjointe.

Remarques:

- G^a porte un indice adjoint, tout comme α^b . Ainsi $\frac{\delta G^a(A^\alpha)}{\delta \alpha^b}$ est une matrice de type adjoint, d'éléments de matrice $\frac{\delta G^a(A^\alpha)}{\delta \alpha^b}$. Le déterminant est pris sur cette espace.

• la relation (2.18) montre que dans le cas où la fonction G est linéaire, $\frac{\delta G^a(A^\alpha)}{\delta \alpha^b}$ ne dépend pas de α .

La mesure $\prod_x \prod_{a,\mu} dA_\mu^a$ n'est pas changée sous la transformation de jauge $A \rightarrow A^\alpha$ (i.e. $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\alpha$). D'autre part, le lagrangien est invariant de jauge. Ainsi comme pour QED on peut écrire

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta[G^a(A)] \det \left[\frac{\delta G^a(A^\alpha)}{\delta \alpha^b} \right]. \quad (3.2)$$

L'introduction de la condition de jauge de Lorentz généralisée

$$G^a(A) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x)$$

conduit alors au propagateur (voir page 27) :

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab} e^{-ik(x-y)},$$

le cas particulier $\xi = 1$ correspondant à la jauge de Feynman-'t Hooft.

3.2 Fantômes de Faddeev-Popov

La nouveauté de l'expression de (3.2) par rapport à QED réside dans l'existence du déterminant $\det \frac{\delta G^a(A^\alpha)}{\delta \alpha^b}$ qui dépend en général du champ A (ce déterminant était présent également en électrodynamique, mais ne contenait aucune dynamique). Ainsi, dans le cas de la jauge de Lorentz, l'expression

$$\frac{\delta G^a(A^\alpha)}{\delta \alpha^b} = -\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^a$$

fait explicitement intervenir D_μ qui agit dans la représentation adjointe, et dépend donc de A .

L'astuce de Faddeev et Popov consiste à représenter ce déterminant à l'aide d'une intégrale sur des variables de Grassmann se transformant suivant la représentation adjointe :

$$\det \left(-\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^a \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{i \int d^4x \bar{c} \partial^\mu D_\mu^a c}$$

(on a absorbé le facteur $\frac{1}{g}$ dans la normalisation de c et \bar{c}).

c et \bar{c} sont donc des fermions, qui se comportent comme des scalaires sous le groupe de Lorentz. Ils violent donc le théorème spin-statistique! On les appelle **fantômes** de Faddeev-Popov car ils ne peuvent apparaître comme champs externes, mais seulement dans des boucles fermées à l'intérieur des diagrammes de Feynman. Dans le cas d'une jauge arbitraire, $G(A)$, on obtient, en écrivant

$$\mathcal{M}_{ab}(x, y) = \frac{\delta G^a}{\delta \alpha_b(y)} [A^\alpha(x)], \quad (3.3)$$

$$\mathcal{M}_{ab}(x, y) = \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^c(z)} [A^\alpha(x)] \frac{\delta A^{\alpha c}(z)}{\delta \alpha_b(y)} = \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^c(x)} \left(-\frac{1}{g} \right) D_\mu^{cb}(x) \delta^{(4)}(x - y) \quad (3.4)$$



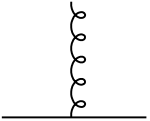
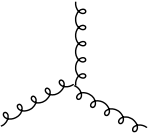
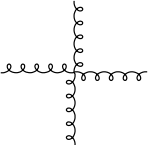
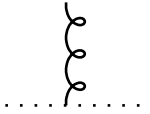
d'où

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{i \left\{ S[A] + \int d^4x \bar{c}_a \left[\frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^c} D_\mu^{cb} \right] c_b \right\}}. \quad (3.5)$$

Dans le cas général, comme D_μ^{cb} dépend du champ de jauge, on aura donc un couplage entre les fantômes et le champ de jauge.

Dans le cas particulier des jauges non covariantes du type $G^a(A) = n \cdot A^a$ où n est un vecteur constant, alors \mathcal{M}_{ab} devient indépendant de A , et les fantômes se découplent. Ce genre de jauge est très pratique dans de nombreuses situations physiques (exemple : obtention des équations DGLAP du modèle des partons amélioré). On perd la covariance au profit du fait que seuls les degrés de liberté physiques des bosons de jauge se propagent.

Nous nous limitons ici aux règles de Feynman dans la jauge covariante. Dans le cas d'un groupe dont l'algèbre de Lie est simple, le lagrangien complet peut se décomposer suivant

$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$	terme cinétique (quark)	
$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})$ $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$	terme cinétique (gluon)	
$+gA_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi$	couplage quark-gluon	
$-gf_{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu}$	couplage à 3 gluons	
$-\frac{1}{4}g^2 f_{abc} f_{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}$	couplage à 4 gluons	
$+\bar{c} \square c$	terme cinétique (fantôme)
$\bar{c} \left[\frac{\delta G}{\delta A_\mu} D_\mu \right] c - \bar{c} \square c$	couplage fantôme-gluon 

(pour $G = SU(N)$ par exemple)

(3.6)

Les règles de Feynman s'en déduisent aisément. Elle s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} p \\ \longleftarrow \\ i \quad j \end{array} \quad \frac{i}{\not{p} - m} \delta_{ij} \\
 & \begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ a \quad b \end{array} \quad \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{k^2} \right] \delta^{ab} \\
 & \begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ a \quad b \\ a, \mu \\ \text{~~~~~} \\ i \quad j \end{array} \quad \frac{-i\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon} \\
 & \begin{array}{c} a, \nu_1 \\ \text{~~~~~} \\ k_1 \\ \text{~~~~~} \\ k_2 \quad k_3 \\ b, \nu_2 \quad c, \nu_3 \end{array} \quad g f^{abc} [g^{\nu_1\nu_2} (k_1 - k_2)^{\nu_3} + \delta^{\nu_2\nu_3} (k_2 - k_3)^{\nu_1} + \delta^{\nu_1\nu_3} (k_3 - k_1)^{\nu_2}] \\
 & \begin{array}{c} a, \nu_1 \\ \text{~~~~~} \\ d, \nu_4 \quad b, \nu_2 \\ \text{~~~~~} \\ c, \nu_3 \end{array} \quad -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\nu_1\nu_3} g^{\nu_2\nu_4} - g^{\nu_1\nu_4} g^{\nu_2\nu_3}) \\
 & \quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\nu_1\nu_2} g^{\nu_3\nu_4} - g^{\nu_1\nu_4} g^{\nu_2\nu_3}) \\
 & \quad + f^{ade} f^{bce} (g^{\nu_1\nu_2} g^{\nu_3\nu_4} - g^{\nu_1\nu_3} g^{\nu_2\nu_4})] \\
 & \begin{array}{c} a, \mu \\ \text{~~~~~} \\ b \quad c \\ p \end{array} \quad -g f^{abc} p^\mu
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

L'obtention des règles précédentes est immédiate pour ce qui concerne les propagateurs.

En ce qui concerne les **vertex** :

le **couplage à 3 gluons** s'obtient en étudiant toutes les façons de contracter 3 gluons externes au terme $-ig f^{abc} \partial_\rho A_\lambda^a A^{\rho b} A^{\lambda c}$, les conventions pour les impulsions externes, les indices de Lorentz et de couleur étant fixés par la figure ci-dessus. Considérons par exemple la contraction de $\partial_\rho A_\lambda^a$ avec le gluon d'impulsion k_1 , de $A^{\rho b}$ avec le gluon d'impulsion k_2 et de $A^{\lambda c}$ avec le gluon d'impulsion k_3 . On obtient alors

$$-ig f^{abc} (-ik_1^{\nu_2}) g^{\nu_1\nu_3} = g f^{abc} g^{\nu_1\nu_3} (-k_1)^{\nu_2}$$

Au total il y a 3! possibilités, dont la somme correspond à l'expression donnée ci-dessus. Cette somme s'obtient sans erreur en utilisant le fait que le terme de couplage dans le lagrangien est symétrique dans les permutations de (a, k_1, ν_1) , (b, k_2, ν_2) , (c, k_3, ν_3) (ceci traduit le caractère bosonique des gluons), c'est-à-dire antisymétrique sous les permutations de

(k_1, ν_1) , (k_2, ν_2) , (k_3, ν_3) puisque f^{abc} est antisymétrique. Le résultat final pour le vertex doit donc satisfaire cette propriété.

couplage à 4 gluons : un exemple de contribution est donné par

$$-\frac{i}{4}g^2 f^{eab} f^{ecd} g^{\nu_1\nu_3} g^{\nu_2\nu_4}$$

L'ensemble des 4! contractions possibles donne finalement le résultat attendu. De même, ce résultat s'obtient par symétrisation sur les indices (a, ν_1) , (b, ν_2) , (c, ν_3) , (d, ν_4) (ici le terme de couplage ne fait pas intervenir les impulsions).

couplage gluon-fantôme :

$$i\bar{c} \partial^\mu D_\mu c = i\bar{c}_b \partial^\mu D_\mu^{bc} c_c = i\bar{c}_b (\partial^\mu \partial_\mu \delta^{bc} - g \partial^\mu f_{bca} A_\mu^a) c_c$$

ce qui donne pour le terme de vertex : $ig \partial^\mu \bar{c}_b f_{bca} A_\mu^a c_c$, soit encore $g(-p^\mu) f_{bca} = -g p^\mu f_{abc}$. En effet

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [b_\alpha^+(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} + d_\alpha(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx}]$$

donc l'action de $i\partial^\mu$ donne un facteur $-k^\mu$ pour le fermion **sortant** $\bar{u}(k)$.

Chapitre 4

Petit memento

4.1 Règles de Feynman pour QED et QCD en jauge covariante

Les règles de Feynman¹, énoncées ci-dessous permettent d'évaluer $i\mathcal{M}$, où \mathcal{M} est l'amplitude de diffusion d'un processus donné. Par définition, c'est un élément de matrice de $S - 1 = iT$ i.e.

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{if} = \langle f|T|i \rangle. \quad (4.1)$$

Nous noterons dans toute la suite par e la charge de l'électron (i.e. l'électron est de charge $e = -|e|$ dans ce système de notations)³.

4.1.1 QED

Nous écrivons la dérivée covariante sous la forme

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (4.2)$$

Le lagrangien de Yang-Mills abélien s'écrit alors, en jauge covariante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\text{fixation de jauge}} + \mathcal{L}_{Dirac} \\ &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \end{aligned} \quad (4.3)$$

soit encore

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2}_{\Rightarrow \text{prop. du photon}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi}_{\Rightarrow \text{prop. de l'électron}} + \underbrace{(-)e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{terme d'interaction}} \quad (4.4)$$

¹Dans l'ensemble de ce cours, nous utilisons les conventions de Peskin-Schroeder. Elles sont identiques à celles utilisées dans Itzykson-Zuber pour QED; pour QCD, elles diffèrent uniquement par le changement de signe pour g_s

²Cette définition est à peu près universelle. Cependant, on pourra rencontrer dans la littérature la définition $S = 1 + T$ (A. H. Mueller, par exemple dans son modèle des dipôles en physique à petits x_{Bj}), ou encore $S = 1 - iT$ (PDG).

³Les notations peuvent parfois prêter à confusion. Ainsi Peskin, Schroeder et Itzykson, Zuber notent $e = -|e|$ la charge de l'électron, tandis que Muta note $e = |e|$ l'unité de charge positive!

Les règles de l'intégration gaussienne (à la fois sur les champs bosoniques A et sur les champs fermioniques $\bar{\psi}$ et ψ) permettent d'évaluer perturbativement les fonctions de corrélations formées à partir de

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{QED}} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left[1 - ie \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \dots \right].$$

On en déduit le vertex

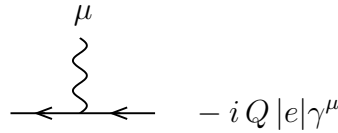


$$-ie\gamma^\mu. \quad (4.5)$$

Le lagrangien ci-dessus correspond au cas de l'électron, de charge $e = -|e|$. Dans le cas d'une particule de charge $Q|e|$ ($Q = -1$ pour l'électron), en partant de la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iQ|e|A_\mu, \quad (4.6)$$

on en déduit que le vertex d'interaction s'écrit

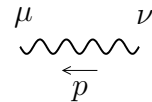


$$-iQ|e|\gamma^\mu. \quad (4.7)$$

Les propagateurs de l'électron et du photon s'écrivent respectivement :



$$\frac{i}{\not{p} - m} \quad (4.8)$$



$$\frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \quad (4.9)$$

Il est d'usage d'appeler jauge de Landau le cas $\xi = 0$ et jauge de Feynman le cas $\xi = 1$.

4.1.2 QCD

Résumons en quelques lignes la structure du lagrangien de QCD. On introduit les générateurs hermitiens t^a de la représentation fondamentale de $SU(N_c)$ ($N_c = 3$), qui sont au nombre de $N_c^2 - 1 = 8$ (étiquetés par a). Ce sont des matrices $N_c \times N_c$, hermitiennes et de trace nulle. Les quarks se transforment sous l'action des générateurs t^a et les antiquarks⁴ sous l'action des générateurs $(t^a)^*$. Ceci signifie que les quarks et les antiquarks sont du point de vue de la couleur des vecteurs à N_c composantes (notées conventionnellement Ψ^i et $\bar{\Psi}^i$ ($i = 1 \dots N_c$)). Par définition, ces matrices vérifient la relation

$$\boxed{[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c} \quad (4.10)$$

où les *constantes de structure* f^{abc} sont complètement antisymétriques⁵.

⁴Pour $N_c \geq 3$ les représentations engendrées par t^a et $(t^a)^*$ ne sont pas équivalentes : on doit donc distinguer couleur et anticouleur.

⁵La connaissance d'une réalisation explicite de t^a et f^{abc} ne joue en pratique aucun rôle.

Le champ gluonique possède $N_c^2 - 1$ couleurs possibles. Du point de vue de la couleur, c'est donc un vecteur à $N_c^2 - 1$ composantes⁶. Chacune de ces composantes est notée A^a ($a = 1 \cdots N_c^2 - 1$). La dynamique du champ de jauge est alors définie à l'aide du tenseur

$$\boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.} \quad (4.11)$$

Le couplage au champ de matière est défini à l'aide de la dérivée covariante

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a.} \quad (4.12)$$

Pour quantifier la théorie, il est nécessaire de fixer la jauge. En jauge covariante, ceci impose d'introduire des fantômes de Faddeev-Popov (notés c), qui se transforment du point de vue de la couleur comme les gluons. Ces champs violent le théorème spin-statistique (ce sont des fermions qui se comportent comme des scalaires sous le groupe de Lorentz). Ils ne peuvent apparaître comme champs externes, mais seulement dans des boucles fermées à l'intérieur des diagrammes de Feynman⁷.

Le lagrangien complet de Yang-Mills s'écrit alors

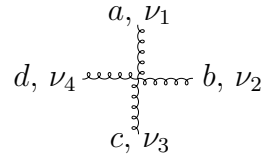
$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \bar{c}\square c + g\partial^\mu \bar{c}_b f_{bca} A_\mu^a c_c}$$

Les règles de Feynman s'en déduisent aisément. Elle s'écrivent :

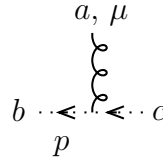
$$\begin{array}{ll} \begin{array}{c} p \\ \longleftarrow \\ i \quad j \end{array} & \frac{i}{\not{p} - m} \delta_{ij} \\ \\ \begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ a \text{~~~~~} b \end{array} & \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \delta^{ab} \\ \\ \begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ a \text{~~~~~} b \end{array} & \frac{-i\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon} \\ \\ \begin{array}{c} a, \mu \\ \text{~~~~~} \\ i \longleftarrow j \end{array} & ig\gamma^\mu t_{ij}^a \\ \\ \begin{array}{c} a, \nu_1 \\ \text{~~~~~} \\ k_1 \\ \text{~~~~~} \\ k_2 \quad k_3 \\ \text{~~~~~} \\ b, \nu_2 \quad c, \nu_3 \end{array} & gf^{abc} [g^{\nu_1\nu_2} (k_1 - k_2)^{\nu_3} + \delta^{\nu_2\nu_3} (k_2 - k_3)^{\nu_1} + \delta^{\nu_1\nu_3} (k_3 - k_1)^{\nu_2}] \end{array}$$

⁶On dit qu'il se transforme suivant la représentation adjointe.

⁷Physiquement (argument dû à Feynman), un gluon physique, de masse nulle, possède deux polarisations, comme le photon. Lorsqu'il apparaît dans une contribution virtuelle (boucle), il possède 4 polarisations possibles. L'unitarité impose que les deux polarisations non physique disparaissent, ce qui est exactement le rôle du fantôme et l'anti-fantôme. Voir par exemple Cheng-Li p.268.

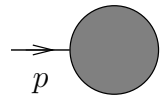
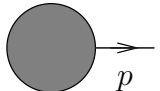
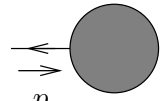
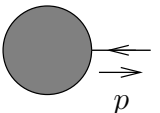
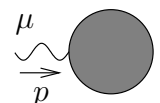
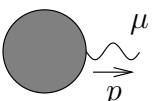


$$\begin{aligned}
 & -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g^{\nu_1\nu_3} g^{\nu_2\nu_4} - g^{\nu_1\nu_4} g^{\nu_2\nu_3}) \right. \\
 & \quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\nu_1\nu_2} g^{\nu_3\nu_4} - g^{\nu_1\nu_4} g^{\nu_2\nu_3}) \\
 & \quad \left. + f^{ade} f^{bce} (g^{\nu_1\nu_2} g^{\nu_3\nu_4} - g^{\nu_1\nu_3} g^{\nu_2\nu_4}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.13}$$



$$-g f^{abc} p^\mu$$

4.1.3 Lignes externes

fermion entrant		$u(p)$
fermion sortant		$\bar{u}(p)$
antifermion entrant		$\bar{v}(p)$
antifermion sortant		$v(p)$
photon entrant		$\epsilon_\mu(p)$
photon sortant		$\epsilon_\mu^*(p)$

(4.14)

4.2 Des amplitudes aux sections efficaces

Considérons un processus

$$(p_1 J_1) + (p_2, J_1) \rightarrow (k_1 j_1) + \cdots (k_n j_n), \tag{4.15}$$

où p_1 et p_2 sont les impulsions des particules initiales, de spins respectifs J_1 et J_2 , et $k_1, k_2 \dots k_n$ sont les impulsions des n particules finales, de spins respectifs $j_1 \dots j_n$.

La section efficace du processus s'écrit alors, en notant λ_1 et λ_2 les hélicités des particules incidentes, et $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ les hélicités des particules sortantes,

$$\sigma = \frac{1}{2K(s)} \int d\Pi_n |\mathcal{M}(p_1 \lambda_1, p_2 \lambda_2 \rightarrow k_1 \mu_1, \dots, k_n \mu_n)|^2. \quad (4.16)$$

$2K(s)$ est le facteur de flux, défini comme le produit de la densité de particules de la cible et du flux de particules incidentes, et $d\Pi_n$ est l'espace des phases. Nous allons détailler ces deux quantités ci-après.

Dans le cas où l'on ne mesure pas la polarisation des états finals, la section efficace s'obtient en sommant sur toutes ces polarisations. Si en outre les états initiaux ne sont pas polarisés, on doit moyenner la section efficace sur ces polarisations. La section efficace du processus s'écrit alors

$$\sigma_{non\ pol.} = \frac{1}{2K(s)} \frac{1}{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \dots \mu_n} \int d\Pi_n |\mathcal{M}(p_1 \lambda_1, p_2 \lambda_2 \rightarrow k_1 \mu_1, \dots, k_n \mu_n)|^2. \quad (4.17)$$

4.2.1 Facteur de flux

On montre⁸ que

$$K(s) = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} = \sqrt{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]}. \quad (4.18)$$

Cette dernière relation est valable pour un processus faisant intervenir un état virtuel de virtualité arbitraire. Les "masses" carrées m_1^2 et m_2^2 sont alors remplacées par les virtualités correspondantes. En particulier elles peuvent être négative, comme dans le cas de la diffusion $\gamma^* P$ avec un photon virtuel de genre espace.

Nous écrivons $K(s)$ comme fonction de la variable de Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$, puisque $p_1 \cdot p_2 = (s - m_1^2 - m_2^2)/2$. Dans le cas habituel où les masses m_1 et m_2 sont positives, on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \lambda(s, m_1^2, m_2^2) &= 4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2] = [2(p_1 \cdot p_2) - 2m_1 m_2][2(p_1 \cdot p_2) + 2m_1 m_2] \\ &= [s - m_1^2 - m_2^2 - 2m_1 m_2][s - m_1^2 - m_2^2 + 2m_1 m_2] \end{aligned} \quad (4.19)$$

soit⁹

$$\boxed{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}. \quad (4.20)$$

Deux cas particuliers sont utiles :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda(s, 0, M) &= (s - M^2)^2 & : & \text{une des masses est nulle} \\ \lambda(s, 0, 0) &= s^2 & : & \text{les deux masses sont nulles.} \end{aligned}} \quad (4.21)$$

⁸La notation λ est standard dans la littérature.

⁹La fonction $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ ne dépend que de s et du carré des masses, fait qui est caché dans l'écriture du membre de droite de (4.19). On notera que la fonction $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ est bien symétrique en $m_1^2 \leftrightarrow m_2^2$, comme attendu.

Dans le référentiel du centre de masse, le facteur de flux possède une expression particulière-
ment simple¹⁰, très utile en pratique¹¹ :

$$\boxed{2K = 4p_i^* W^*} \quad (4.22)$$

où $W^* = E_1^* + E_2^*$ est l'énergie totale dans le centre de masse.

Preuve:

Partant de

$$\begin{cases} E_1^{*2} - p_i^{*2} = m_1^2 \\ E_2^{*2} - p_i^{*2} = m_2^2 \end{cases}$$

avec $p_i^* \equiv p_1^* = p_2^*$, on tire

$$2K = 4 \left[(E_1^* E_2^* + p_i^{*2})^2 - (E_1^{*2} - p_i^{*2})(E_2^{*2} - p_i^{*2}) \right]^{1/2} = 4 \left[(E_1^* + E_2^*)^2 p_i^{*2} \right]^{1/2} = 4 (E_1^* + E_2^*) p_i^* .$$

4.2.2 Espace des phases

$d\Pi_n$ est l'espace des phases, dont la forme invariante relativiste est donnée par

$$d\Pi_n = \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3 2k_j^0} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{j=1}^n k_j - p_1 - p_2 \right) . \quad (4.23)$$

Considérons à présent la réaction 2 corps \rightarrow 2 corps

$$(p_1 J_1) + (p_2 J_2) \rightarrow (p_3 J_3) + (p_4 J_4) , \quad (4.24)$$

pour laquelle

$$d\Pi_2 = \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2p_4^0} (2\pi)^4 \delta^4 (p_3 + p_4 - p_1 - p_2) . \quad (4.25)$$

L'espace des phases, qui fait intervenir 6 variables, se réduit à une intégration sur 2 variables indépendantes à cause de la conservation globale d'énergie-impulsion. En intégrant sur p_4 , il se déduit donc à¹²

$$\int d^3 p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3 p_4} = \frac{p_3^2 dp_3 d^2 \Omega}{(2\pi)^3 2E_3 2E_4} (2\pi) \delta(W - E_3(\vec{p}_3) - E_4(\vec{p}_3)) , \quad (4.26)$$

avec¹³

$$E_3(\vec{p}_3) = p_3^0 = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2} \quad \text{et} \quad E_4(\vec{p}_3) = p_4^0 = \sqrt{\vec{p}_4^2(\vec{p}_3) + m_4^2}, \quad \text{où} \quad \vec{p}_4(\vec{p}_3) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 . \quad (4.27)$$

¹⁰Elle reste valable y compris dans le cas où les états initiaux sont virtuels, en particulier de virtualité négative.

¹¹Nous adoptons la notation suivant laquelle une quantité surmontée de * est mesurée dans le référentiel du centre de masse.

¹²On note $p_3 = |\vec{p}_3|$, que l'on ne confondra pas dans ce contexte avec le quadrivecteur p_3 .

¹³Les paramètres cinématiques externes fixant complètement l'impulsion totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ et l'énergie totale W (qui dépendent du référentiel), on a bien un espace des phases qui ne dépend que de 2 variables indépendantes.

$d^2\Pi_2$ peut donc s'écrire en fonction de $d^2\Omega$ uniquement.

Dans le référentiel du centre de masse, cet espace des phases possède une expression particulièrement simple :

$$\int dp_3^* d^3p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3p_4 dp_3^*} = \frac{p_3^*}{16\pi^2 W^*}. \quad (4.28)$$

Preuve:

Partant de

$$\int d^3p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3p_4} = d^2\Omega^* \frac{p_3^{*2} dp_3^*}{16\pi^2 E_3^* E_4^*} \delta(W^* - E_3^*(\vec{p}_3^*) - E_4^*(\vec{p}_3^*)), \quad (4.29)$$

nous pouvons écrire,¹⁴ en utilisant (4.27) dans le cas où $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0$ et en posant

$$p_3^*(E_3^*) = \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \int d^3p_4 \frac{d\Pi_2}{d^3p_4} &= d^2\Omega^* \frac{p_3^{*2} dp_3^*}{16\pi^2 E_3^* E_4^*} \left| \frac{d[E_3^*(\vec{p}_3^*) + E_4^*(\vec{p}_3^*)]}{dp_3^*} \right|^{-1} \delta(p_3^* - p_3^*(E_3^*)) \\ &= d^2\Omega^* \frac{p_3^{*2} dp_3^*}{16\pi^2 E_3^* E_4^*} \frac{1}{\frac{p_3^*}{E_3^*} + \frac{p_3^*}{E_4^*}} \delta(p_3^* - p_3^*(E_3^*)) \\ &= d^2\Omega^* \frac{p_3^* dp_3^*}{16\pi^2 W^*} \delta(p_3^* - p_3^*(E_3^*)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

La section efficace différentielle s'écrit donc

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega^*} = \frac{1}{2K(s)} \frac{p_3^*}{16\pi^2 W^*} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2, \quad (4.32)$$

soit encore, d'après (4.22), et en notant $p_f^* = p_3^*$ et $p_i^* = p_1^*$,

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d^2\Omega^*} = \frac{p_f^*}{p_i^*} \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2}, \quad (4.33)$$

puisque $s = W^{*2}$. Notons que p_i^* et p_f^* s'expriment sous forme invariante relativiste de façon très simple : en effet, d'après (4.22), pour toute réaction 2 corps $\rightarrow n$ corps

$$\boxed{p_i^* = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2\sqrt{s}}}, \quad (4.34)$$

et dans le cas de la réaction 2 corps $\rightarrow 2$ corps, nous avons en outre

$$\boxed{p_f^* = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s}}}. \quad (4.35)$$

On peut noter qu'un choc élastique, correspondant par définition à $m_1 = m_3$ et $m_2 = m_4$ (ou $m_1 = m_4$ et $m_2 = m_3$) donne bien $p_i^* = p_f^*$, comme en mécanique classique.

¹⁴Rappelons que $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ où x_i sont les racines de $f(x) = 0$.

4.2.3 Variables de Mandelstam

La réaction à 2 corps \rightarrow 2 corps

$$(p_1 J_1) + (p_2 J_2) \rightarrow (p_3 J_3) + (p_4 J_4) \quad (4.36)$$

est complètement caractérisée¹⁵ par les variables de Mandelstam définies par

$$\begin{array}{l} s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t \equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u \equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \end{array} \quad (4.37)$$

les expressions équivalentes découlant de la conservation de l'énergie-impulsion. Ces variables sont illustrées sur la figure 4.1. Chacune des variables peut être considérée comme une variable

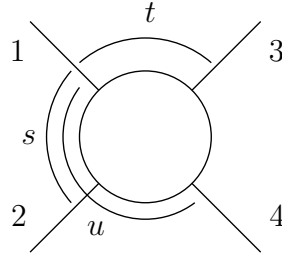


FIG. 4.1 – Variables de Mandelstam pour un processus 2 corps \rightarrow 2 corps.

“s” pour un processus croisé :

	variable “ s ”	variable “ t ”	variable “ u ”
voie s : $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$	s	t	u
voie t : $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$	t	s	u
voie u : $1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2}$	u	t	s

(4.38)

En effet, une particule i d'impulsion p_i avec $p^0 > 0$ doit être considérée comme son antiparticule \bar{i} , d'impulsion $-p_i$ lorsque $p^0 < 0$. La même amplitude $\mathcal{M}(s, t, u)$ décrit donc ces 3 réactions, ainsi que toutes les réactions de désintégration 1 corps \rightarrow 3 corps (par exemple $1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4$) et toutes les réactions inverses (par exemple $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$), par prolongement analytique sur les variables s, t, u .

On tire immédiatement de la conservation de l'énergie impulsion la relation

$$s + t + u = \sum_i m_i^2. \quad (4.39)$$

Preuve:

¹⁵Si l'on ne prend pas en compte des effets de spin.

Il suffit de calculer $2(s + t + u)$ en sommant les 6 termes de (4.37) et d'utiliser ensuite la conservation de l'énergie impulsion :

$$\begin{aligned}
2(s + t + u) &= 3 \sum_i m_i^2 + 2p_1 \cdot p_2 + 2p_3 \cdot p_4 - 2p_1 \cdot p_3 - 2p_2 \cdot p_4 - 2p_1 \cdot p_4 - 2p_2 \cdot p_3 \\
&= 3 \sum_i m_i^2 + 2p_1 \cdot p_2 + 2p_3 \cdot p_4 - 2(p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) \\
&= 3 \sum_i m_i^2 + (s - m_1^2 - m_2^2) + (s - m_3^2 - m_4^2) - 2s = 2 \sum_i m_i^2.
\end{aligned}$$

En conséquence, l'amplitude diffusion ne dépend que de deux variables indépendantes. On choisit conventionnellement d'écrire

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{M}(s, t)}.$$

Dans le référentiel du centre de masse, un calcul élémentaire¹⁶ montre que

$$\boxed{
\begin{aligned}
E_1^* &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, & E_3^* &= \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \\
E_2^* &= \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}, & E_4^* &= \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}.
\end{aligned}
} \quad (4.40)$$

En utilisant les relations (4.34) et (4.35) (ainsi que les expressions analogues pour les voies croisées : pour la voie t on considère $\lambda(t, m_1^2, m_3^2)$ et $\lambda(t, m_2^2, m_4^2)$ et pour la voie u on considère $\lambda(u, m_1^2, m_4^2)$ et $\lambda(u, m_2^2, m_3^2)$) et les expressions précédentes des énergies dans le centre de masse (et les expressions correspondantes pour les réactions croisées), on déduit les conditions de seuils suivantes¹⁷ :

$$\boxed{
\begin{aligned}
\text{voie } s : & \quad 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 : \quad s \geq (m_1 + m_2)^2 \quad \text{et} \quad (m_3 + m_4)^2 \\
\text{voie } t : & \quad 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 : \quad t \geq (m_1 + m_3)^2 \quad \text{et} \quad (m_2 + m_4)^2 \\
\text{voie } u : & \quad 1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2} : \quad u \geq (m_1 + m_4)^2 \quad \text{et} \quad (m_2 + m_3)^2
\end{aligned}
} \quad (4.41)$$

Il est souvent utile d'exprimer la section efficace différentielle (4.33) en terme des invariants relativistes. Pour cela, exprimons l'angle de diffusion¹⁸ θ de la réaction en voie s :

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta. \quad (4.42)$$

soit

$$\cos \theta = \frac{t - m_1^2 - m_3^2 + 2E_1 E_3}{2|\vec{p}_1||\vec{p}_3|}. \quad (4.43)$$

¹⁶Par exemple pour exprimer E_1^* , il suffit de combiner (4.34) et $E_1^{*2} = \vec{p}_1^{*2} + m_1^2$.

¹⁷La condition à écrire est que p_1^* et p_3^* doivent être positives, et que les énergies E_i^* doivent être toutes positives.

¹⁸Noté θ_{13} ou θ_s dans la littérature : c'est l'angle de diffusion entre les particules 1 et 3, c'est-à-dire l'angle de la diffusion en voie s .

En terme de la variable u , l'angle diffusion s'écrit

$$\cos \theta = \frac{m_2^2 - m_4^2 - s - u + 2 E_1 E_3}{2 |\vec{p}_1| |\vec{p}_3|}. \quad (4.44)$$

Dans un référentiel arbitraire, pour s et E_1 fixés, E_3 et $|\vec{p}_3|$, dépendent de $\cos \theta$, ce qui rend la discussion délicate. Dans le référentiel du centre de masse, nous pouvons écrire

$$\cos \theta^* = \frac{t - m_1^2 - m_3^2 + 2 E_1^* E_3^*}{2 p_1^* p_3^*} \quad (4.45)$$

$$\cos \theta^* = \frac{m_2^2 + m_4^2 - s - u + 2 E_1^* E_3^*}{2 p_1^* p_3^*}, \quad (4.46)$$

expressions dans lesquelles E_1^* , E_3^* , p_1^* et p_3^* sont fixées pour s donné par (4.40) et (4.34, 4.35). On constate alors sur les expressions (4.45) et (4.46) que

réaction vers l'avant ($\theta^* = 0$) \iff valeur maximale ¹⁹ (en valeur algébrique) de t
réaction vers l'arrière ($\theta^* = \pi$) \iff valeur maximale (en valeur algébrique) de u

(4.47)

Dans ce référentiel du centre de masse, on déduit donc de (4.45, 4.46) et de (4.34, 4.35, 4.40) que l'angle θ^* peut être exprimé dans ces variables invariantes :

$$\begin{aligned} \cos \theta^* = \frac{t - m_1^2 - m_3^2 + 2 E_1^* E_3^*}{2 p_1^* p_3^*} &= \frac{s^2 + s(2t - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)}} \\ &= \frac{s(t - u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Remarque:

On constate sur cette relation que dans la limite de haute énergie où $s \gg -t$, m_i^2 , appelée *limite de Regge*, $\theta^* \rightarrow 0$ puisque $\lambda(s, m_i^2) \sim s^2$: dans cette limite, la diffusion vers l'avant régit le comportement de l'amplitude.

Pour un s donné, la contrainte $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ détermine la région physique en t :

$$t^- \leq t \leq t^+ \quad \text{avec} \quad (4.49)$$

$$t^\pm = m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s} \{ (s + m_1^2 - m_2^2)(s + m_3^2 - m_4^2) \mp \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \}. \quad (4.50)$$

La discussion est plus éclairante dans le cas où toutes les masses sont égales ($m_i^2 = m^2$). On a alors $\lambda(s, m^2, m^2) = s(s - 4m^2)$ et

$$\cos \theta^* = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}. \quad (4.51)$$

¹⁹Notée en général $|t|_{min}$ dans la littérature, car elle est en général proche de 0, donc t est pratiquement quasiment toujours négatif, et $|t|$ est alors en général supérieur à cette valeur $|t|_{min}$. On a $|t|_{min} = |t^+|$, avec t^+ défini par (4.50).

Le domaine physique de la réaction est alors donné par les conditions

$$s \geq 4m^2 \quad \text{et} \quad t^- = 4m^2 - s \leq t \leq t^+ = 0. \quad (4.52)$$

On vérifie alors que

$$\begin{aligned} u &= -\frac{s - 4m^2}{2}(1 + \cos \theta) \\ t &= -\frac{s - 4m^2}{2}(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

et on retrouve le fait que

- t négatif, petit en valeur absolue, correspond à θ^* petit (avant),
- u négatif, petit en valeur absolue, correspond à $\pi - \theta^*$ petit (arrière).

Revenons maintenant à notre problème consistant à exprimer la section efficace différentielle (4.33) en terme des invariants relativistes. De (4.45) on tire

$$d \cos \theta^* = \frac{dt}{2p_1^* p_3^*}. \quad (4.53)$$

et donc, puisque $d^2\Omega^* = d\phi^* d \cos \theta^*$, et en utilisant (4.33),

$$\frac{d\sigma}{dt d\phi^*} = \frac{d\sigma}{2p_1^* p_3^* d^2\Omega^*} = \frac{1}{128\pi^2 s p_1^{*2}} |\mathcal{M}(s, t, \phi)|^2. \quad (4.54)$$

Dans le cas où la réaction étudiée est symétrique par rapport à l'axe de collision, on peut intégrer sur ϕ^* et donc

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s p_1^{*2}} |\mathcal{M}(s, t)|^2}. \quad (4.55)$$

Il est souvent utile en pratique d'exprimer la section efficace dans le référentiel du laboratoire, dans lequel la cible est au repos. Plutôt que d'expliciter le boost permettant de relier un référentiel à l'autre, il est plus simple de passer par l'invariant relativiste t . Posons

$$q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2. \quad (4.56)$$

Alors

$$t = q^2 = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta. \quad (4.57)$$

La relation $p_4 = p_2 + q$ permet d'écrire

$$m_4^2 = m_2^2 + 2q \cdot p_2 + q^2$$

et donc

$$t = q^2 = -2q \cdot p_2 + m_4^2 - m_2^2 = -2m_2(E_1 - E_3) + m_4^2 - m_2^2 \quad (4.58)$$

dans le référentiel du laboratoire où la particule 2 est au repos. On tire donc de (4.57) et (4.58), puisque $|\vec{p}_3| = \sqrt{E_3^2 - m_3^2}$,

$$dt = -2E_1 dE_3 + 2|\vec{p}_1| \frac{E_3 dE_3}{|\vec{p}_3|} \cos \theta + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| d \cos \theta = 2m_2 dE_3, \quad (4.59)$$

d'où finalement, après élimination de dE_3 ,

$$dt = \frac{2 m_2 |\vec{p}_1| |\vec{p}_3|^2}{(m_2 + E_1) |\vec{p}_3| - E_3 |\vec{p}_1| \cos \theta} d \cos \theta. \quad (4.60)$$

Dans la limite où m_1 et m_3 sont négligeable devant E_1 et E_3 , cette expression se simplifie en

$$dt = \frac{2 m_2 E_1 E_3}{m_2 + E_1 (1 - \cos \theta)} d \cos \theta.$$

En utilisant (4.57) et (4.58), on obtient

$$2 E_1 E_3 (1 - \cos \theta) = 2 m_2 (E_1 - E_3) + m_2^2 - m_4^2$$

d'où finalement

$$dt = \frac{2 E_3^2}{1 + \frac{m_2^2 - m_4^2}{m_2 E_1}} d \cos \theta. \quad (4.61)$$

Dans la limite où l'énergie E_1 est grande devant m_2^2 , m_4^2 , on écrira

$$dt = 2 E_3^2 d \cos \theta. \quad (4.62)$$

De l'identité

$$\frac{d^2 \Omega}{d^2 \Omega^*} = \frac{d \cos \theta}{d \cos \theta^*} \quad (4.63)$$

et en égalant les deux expressions (4.53) et (4.60) obtenues pour dt , on déduit dans la limite où $m_1 = m_3 = 0$ et $m_2 = m_4$, que

$$\frac{d^2 \Omega}{d^2 \Omega^*} = \frac{p_1^{*2}}{E_3^2}. \quad (4.64)$$

Il nous reste à évaluer p_1^* , qui vaut, d'après (4.34) et en utilisant (4.21),

$$p_1^* = \frac{s - m_2^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m_2 E_1}{\sqrt{s}}$$

puisque $s = (p_1 + p_2)^2 = m_2 + 2 m_2 E_1$. et l'on obtient finalement

$$\frac{d^2 \Omega}{d^2 \Omega^*} = \frac{m_2^2 E_1^2}{s E_3^2}. \quad (4.65)$$

En combinant ce résultat avec l'expression (4.33), nous obtenons donc finalement la relation

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d^2 \Omega} = \frac{E_3^2}{m_2^2 E_1^2} \frac{1}{64 \pi^2} |\mathcal{M}(s, t)|^2 \quad (\text{réf. du lab.})} \quad (4.66)$$

4.2.4 Somme sur les spins

Rappelons tout d'abord que les bispineurs $u^s(p)$ et $v^s(p)$ sont solution de l'équation de Dirac, et que les bispineurs sont solutions de l'équation conjuguée, i.e.

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u^s(p) &= \bar{u}^s(p) (\not{p} - m) = 0 \\ (\not{p} + m) v^s(p) &= \bar{v}^s(p) (\not{p} + m) = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Les bispineurs sont normalisés suivant²⁰

$$\bar{u}^s(p) u^{s'}(p) = 2m \delta^{ss'}, \quad \bar{v}^s(p) v^{s'}(p) = -2m \delta^{ss'}, \quad (4.68)$$

et sont orthogonaux entre eux :

$$\bar{u}^s(p) v^{s'}(p) = \bar{v}^s(p) u^{s'}(p) = 0. \quad (4.69)$$

Dans de nombreuses situations, il est utile de pouvoir sommer sur les polarisations des fermions. Dans ce cas, les relations suivantes sont particulièrement utiles :

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad (4.70)$$

et

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (4.71)$$

4.2.5 Calcul des traces : un peu de γ -gymnastique

Le calcul des sections efficaces, une fois les différentes topologies de diagrammes énumérées et traduites algébriquement, se ramène, lorsque des contributions fermioniques entrent dans ces diagrammes, à un calcul de trace²¹ de produit de matrices de Dirac. Cette partie du calcul est rapidement très pénible, dès que les diagrammes se compliquent.

Nous donnons ici quelques identités utiles²². Rappelons tout d'abord que la matrice γ^5 , qui permet de définir l'hélicité d'un fermion, s'écrit

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (4.72)$$

C'est donc le produit d'un nombre *pair* de matrices γ . La matrice $\sigma^{\mu\nu}$ est définie²³ par

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (4.73)$$

L'ensemble des 16 matrices $I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5$ forme une base des matrices de Dirac. Elles vérifient les propriétés suivantes :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (4.74)$$

$$\gamma_5^2 = I \quad (4.75)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (4.76)$$

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (4.77)$$

²⁰Normalisation de Peskin-Schroeder. Dans Itzykson-Zuber, la normalisation est choisie *sans facteur* $2m$.

²¹Dans la littérature russe, on utilise fréquemment la notation Sp pour la trace, abréviation de l'allemand "Spur". Les matrices du type \not{p} sont quant à elles en général notées \hat{p} .

²²Démontrées et discutées en détail dans Peskin-Schroeder ou Itzykson-Zuber par exemple.

²³Cette notation est standard. Exception notable : dans *Théorie Quantique Relativiste* de Lifchitz et Pitayevski (série des Landau), on pose $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Nous donnons ici les principales formules permettant de mener à bien les calculs de traces :

$$\text{Tr } I = 4 \quad (4.78)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad (4.79)$$

$$\text{Tr } \sigma^{\mu\nu} = 0 \quad (4.80)$$

$$\text{Tr} (\text{nombre } \textit{impair} \text{ de matrices } \gamma) = 0 \quad (4.81)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu} \quad (4.82)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (4.83)$$

$$\text{Tr } \gamma^5 = 0 \quad (4.84)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 = 0 \quad (4.85)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5 = -4 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.86)$$

où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur complètement anti-symétrique de Levi-Civita, avec²⁴ $\epsilon^{0123} = +1$ et $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Le calcul des traces se fait en pratique, dès que les diagrammes se compliquent, à l'aide de calculateurs algébriques²⁵.

4.3 Théorème optique

Toute théorie quantique définie de façon cohérente doit être unitaire. Ceci signifie que partant d'une situation physique donnée (par exemple un état constitué de deux hadrons), la somme sur toutes les probabilités d'obtenir tous les états physiques final doit être égale à 1. Ceci s'écrit

$$S \cdot S^\dagger = S^\dagger \cdot S = 1. \quad (4.87)$$

Réécrivons cette dernière identité à l'aide de la matrice de diffusion T : de $S = 1 + iT$ on tire

$$(1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1$$

soit

$$T^\dagger T = -i(T - T^\dagger)$$

soit encore matriciellement

$$(T^\dagger)_{fn} T_{ni} = -i(T - T^\dagger)_{fi}. \quad (4.88)$$

Ceci s'écrit²⁶

$$\sum_n \mathcal{M}_{nf}^* \mathcal{M}_{ni} (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) = -i(\mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}_{if}^*). \quad (4.89)$$

Dans le cas particulier où $i = f$ (état initial et état final identiques), cette identité se réduit à

$$(T^\dagger)_{in} T_{ni} = -i(T - T^\dagger)_{ii},$$

²⁴Cette convention dépend des auteurs. La convention choisie ici est celle de Peskin-Schroeder et Itzykson-Zuber.

²⁵On peut citer par exemple FeynCalc sous Mathematica.

²⁶De façon équivalente, partant de $S \cdot S^\dagger = 1$, on obtient $\sum_n \mathcal{M}_{fn} \mathcal{M}_{in}^* (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) = -i(\mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}_{if}^*)$.

soit encore

$$T_{ni}^* T_{ni} = -i (T - T^*)_{ii} = 2 \operatorname{Im} T_{ii}, \quad (4.90)$$

et donc

$$\sum_n |\mathcal{M}_{ni}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) = 2 \operatorname{Im} \mathcal{M}_{ii}. \quad (4.91)$$

La section efficace totale d'un processus $i \rightarrow X$ s'écrit

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, m_1, m_2)}} \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) |\mathcal{M}_{ni}|^2, \quad (4.92)$$

soit encore, compte tenu de (4.91),

$$\boxed{\sigma_{tot} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(s, m_1, m_2)}} \operatorname{Im} \mathcal{M}_{ii}(s, t = 0)}. \quad (4.93)$$

C'est le théorème optique, qui relie la section efficace totale du processus à la partie imaginaire de l'amplitude élastique vers l'avant. Dans le cas où les masses sont nulles ou négligeables, ce théorème se déduit à

$$\boxed{\sigma_{tot} = \frac{1}{s} \operatorname{Im} \mathcal{M}_{ii}(s, t = 0)}. \quad (4.94)$$

4.4 Décomposition de Fierz

En dimension 4, les matrices de Dirac sont au nombre de 16 :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_S & \Gamma_V^\mu & \Gamma_T^{\mu\nu} & \Gamma_A^\mu & \Gamma_P \\ I & \gamma^\mu & \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] & \gamma^5 \gamma^\mu & i \gamma^5 \end{array} \quad (4.95)$$

On pose²⁷

$$\Gamma_\alpha \equiv (\Gamma^\alpha)^{-1}. \quad (4.96)$$

On peut alors vérifier que

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^{-1} &= \gamma_\mu \equiv \Gamma_{V\mu}, & (\sigma^{\mu\nu})^{-1} &= \sigma_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{T\mu\nu}, \\ (\gamma^5 \gamma^\mu)^{-1} &= \gamma_\mu \gamma^5 \equiv \Gamma_{A\mu}, & (i \gamma^5)^{-1} &= -i \gamma^5 \equiv \Gamma_P^{-1}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

On sait que le conjugué hermitique des matrices Γ^α s'obtient par entrelacement avec la matrice γ^0 :

$$\gamma^0 (\Gamma^\alpha)^\dagger \gamma^0 = \Gamma^\alpha$$

d'où l'on déduit que toutes les quantités du type $\bar{\Psi} \Gamma^\alpha \Psi$ sont hermitiennes.

Preuve:

²⁷Pour les matrices γ^μ , ceci est compatible avec le fait que $(\gamma^\mu)^{-1} = \gamma_\mu$ (au sens du calcul covariant avec le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$).

$$[\bar{\Psi}\Gamma^\alpha\Psi]^\dagger = \Psi^\dagger\Gamma^{\alpha\dagger}(\Psi^\dagger\gamma^0)^\dagger = \Psi^\dagger\gamma^0\Gamma^\alpha\gamma^0\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\Gamma^\alpha\Psi = \bar{\Psi}\Gamma^\alpha\Psi.$$

Partant de (4.97), on en déduit immédiatement que

$$\text{Tr}\Gamma^\alpha\Gamma_\beta = 4\delta_\beta^\alpha. \quad (4.98)$$

Toute matrice 4×4 peut se décomposer dans la base des matrices Γ^α , et l'identité précédente permet d'exprimer facilement les coefficients de cette décomposition :

$$X = x_\alpha \Gamma^\alpha = \frac{1}{4}\Gamma^\alpha \text{Tr}(X\Gamma_\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma_\alpha \text{Tr}(X\Gamma^\alpha). \quad (4.99)$$

L'élément de matrice $X_{\bar{b}a}$ vérifie donc

$$X_{\bar{b}a} = \delta_{\bar{b}b} \delta_{a\bar{a}} X_{ba} = \frac{1}{4}\Gamma_{\alpha\bar{b}a} X_{ba} \Gamma_{ab}^\alpha \quad (4.100)$$

et donc, après identification du coefficient de X_{ba} ,

$$\boxed{\delta_{\bar{b}b} \delta_{a\bar{a}} = \frac{1}{4}\Gamma_{\alpha\bar{b}a} \Gamma_{ab}^\alpha}, \quad (4.101)$$

qui est la décomposition de Fierz de l'identité pour les bispineurs. Cette identité est illustrée dans la Fig.4.4.

4.5 Kaléidoscope : un peu de couleur

Dans cette partie, nous allons développer un langage graphique très pratique pour calculer les facteurs de couleur.

Une représentation graphique des générateurs de l'algèbre de Lie dans la représentation fondamentale t_{ij}^a est donnée par

$$\begin{array}{c} a \\ \updownarrow \\ i \longleftarrow \longleftarrow j \end{array} \equiv t_{ij}^a. \quad (4.102)$$

Les lignes fondamentales portent une flèche pour distinguer les représentations N et \bar{N} qui ne sont pas équivalentes pour $N \geq 3$.

La représentation graphique du générateur $(t^a)_{ij}^*$ est donnée par

$$\begin{array}{c} a \\ \updownarrow \\ i \longrightarrow \longrightarrow j \end{array} \equiv (t^a)_{ij}^*. \quad (4.103)$$

Comme t^a est hermitienne,

$$(t^a)^\dagger_{ij} = \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ j \longrightarrow i \end{array} = t^a_{ij} = \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ i \longleftarrow j \end{array} \quad (4.104)$$

On peut bien sûr, en tournant le dessin de π , écrire

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ j \longrightarrow i \end{array} = \begin{array}{c} i \longleftarrow j \\ \text{---} \\ a \end{array} \quad (4.105)$$

donc l'hermiticité (4.104) a pour conséquence que

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ i \longleftarrow j \end{array} = \begin{array}{c} i \longleftarrow j \\ \text{---} \\ a \end{array} \quad (4.106)$$

Ces règles étant établies, un produit successif de générateurs s'écrit *en remontant les flèches*, comme pour les matrices γ de Dirac.

Les générateurs sont normalisés de façon conventionnelle par la relation²⁸

$$\boxed{\text{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}} \quad (4.107)$$

Cette relation, similaire à (4.98), permet de démontrer l'identité de Fierz

$$\boxed{t^a_{ij} t^a_{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)} \quad (4.108)$$

Preuve:

L'idée de la preuve est identique à celle utilisée pour le cas des spineurs :

I et t^a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) forment une base des matrices hermitiennes $N \times N$. Pour une matrice hermitienne A arbitraire, on peut donc écrire

$$A = c^0 I + c^a t^a. \quad (4.109)$$

En utilisant (4.107), on en déduit l'expression des coefficients de la décomposition (4.109), sous la forme

$$c^0 = \frac{\text{Tr} A}{N} \quad \text{et} \quad c^a = 2 \text{Tr}[t^a A]. \quad (4.110)$$

On peut donc écrire (4.109) sous la forme, en considérant le coefficient ij ,

$$\frac{\text{Tr} A}{N} \delta_{ij} + 2 t^a_{kl} A_{lk} t^a_{ij} = A_{ij}$$

²⁸Ce choix est bien sûr compatible avec la relation (4.10).

soit encore, pour tout $A_{\ell k}$,

$$A_{\ell k} \left[\frac{1}{N} \delta_{k\ell} \delta_{ij} + 2 t_{ij}^a t_{k\ell}^a - \delta_{i\ell} \delta_{jk} \right] = 0$$

ce qui achève la preuve par identification du coefficient de $A_{k\ell}$.

Cette identité de Fierz peut se visualiser graphiquement :

$$\begin{array}{c} i \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ j \end{array} \begin{array}{c} \ell \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ k \end{array} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} i \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ j \end{array} \begin{array}{c} \ell \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ k \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} i \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ j \end{array} \begin{array}{c} \ell \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ k \end{array} \right) \quad (4.111)$$

Calculons à présent quelques facteurs de couleur typiques, que nous rencontrerons fréquemment.

De (4.108) on tire facilement²⁹

$$(t^a t^a)_{ij} = t_{ik}^a t_{kj}^a = \sum_k \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} \delta_{kk} - \frac{1}{N} \delta_{ik} \delta_{kj} \right) = \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ij} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ij},$$

dont on peut donner une preuve graphique :

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[N \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} \right] = \frac{N^2 - 1}{2N} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array}$$

Ainsi

$$(t^a t^a)_{ij} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ij} \equiv C_F \delta_{ij} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{c} a \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ a \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ i \end{array} = C_F \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ i \end{array} \quad (4.112)$$

Montrons à présent que

$$(t^a t^b t^a)_{ij} = -\frac{1}{2N} t_{ij}^b \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{c} b \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ a \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ i \end{array} = -\frac{1}{2N} \begin{array}{c} b \\ \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \\ a \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ i \end{array} \quad (4.113)$$

Preuve:

En utilisant l'identité de Fierz on obtient

$$(t^a t^b t^a)_{ij} = t_{ij'}^a t_{j'k'}^b t_{k'j}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} \delta_{j'k'} - \frac{1}{N} \delta_{ij'} \delta_{k'j} \right) t_{j'k'}^b = -\frac{1}{2N} t_{ij}^b$$

²⁹Ce résultat est mathématiquement prévisible : $t^a t^a$ est un Casimir de $SU(N)$, donc d'après le lemme de Schur c'est un multiple de l'identité. Pour trouver ce facteur multiplicatif C_F , il suffit de calculer la trace de $t^a t^a$, qui vaut $C_F N$ ($\text{Tr } I = N$). Or $\text{Tr}(t^a t^a) = \frac{1}{2} \delta^{aa} = \frac{N^2 - 1}{2}$ (nombre de générateurs = $N^2 - 1$), d'où $C_F = \frac{N^2 - 1}{2}$.

puisque $t_{j'j'}^b = 0$ (les générateurs sont de trace nulle).

Graphiquement :

où l'on a utilisé le fait que $\text{Tr } t^b = 0$.

Des règles graphiques peuvent également être établies afin de calculer les facteurs de couleur des diagrammes non abéliens. Nous nous contenterons de montrer algébriquement l'identité suivante :

$$f^{acd} f^{bcd} = N \delta^{ab} \equiv C_A \delta^{ab} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{c} d \\ \circlearrowleft \\ a \quad b \\ \circlearrowright \\ c \end{array} = -C_A \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (4.114)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \text{Tr} ([t^a, t^c] [t^b, t^c]) &= \text{Tr} (i f^{acd} t^d i f^{bce} t^e) \\ &= -f^{acd} f^{bce} \text{Tr}(t^d t^e) = -\frac{1}{2} f^{acd} f^{bcd}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

donc

$$\begin{aligned} f^{acd} f^{bcd} &= -2 \text{Tr} ([t^a, t^c] [t^b, t^c]) \\ &= -2 \text{Tr} (t^a t^c t^b t^c + t^c t^a t^c t^b - t^c t^a t^b t^c - t^a t^c t^c t^b) \\ &= -2 \text{Tr} (2 t^a t^c t^b t^c - (t^a t^b + t^b t^a) t^c t^c) \end{aligned} \quad (4.116)$$

où l'on a utilisé l'invariance de la trace par permutation cyclique, ce qui finalement donne, en utilisant les relations (4.112) et (4.113), ainsi que la normalisation (4.107),

$$f^{acd} f^{bcd} = -2 \text{Tr} \left(-\frac{1}{N} t^a t^b - \frac{N^2 - 1}{2N} 2 t^a t^b \right) = 2N \text{Tr} (t^a t^b) = N \delta^{ab}. \quad (4.117)$$

Chapitre 5

Représentation spectrale de Källén-Lehmann et renormalisation des champs en formulation canonique

Dans ce chapitre, comme préambule à la renormalisation, nous allons tenter de donner un sens aux limites

$$\begin{cases} \varphi(x) \xrightarrow{x_0 \rightarrow -\infty} Z^{1/2} \varphi_{in}(x) \\ \varphi(x) \xrightarrow{x_0 \rightarrow +\infty} Z^{1/2} \varphi_{out}(x) \end{cases} \quad (\text{limites adiabatiques}) \quad (5.1)$$

dans un **sens faible**, c'est-à-dire que ces limites sont à comprendre comme limite des éléments de matrice correspondants. Rappelons que $\varphi_{in(out)}$ sont des champs libres décrivant les états à une particule. Ces champs permettent de représenter un système longtemps avant (après) un processus de diffusion.

$\varphi_{in}(x)|0\rangle$ ne peut contenir que des états à une particule, alors que $\varphi(x)|0\rangle$ est constitué d'états avec un nombre quelconque de particule. La normalisation de $\varphi(x)$ et de $\varphi_{in}(x)$, $\varphi_{out}(x)$ impose donc intuitivement que $0 \leq Z \leq 1$.

5.1 Propagateur scalaire complet

Nous nous proposons d'étudier la fonction de corrélation $\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$ (on suppose que ϕ est un champ scalaire), où $|\Omega\rangle$ est le vide physique, c'est-à-dire le niveau fondamental.

5.1.1 Décomposition sur l'identité

On insère la relation de complétude sur l'espace de Hilbert

$$\mathbb{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} |\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|, \quad (5.2)$$

où la somme porte sur tous les états $|\lambda_0\rangle$ d'impulsion nulle, l'état $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ étant obtenu par boost de l'état $|\lambda_0\rangle$.

$|\lambda_0\rangle$ n'est pas un état à une particule a priori, mais un état quelconque, d'énergie m_λ dans le référentiel où l'impulsion totale de cet état est nulle.

On pose $E_{\vec{p}}(\lambda) = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$ (analogue de $E_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ pour un état à une particule de masse m).

Ainsi

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle \langle \lambda_{\vec{p}} | \phi(y) | \Omega \rangle \quad (5.3)$$

$$+ \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle. \quad (5.4)$$

Le terme (5.4) est constant, à cause de l'invariance du vide par translation. Par symétrie du lagrangien, on peut généralement le considérer nul. Dans tous les cas où ϕ serait non scalaire, il est nul par invariance de $|\Omega\rangle$ sous le groupe de Lorentz.

En utilisant le fait que le champ $\phi(x)$ est dans la représentation d'Heisenberg, on a

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle &= \langle \Omega | e^{ip \cdot x} \phi(0) e^{-ip \cdot x} | \lambda_{\vec{p}} \rangle \\ &= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_{\vec{p}} \rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} \end{aligned}$$

puisque le vide est invariant par translation. Soit U l'opérateur qui réalise le boost amenant $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ sur $|\lambda_0\rangle$, i.e. $U|\lambda_{\vec{p}}\rangle = |\lambda_0\rangle$. Alors

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle = \langle \Omega | U^{-1} U \phi(0) U^{-1} U | \lambda_{\vec{p}} \rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} \quad (5.5)$$

En utilisant l'invariance du vide $|\Omega\rangle$ et du champ *scalaire* $\phi(0)$ sous le groupe de Lorentz, ce qui se traduit pour ce dernier par $U\phi(0)U^{-1} = \phi(0)$, on tire

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle = \langle \Omega | \phi(0) U | \lambda_{\vec{p}} \rangle e^{-ip \cdot x} = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-ip \cdot x}$$

avec $p_0 = E_{\vec{p}}$,

Ainsi, en supposant que le terme constant (5.4) est nul,

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} \times |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (5.6)$$

5.1.2 Représentation en terme du propagateur de Feynman

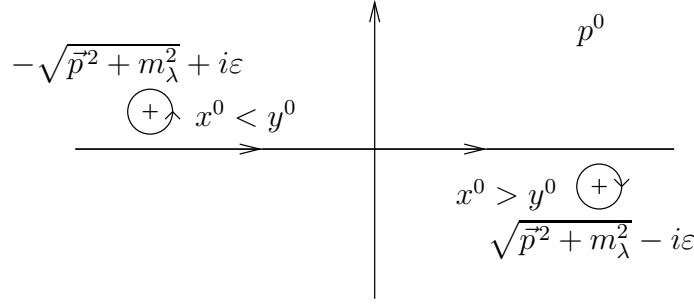
Considérons à présent le propagateur de Feynman défini par

$$D_F(x-y, m_\lambda^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\varepsilon}. \quad (5.7)$$

Examinons l'intégration en p^0 , qui suit l'axe réel. Ecrivaint

$$p^2 - m_\lambda^2 + i\varepsilon = (p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m_\lambda^2} - i\varepsilon)(p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m_\lambda^2} + i\varepsilon), \quad (5.8)$$

on constate que l'intégrand possède deux pôles dans cette variable, en $p^0 = \mp \sqrt{\vec{p}^2 + m_\lambda^2} \pm i\varepsilon$, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Pour $x^0 > y^0$, on peut refermer le contour d'intégration en p_0 vers $-i\infty$ et on obtient le résultat

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}},$$

ce qui permet de donner une représentation du corrélateur (5.6) en terme du propagateur de Feynman $D_F(x - y, m_\lambda^2)$.

Si $x^0 < y^0$, pour évaluer (5.7) on peut refermer le contour d'intégration en p_0 vers $+i\infty$ et on obtient le résultat

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0 = -E_{\vec{p}}}.$$

Or en échangeant x et y , et en remplaçant p par $-p$, l'expression (5.6) s'écrit encore

$$\langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0 = -E_{\vec{p}}} \times |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2,$$

ce qui conduit à une représentation en terme du même propagateur de Feynman $D_F(x - y, m_\lambda^2)$.

5.1.3 Représentation spectrale de Källén-Lehman

Représentation en espace réel

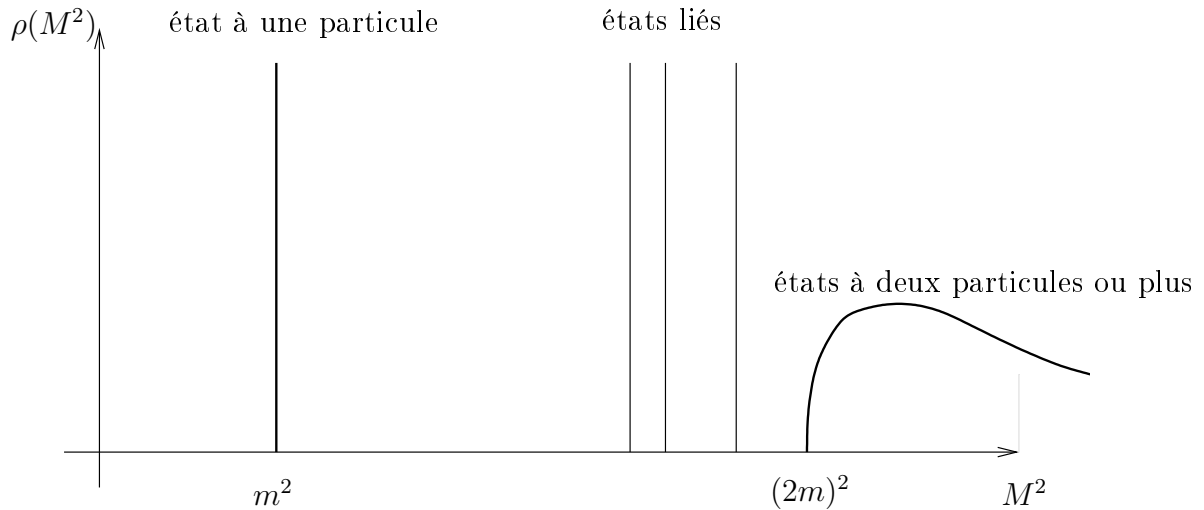
Les deux résultats précédents peuvent donc se combiner sous la forme

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (5.9)$$

On obtient ainsi la **représentation spectrale de Källén-Lehman** :

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x - y, M^2) \\ \text{avec } \rho(M^2) &= \sum_\lambda (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \\ &\text{la } \mathbf{densité spectrale} \text{ (elle est positive)} \end{aligned}} \quad (5.10)$$

La structure typique de la densité spectrale est illustrée ci-dessous.



Un état à **une** particule correspond à

$$\rho(M^2) = 2\pi\delta(M^2 - m^2)Z + \text{rien avant le seuil } M^2 = (2m)^2$$

(ou avant $M_{\text{lié}}^2$ s'il existe des états liés à 2 particules)

avec Z le facteur de renormalisation du champ :

$$Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle|^2 \leq 1 \quad (\text{c'est une probabilité}).$$

m est la masse physique de la particule (accessible à l'expérience), qui est a priori différente de la masse nue m_0 apparaissant dans le lagrangien.

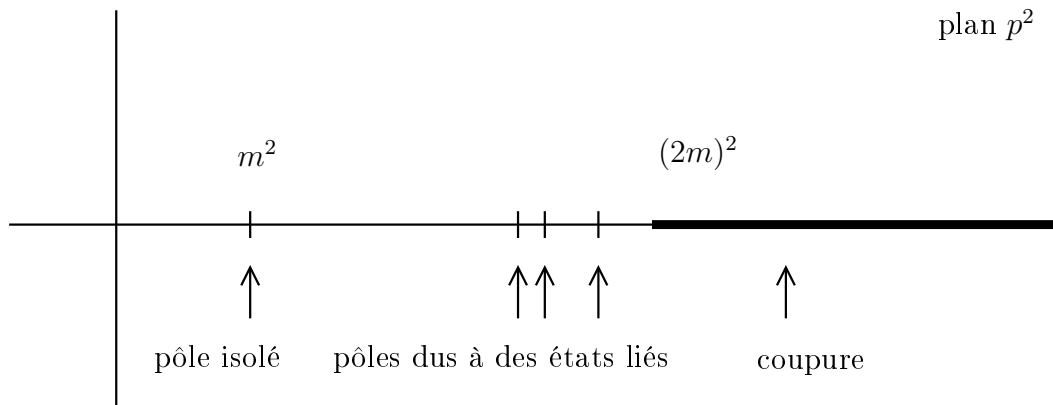
Représentation en espace des moments

Par transformée de Fourier, on déduit de (5.10)

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ipx} \langle \Omega | T\phi(x)\phi(0) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \end{aligned}$$

+ pôles éventuels s'il y a des états liés

La structure analytique de cette fonction à deux points est illustrée ci-dessous.



Cas de la théorie libre

Dans le cas libre, le vide physique $|\Omega\rangle$ et le vide perturbatif $|0\rangle$ sont identiques. On a alors

$$\int d^4x e^{ipx} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

Dans ce cas simple, $Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) \Omega \rangle|^2 = 1$ puisque dans la théorie libre $\phi(0)$ ne peut créer à partir de $|\Omega\rangle = |0\rangle$ que des états à une particule.

Plus généralement, les pôles en p^2 , dans la théorie en interaction, ne peuvent provenir que des états à une particule (en plus du pôle en $p^2 = m^2$, il peut y avoir d'autres pôles distincts de celui-ci à cause de l'existence d'états liés). Au voisinage de $p^2 = m^2$, le seul effet de l'interaction est de faire apparaître le facteur Z dans le propagateur, i.e. un facteur $Z^{1/2}$ par champ.

5.2 Généralisation aux champs de spin arbitraire

L'analyse précédente s'étend aux particules correspondant à une représentation non scalaire du groupe de Lorentz.

Exemple: particule de Dirac

Considérons le corrélateur

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle, \quad (5.11)$$

où nous allons insérer une relation de complétude analogue à (5.2). Soit

$$|\vec{p}, \sigma\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} b_{\sigma}^{+}(\vec{p}) |0\rangle$$

un état à un électron d'impulsion \vec{p} , de polarisation σ . Cet état est normalisé en accord avec

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [b_{\alpha}(k) u^{(\alpha)}(k) e^{ik \cdot x} + d_{\alpha}^{+}(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx}] \quad (5.12)$$

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\beta}^{+}(p)\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \delta_{\alpha\beta} \quad (5.13)$$

$$\{d_{\alpha}(k), d_{\beta}^{+}(p)\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \delta_{\alpha\beta} \quad (5.14)$$

$$\bar{u}^{\alpha} u^{\beta} = 2m \delta^{\alpha\beta}, \quad \bar{v}^{\alpha} v^{\beta} = 2m \delta^{\alpha\beta} \quad (5.15)$$

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (5.16)$$

La décomposition analogue à (5.3) fait intervenir les éléments de matrice

$$\langle \Omega | \psi(0) | \lambda_{\vec{p}}, \sigma \rangle e^{-ip \cdot x} = \langle \Omega | U^{-1} U(\Lambda) \psi(0) U^{-1}(\Lambda) U(\Lambda) | \lambda_{\vec{p}}, \sigma \rangle e^{-ipx}$$

où Λ est le boost transformant \vec{p} en $\vec{0}$. $\psi(x)$ étant un champ fermionique,

$$U(\Lambda) \psi(x) U^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda)^{-1} \psi(\Lambda x).$$

$S(\Lambda)$ est la matrice de la représentation bispinorielle du groupe de Lorentz (et plus généralement de la représentation du groupe de Lorentz correspondant au champ considéré, qui pourrait être de spin plus élevé). Cela donne ici

$$U(\Lambda)\psi(0)U^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda)^{-1}\psi(0).$$

L'action du boost Λ , codé par $U(\Lambda)$ pour son action sur les états, conduit à

$$U(\Lambda)|\lambda_{\vec{p}}, \sigma\rangle = |\vec{0}, \sigma\rangle.$$

Dans le cas où l'état intermédiaire $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ est un état à un électron, la loi de transformation de $\langle\Omega|\psi(0)|\vec{0}, \sigma\rangle$ sous l'action de $S(\Lambda)^{-1}$ est la même que celle de $\langle 0|\psi_{libre}(0)|\vec{0}, \sigma\rangle$. Or $\langle 0|\psi_{libre}(0)|\vec{0}, \sigma\rangle$ est identique à $u^\sigma(m, \vec{0})$ et devient $u^\sigma(p^0, \vec{p}) = u^\sigma(p)$ par boost (rappelons qu'avec notre choix de notation, Λ^{-1} est le boost qui amène $\vec{0}$ en \vec{p}).

Le terme en facteur sera absorbé dans $Z_2^{1/2}$. On peut donc écrire, en utilisant (5.16),

$$\boxed{\begin{aligned} & \int d^4x e^{ipx} \langle\Omega|T\psi(x)\bar{\psi}(0)|\Omega\rangle \\ &= \frac{iZ_2(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \underbrace{\dots}_{\text{coupure multiparticulaire, états liés}} \end{aligned}} \quad (5.17)$$

avec $\langle\Omega|\psi(0)|p, s\rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$. On retrouve donc la même structure que dans le cas d'un champ scalaire.

Chapitre 6

Formule de réduction et corrections radiatives

Le but de ce chapitre est de préparer l'étude des corrections radiatives apparaissant dans le calcul des observables physiques dès que l'on dépasse l'ordre des arbres en perturbation. Pour cela, on relie d'une part le calcul des éléments de matrice S à celui des fonctions de corrélation vide-vide de la théorie, que nous savons calculer systématiquement en perturbation, grâce au théorème de Wick appliqué aux intégrales gaussiennes de la formulation par l'intégrale de chemin des théories quantique des champs (voir chapitre 1). D'autre part, on systématise la prise en compte des corrections radiatives sur les pattes externes d'une amplitude, ce qui permettra dans les chapitres ultérieurs de se focaliser sur les divergences internes aux diagrammes rencontrés.

6.1 Formule de réduction

Nous allons énoncer sans démonstration la formule de réduction en tenant compte des corrections radiatives. Dans un souci de simplification, nous nous limiterons au cas des particules scalaires. La preuve est basée sur des arguments très similaires à ceux utilisés dans le chapitre précédent¹.

Elle permet de ramener le calcul des éléments de matrice S au calcul des fonctions de corrélation vide-vide, ce qui justifie l'intérêt pour ces fonctions de corrélation dans le chapitre 1, où nous avons montré comment évaluer ces fonctions de corrélation en terme d'intégrale de chemin, et dans les chapitres ultérieurs, notamment lors de la discussion de la renormalisation en théorie des champs qui sera effectuée essentiellement au niveau de ces fonctions de corrélation (nous reviendrons aux éléments de matrice S lorsque nous discuterons du groupe

¹Voir par exemple Peskin-Schroeder (chapitre 7), ou Itzykson-Zuber (chapitre 5) qui utilise les propriétés des opérateurs de création sur lesquels les champs asymptotiques se décomposent.

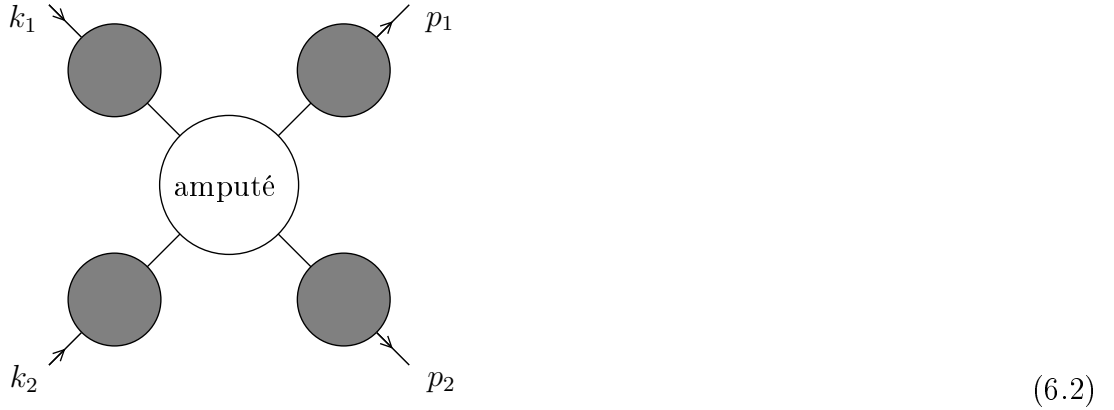
de renormalisation). Cette formule s'écrit

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4 y_j e^{-ik_j \cdot y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle \\
 & \sim \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z} i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z} i}{k_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m \rangle + disc., \\
 & \forall i, p_i^0 \rightarrow E_{\vec{p}_i} \\
 & \forall j, k_j^0 \rightarrow E_{\vec{k}_j}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

où *disc.* symbolise des termes disconnectés sans importance.

Exemple:

Considérons le cas d'une fonction de corrélation à 4 points, illustrée par le diagramme suivant



$$= \prod_{i=1}^2 \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{i=1}^2 \int d^4 y_i e^{-ik_i \cdot y_i} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle . \tag{6.3}$$

Nous allons revenir sur cet exemple dans la suite.

Les formules de réduction se généralisent au cas des champs de spin arbitraire². Ainsi, dans le cas de photons externes,

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4 y_j e^{-ik_j \cdot y_j} \langle \Omega | T \{ j(x_1) \cdot \epsilon_1' \cdots j(x_n) \cdot \epsilon_n' j(y_1) \cdot \epsilon_1 \cdots j(y_m) \cdot \epsilon_m \} | \Omega \rangle \\
 & \sim \prod_{i=1}^n (\sqrt{Z_3} i) \prod_{j=1}^m (\sqrt{Z_3} i) \langle \vec{p}_1, \epsilon_1' \cdots \vec{p}_n, \epsilon_n' | S | \vec{k}_1, \epsilon_1 \cdots \vec{k}_m, \epsilon_m \rangle + disc.. \\
 & \forall i, p_i^0 \rightarrow E_{\vec{p}_i} \\
 & \forall j, k_j^0 \rightarrow E_{\vec{k}_j}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

²Voir par exemple Itzykson-Zuber chapitre 5.

6.2 Corrections radiatives et développement du propagateur complet

Notons

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \text{ (1 PI)} \equiv -iM^2(p^2) \quad (6.5)$$

la fonction de corrélation à deux champs **une** particule irréductible (i.e. que l'on ne peut séparer en 2 parties non connectées). En QED, on introduira de façon similaire $-i\Sigma_2(p^2)$, auto-énergie de l'électron. Considérons par exemple le cas de la théorie ϕ^4 . En effectuant un développement perturbatif, on pourra donc écrire graphiquement

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \underbrace{\text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---}}_{\text{tad - pole}} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad (6.6)$$

Les diagrammes appelés tad-poles n'apparaissent pas si l'on a pris soin de partir d'un lagrangien avec couplage $:\frac{\lambda}{4!}\phi^4:$, ou si l'on utilise la régularisation dimensionnelle (voir la partie 7.5.1).

Connaissant la fonction de corrélation 1-particule irréductible (quelle que soit la façon dont elle est calculée, perturbativement ou non, peu importe), on peut écrire le propagateur **exact** sous la forme

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-iM^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-iM^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-iM^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} \quad (\text{somme d'une série géométrique}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\underset{p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2} + \text{termes réguliers} \quad (6.8)$$

Nous avons ainsi obtenu un propagateur qui a exactement la structure attendue d'après l'étude faite au chapitre 5.

La masse physique correspondant à ce propagateur est définie par la position du pôle, ce qui s'écrit

$$p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0 \quad (6.9)$$

soit

$$\boxed{m^2 = m_0^2 + M^2(m^2)}. \quad (6.10)$$

Cette équation peut se résoudre perturbativement, ce qui donne une méthode systématique pour calculer la masse physique en terme de la masse nue. Notons que si $M^2 > 0$, alors la correction à m^2 est positive.

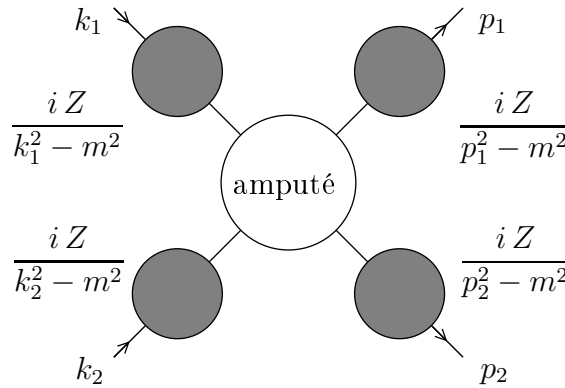
Au voisinage du pôle $p^2 = m^2$, on peut écrire

$$p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) \sim \left[1 - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right] \cdot (p^2 - m^2).$$

Comme le résidu du pôle du propagateur est égal à Z au voisinage de $p^2 = m^2$, on en déduit que

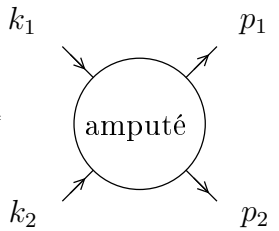
$$\boxed{Z^{-1} = 1 - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2}} \quad (6.11)$$

Nous pouvons à présent revenir à l'étude du corrélateur à 4 points (6.2). Nous connaissons maintenant la structure des propagateurs au voisinage de la couche de masse qui interviennent dans les pattes externes lorsque l'on applique la formule de réduction (6.1). On peut donc écrire

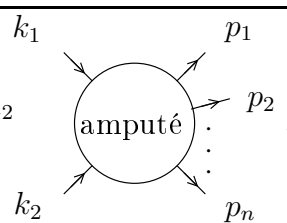


$$= \frac{i\sqrt{Z}}{k_1^2 - m^2} \frac{i\sqrt{Z}}{k_2^2 - m^2} \frac{i\sqrt{Z}}{p_1^2 - m^2} \frac{i\sqrt{Z}}{p_2^2 - m^2} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle \quad (6.12)$$

d'où l'on déduit :

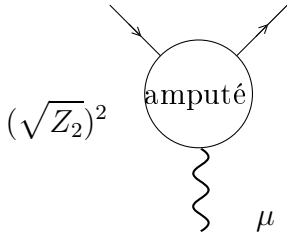
$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^4 \text{ amputé},$$


et plus généralement

$$\boxed{\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2} \text{ amputé}} \quad (6.13)$$


6.3 Esquisse d'une approche systématique : le cas du facteur de forme de l'électron

L'élément de matrice S de diffusion d'un électron dans un champ externe s'écrit en terme du vertex $ee\gamma$ sous la forme générale (p (p') est l'impulsion entrante (sortante) et $q = p' - p$)

$$(\sqrt{Z_2})^2 \text{amputé} = Z_2 \Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \quad (6.14)$$


où F_1 et F_2 sont les facteurs de forme de l'électron. A l'ordre dominant, $F_1 = 1$ (charge de l'électron en unité de e) et $F_2 = 0$.

Remarques:

- le terme $Z_2 \Gamma^\mu$ comporte un facteur $(\sqrt{Z_2})^2$ en accord avec le fait que l'élément de matrice S calculé ici fait intervenir deux lignes électroniques externes. En revanche, on n'a pas introduit la partie de self-énergie du photon, car on suppose ici que le champ électromagnétique est un champ extérieur, ce qui signifie qu'il est non quantifié (et qu'il n'est donc pas sujet à des corrections radiatives).

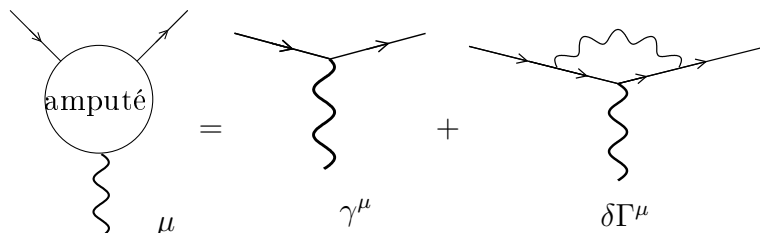
- La décomposition qui apparaît dans le membre de droite de l'équation (6.14) correspond à la façon la plus générale de paramétrer une fonction de corrélation à 3 points $ee\gamma$ qui respecte l'invariance par parité, ce qui interdit la présence d'une matrice γ_5 .

Plus généralement, l'étude des facteurs de forme des hadrons est extrêmement utile pour étudier leur structure interne. On consultera les cours de M. Davier ou D. Lhuillier pour plus de détail concernant cette phénoménologie.

Analysons perturbativement la partie amputée du facteur de forme de l'électron. On note

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2).$$

Son développement perturbatif peut s'écrire

$$\text{amputé} = \text{diagramme } \gamma^\mu + \text{diagramme } \delta\Gamma^\mu + \dots \quad (6.15)$$


Nous ne donnerons aucun détail ici sur ce calcul, que l'on trouvera dans Itzykson-Zuber ou Peskin-Schroeder. Intéressons nous simplement à la structure du résultat, comme avant-goût du chapitre qui va suivre :

- $\bar{F}_2(q^2)$ est IR et UV fini. A l'ordre dominant, il est donné par

$$\bar{F}_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

- $\bar{F}_1(q^2)$ possède des divergences IR. On rajoute à la main une masse μ au photon pour les régulariser (le problème des divergences IR apparaît dans toutes les théories de jauge. Nous ne l'aborderons pas dans ce cours faute de temps). Il est également divergent UV.

Le fait de calculer correctement $Z_2\Gamma^\mu$ (et non Γ^μ) corrige ce problème UV : en explicitant les corrections radiatives par rapport aux termes libres, on peut écrire formellement

$$Z_2\Gamma^\mu = (1 + \delta Z_2)(\gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu + \gamma^\mu\delta Z_2.$$

A l'ordre 1 en perturbation par rapport au couplage α , on calcule d'une part le diagramme *amputé* Γ^μ , i.e. la correction $\delta\Gamma^\mu$ d'ordre 1 par rapport au couplage nu γ^μ , et d'autre part le diagramme de self-énergie de l'électron, ce qui permet de connaître δZ_2 à l'ordre 1, suivant la méthode expliquée en (6.11) pour le cas scalaire.

En comparant les deux résultats, après avoir exprimé $\delta\Gamma^\mu$ en terme de $\delta\bar{F}_1(q^2)$, on constate que $\delta\Gamma^\mu(q=0) = \gamma^\mu\delta\bar{F}_1(0)$ vérifie, assez miraculeusement (c'est le résultat du calcul !)

$$\delta\bar{F}_1(0) = -\delta Z_2.$$

On en déduit donc que

$$F_1(q^2) = 1 + \delta\bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = 1 + \delta\bar{F}_1(q^2) - \delta\bar{F}_1(0).$$

Ainsi les divergences UV de $\delta\bar{F}_1(q^2)$ sont compensées par celle de $\delta\bar{F}_1(0)$, et la quantité physique $F_1(q^2)$ est *finie*, à l'ordre α . En particulier, on obtient

$$F_1(0) = 1.$$

Ce dernier résultat, qui correspond au fait que la charge de l'électron est conservée et vaut $-|e|$, est en fait valable **à tous les ordres**.

Si l'on introduit un facteur Z_1 pour tenir compte des corrections radiatives de vertex, de sorte que

$$\Gamma^\mu(q=0) = Z_1^{-1}\gamma^\mu,$$

γ^μ correspondant au vertex nu, alors

$$Z_2\Gamma^\mu(q=0) = Z_2 Z_1^{-1}\gamma^\mu = F_1(0)\gamma^\mu = \gamma^\mu$$

donne

$$\boxed{Z_2 = Z_1}$$

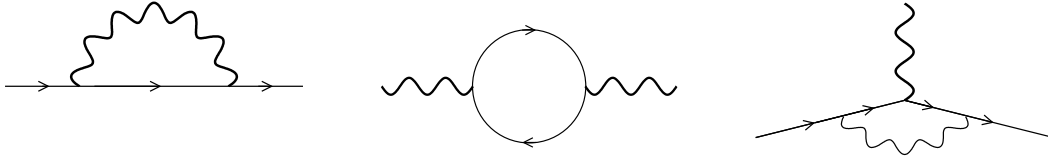
qui doit être satisfaite. Effectivement, l'identité de Ward, qui est liée à l'invariance de jauge de QED, implique que $Z_1 = Z_2$, non seulement à l'ordre α , mais aussi **à tous les ordres en perturbation**. Ceci fera l'objet du chapitre 9.

En résumé, bien que ce calcul fasse intervenir des diagrammes de Feynman divergents UV, par une compensation subtile de ces divergences les quantités physiques restent finies. L'étude systématique de ces effets va occuper une bonne partie de la suite de ce cours.

Chapitre 7

Renormalisation

En QED, les trois diagrammes suivant divergent dans l'ultra-violet.



Ces divergences ont pour origine l'intégration sur les impulsions circulant dans les boucles. Nous avons vu sur l'exemple du facteur de forme de l'électron esquissé à la fin du chapitre 6 que la prise en compte simultanée du premier et du troisième diagramme ci-dessus permet de rendre fini le calcul de cette quantité physique, à l'ordre des corrections à une boucle. L'objet de ce chapitre est de systématiser cette étude. Nous commencerons par une étude générale du degré de divergence d'un diagramme donné en QED, en exploitant notamment les conséquences de la symétrie de jauge. Nous en déduirons les critères de renormalisabilité d'une théorie des champs quelconque. Nous décrirons ensuite les deux algorithmes permettant d'effectuer la renormalisation en théorie des perturbations, à savoir d'une part la renormalisation en théorie des perturbation nue (qui consiste à éliminer ordre par ordre la dépendance des observables physiques dans les paramètres nus du lagrangien, en exprimant ordre par ordre ces paramètres nus en terme des paramètres physiques) et d'autre part la théorie des perturbations renormalisée (appelée aussi méthode des contre-termes). On illustrera cette dernière méthode sur le cas de la théorie scalaire ϕ^4 et sur le cas de QED. Les outils techniques concernant les méthodes de régularisation dimensionnelle et de calcul des intégrales sur les impulsions circulant dans les boucles (méthode des paramètres de Feynman) sont décrites en fin de chapitre.

7.1 Comptage de puissance

7.1.1 Diagrammes superficiellement divergents

Nous souhaitons examiner le comportement d'un diagramme de Feynman arbitraire lorsque les impulsions qui circulent dans les boucles internes sur lesquelles portent les intégrations

deviennent toutes grandes. Nous allons commencer par l'exemple spécifique de QED. Dans l'espace des impulsions, tout diagramme possède une structure du type

$$A = \int \frac{d^4 k_1 \cdots d^4 k_L}{(k_i - m) \cdots k_j^2 \cdots k_n^2} \quad (7.1)$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} E_e &: \text{nombre de lignes électroniques externes} \\ E_\gamma &: \text{nombre de lignes photoniques externes} \\ I_e &: \text{nombre de propagateurs électroniques (lignes internes)} \\ I_\gamma &: \text{nombre de propagateurs photoniques (lignes internes)} \\ V &: \text{nombre de vertex} \\ L &: \text{nombre de boucles} \end{aligned} \quad (7.2)$$

De la relation (7.1) on tire immédiatement

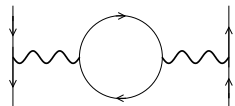
$\begin{aligned} D &\equiv \text{degré superficiel de divergence d'un diagramme} \\ &= \text{puissance de } k \text{ au numérateur} - \text{puissance de } k \text{ au dénominateur} \\ &= 4L - I_e - 2I_\gamma \end{aligned}$	(7.3)
--	-------

En principe, si l'on introduit une coupure U.V notée Λ ,

- si $D > 0$, alors $A \sim \Lambda^D$ *diverge*
- si $D = 0$, alors $A \sim \log \Lambda$ *diverge logarithmiquement*
- si $D < 0$, alors A *converge*.

Cette analyse n'est pas toujours juste. Il y a trois situations typiques pour lesquelles le comptage de puissance précédent, parfois appelé "naïf," n'est pas correct :

1) **A peut contenir un sous-diagramme divergent** : alors la divergence est pire que celle attendue

Exemple:  $D = -2$ mais $A \sim \log \Lambda$

2) **Il existe une certaine symétrie (exemple : symétrie de jauge qui donne lieu à des identités de Ward)** : certains termes se compensent et la situation est meilleure que celle attendue

Exemple:  $D = 2$ mais $A \sim \log \Lambda$

3) **Diagramme sans propagateur et sans boucle** : $D = 0$ mais pas de divergence puisqu'il n'y a aucune impulsion sur laquelle intégrer.

Les quantités (7.2) ne sont pas indépendantes. Elles sont reliées par deux relations :

- la conservation globale de l'énergie-impulsion contraint le nombre d'intégrations indépendantes

$$L = \underbrace{I_e + I_\gamma}_{\text{nombre d'intégrations}} - \underbrace{V}_{\text{nombre de contraintes à chaque vertex}} + \underbrace{1}_{\text{contrainte globale (conservation de l'énergie impulsion)}} \quad (7.4)$$

Le nombre réel de contraintes est donc égal à $V - 1$.

- contrainte topologique :

$$V = \underbrace{2I_\gamma}_{\substack{1 \text{ propagateur est} \\ \text{relié à 2 vertex} \\ \text{exactement}}} + \underbrace{E_\gamma}_{\substack{\text{une ligne extérieure} \\ \text{est reliée à exact-} \\ \text{tement un vertex} \\ \text{(pas de double} \\ \text{comptage)}}} = \underbrace{\frac{1}{2}(2I_e + E_e)}_{\substack{\text{double comptage} \\ \text{si l'on raisonne en} \\ \text{terme de ligne d'e}^-}} \quad (7.5)$$

d'où, en utilisant la définition (7.3) de D ,

$$D = 4(I_e + I_\gamma - V + 1) - I_e - 2I_\gamma = 3I_e + 2I_\gamma - 4V + 4$$

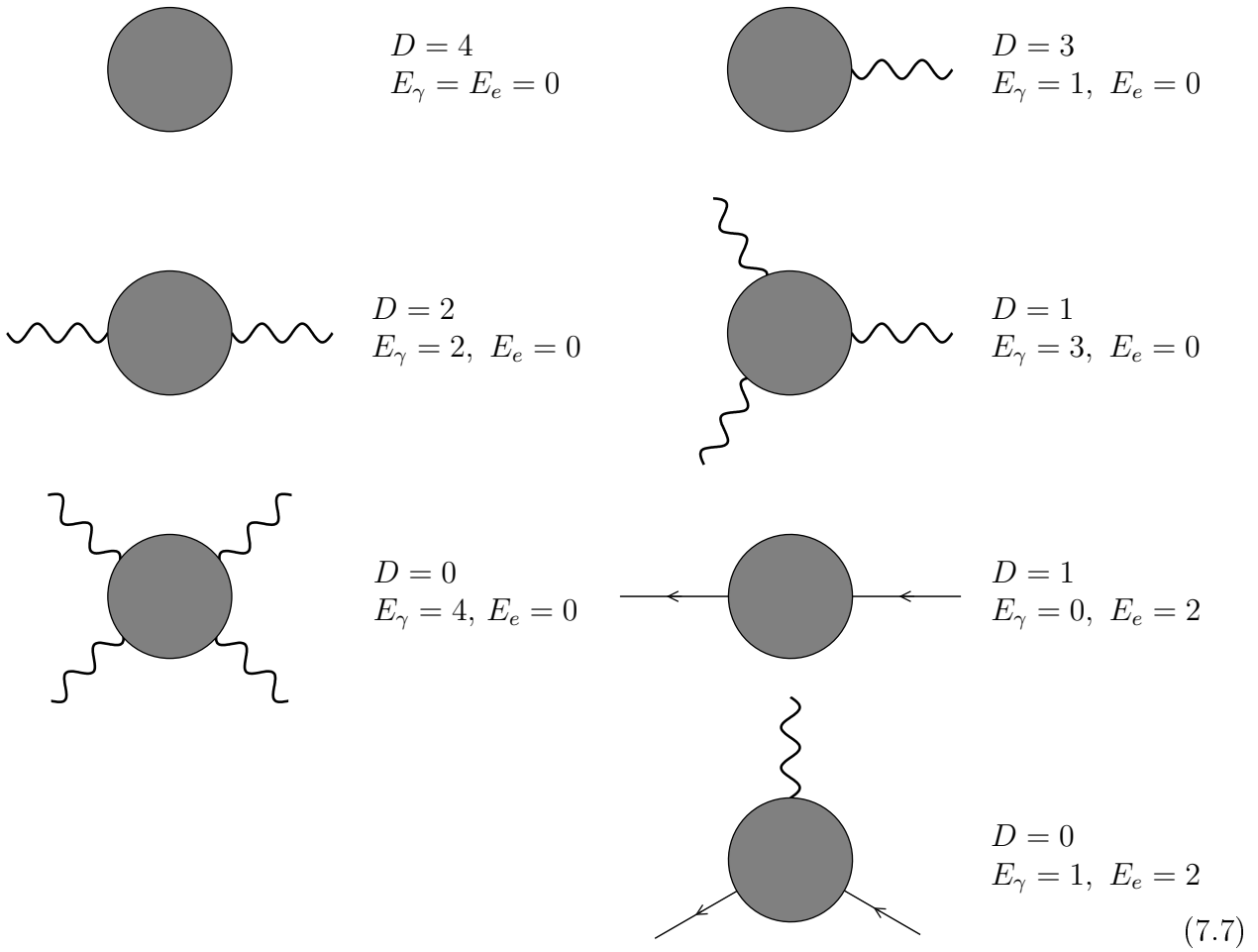
soit, par élimination de I_e et I_γ à l'aide de (7.5),

$$\boxed{D = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_e.} \quad (7.6)$$

On constate que

- D est **indépendant de V** : il ne dépend que du nombre de lignes externes
- D devient **négatif pour E_γ et E_e assez grands** : le nombre de diagrammes superficiellement divergent est fini

On en déduit qu'il y a dans le cas de QED 7 possibilités d'obtenir $D \geq 0$, classifiées ci-dessous par ordre croissant de E_e et de E_γ :



Remarque:

- On ne considère que les diagrammes **1-particule irréductibles**. Par définition, un diagramme 1-particule irréductible est un diagramme qui ne peut être scindé en deux diagrammes disconnectés en coupant une seule ligne.

- En particulier, on se limite donc aux diagrammes **amputés** (les divergences dues aux corrections radiatives sur les pattes externes sont aisément isolables et traitées séparément)

Exemple:

Les diagrammes suivants ne sont pas 1-particule irréductibles :

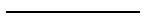


Un diagramme réductible est constitué de diagrammes 1-particule irréductibles reliés entre eux par une structure en arbre. L'étude du degré de divergence de tout diagramme se ramène

à celle de ses sous-diagrammes 1-particule irréductibles, puisque ces sous-diagrammes sont reliés par des lignes sur lesquelles on n'intègre pas.


Ainsi les diagrammes divergents de QED contiennent forcément l'un des 7 diagrammes divergents ci-dessus comme sous-partie.

Les 7 structures superficiellement divergentes (7.7) doivent donc être comprises comme des contributions 1-particule irréductibles (donc amputées)



7.1.2 Analyse des degrés de divergence

Nous allons à présent montrer que parmi ces 7 structures, seules 3 doivent être considérées. Examinons chacun des diagrammes (7.7) :


 est divergent, mais ne peut produire qu'un déplacement non observable de l'énergie du vide. (7.8)

$$\begin{aligned}
 \text{Diagramme 1} &= \text{Diagramme 2} = -ie \int d^4x e^{-iqx} \langle \Omega | T j_\mu(x) | \Omega \rangle \\
 &= 0 \text{ (invariance de Lorentz du vide)} \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Autre argument : comme QED respecte la symétrie de conjugaison de charge C ,

$$C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle .$$

Or $C j^\mu(x) C^+ = -j^\mu(x)$, d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega | T j^\mu(x) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | T C^+ C j^\mu(x) C^+ C | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T j^\mu(x) | \Omega \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Cet argument permet plus généralement de montrer que la valeur moyenne d'un nombre impair de courant électromagnétique est nul. En particulier

$$\text{Diagramme à 3 lignes} = 0. \quad (7.10)$$

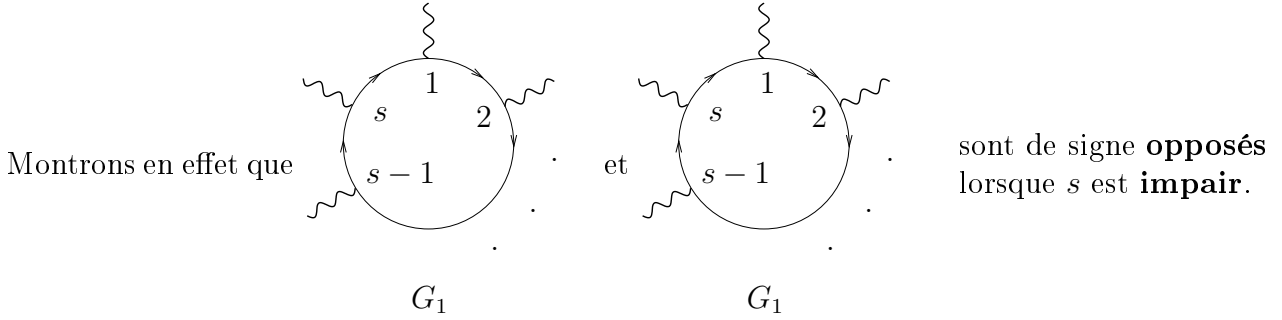
Remarque:

Ceci peut se montrer perturbativement. On obtient alors le

Théorème de Furry : Tout diagramme comportant une boucle de fermions avec un nombre **impair** de vertex est nul.

(7.11)

Preuve:



Rappelons que ces deux diagrammes sont bien à prendre en compte séparément lorsqu'une boucle de fermions intervient dans un diagramme, et qu'ils doivent être ajoutés.

$$G_1 = tr [\gamma_{\mu_1} S_F(z_1, z_s) \gamma_{\mu_s} S_F(z_s, z_{s-1}) \gamma_{\mu_{s-1}} \cdots \gamma_{\mu_2} S_F(z_2, z_1)]$$

Or la matrice C qui permet de définir la conjugaison de charge ($C = i\gamma^0\gamma^2$ est solution) permet d'écrire

$$C S_F(x, y) C^{-1} = S_F^T(y, x),$$

puisque $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$. En insérant CC^{-1} entre chaque propagateur, on obtient

$$\begin{aligned} G_1 &= (-1)^s tr [\gamma_{\mu_1}^T S_F^T(z_s, z_1) \gamma_{\mu_s}^T S_F^T(z_{s-1}, z_s) \gamma_{\mu_{s-1}}^T \cdots \gamma_{\mu_2}^T S_F^T(z_1, z_2)] \\ &= (-1)^s tr [\gamma_{\mu_1} S_F(z_1, z_2) \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_s} S_F(z_s, z_1)] = (-1)^s G_2, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

Il nous reste donc 4 diagrammes à évaluer. Pour poursuivre l'analyse, nous allons maintenant supposer que ces diagrammes n'ont aucun sous-diagrammes superficiellement divergents (i.e. que les éventuelles sous-divergences ont été traitées par ailleurs). On s'intéresse donc à la divergence globale correspondant à avoir *toutes* les impulsions grandes à l'intérieur d'un diagramme donné. Cette hypothèse permet de s'assurer que la seule source de modification du degré de divergence du diagramme par rapport au degré superficiel de divergence D ne peut trouver sa source que dans une éventuelle symétrie (voir remarque 2 page 86).

La méthode pour évaluer le comportement UV de ces diagrammes consiste à effectuer un développement de Taylor par rapport aux impulsions externes.

1) = $A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \cdots$

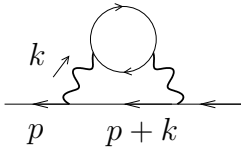
$D = 1$

avec

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\not{p}^n} \left(\text{Diagram} \right) \Big|_{\not{p} = 0}$$

On suppose qu'un régulateur IR a été introduit, chaque A_n étant IR divergent. Il est facile de voir que la dépendance en \not{p} provient des propagateurs électroniques. En effet la ligne entrante et la ligne sortante sont connectées par une ligne fermionique qui traverse tout le diagramme : on peut donc toujours indexer les impulsions de sorte que p n'intervienne que dans cette ligne.

Exemple:



Dans cette exemple, le propagateur de la ligne électronique d'impulsion $p+k$ fait donc intervenir $\not{p}+\not{k}$, et les autres lignes sont indépendantes de p .

De façon générale, le calcul de A_n fait intervenir des différentiations du type

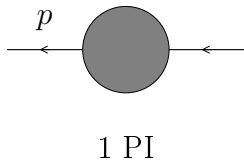
$$\frac{d}{d\not{p}} \left(\frac{1}{\not{k} + \not{p} - m_0} \right) = - \frac{1}{(\not{k} + \not{p} - m_0)^2},$$

où m_0 est la masse nue qui intervient dans le lagrangien.

Chaque dérivée par rapport à l'impulsion extérieure p baisse donc la divergence de une unité, puisque la puissance en k du dénominateur augmente de une unité (7.12)

Comme A_0 diverge **superficiellement** linéairement (puisque $D = 1$), A_1 ne peut donc avoir qu'une divergence logarithmique, et $A_{n \geq 2}$ est fini. Ceci serait faux si la divergence provenait d'une sous-partie du diagramme : en effet l'impulsion qui circule dans les boucles ne serait pas forcément d'ordre k dans chaque propagateur. Par exemple dans le cas du diagramme précédent, la boucle fermionique est elle-même divergente, et dériver par rapport à p ne change rien à cette sous-divergence.

En fait A_0 **ne diverge pas linéairement, contrairement à l'analyse naïve, mais logarithmiquement** :



$\equiv -i\Sigma(\not{p})$ qui donne un propagateur complet, après somme de la série géométrique, égal à $\frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})}$ par généralisation immédiate du résultat (6.7) obtenu dans le cas scalaire au chapitre 6.

Noter la différence de notations entre les deux chapitres pour les propagateurs : ici, comme nous l'avons dit plus haut, la contribution envisagée est par définition 1-particule irréductible, alors que cette notation était utilisée pour le propagateur complet au chapitre 6.

La masse physique est définie par une condition de pôle analogue à (6.9) pour le cas scalaire, qui s'écrit ici

$$[\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})]_{\not{p}=m} = m - m_0 - \Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m} = 0,$$

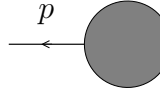
ce qui donne donc une correction de masse égale à

$$\delta m = m - m_0 = \Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m} = i (A_0 + A_1 m + A_2 m^2 + \dots).$$

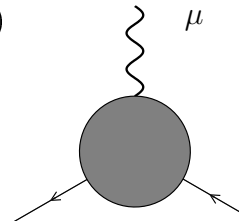
En utilisant l'identité de Ward

$$-iq^\rho \Gamma_\rho(p', p) = -i\{[\not{p}' - m_0 - \Sigma(p')] - [\not{p} - m_0 - \Sigma(p)]\}, \quad (7.13)$$

qui sera justifiée au chapitre 9 (elle repose sur l'invariance de jauge de QED), et en utilisant le fait que Γ diverge logarithmiquement (voir ci-dessous), on en déduit que $\Sigma(p)$ diverge logarithmiquement. On a ainsi $A_0 \sim a_0 m_0 \ln \Lambda$ au pire.

Finalement, on a donc  $= a_0 m_0 \ln \Lambda + a_1 \not{p} \ln \Lambda + \text{termes finis}$.

Un calcul explicite à une boucle, dont le résultat est donné dans la partie 7.4, permet de vérifier explicitement cette structure (valable à tous les ordres) dans le cas particulier de l'ordre 1 en perturbation.

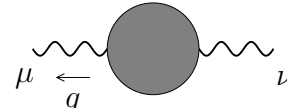
2)  La même méthode de différentiation par rapport à \not{p} permet de conclure que cette amplitude peut s'écrire

$$-i b_0 e \gamma^\mu \ln \Lambda + \text{termes finis}.$$

$D = 0$

Notons que l'identité de Ward (7.13) conduit à

$$a_1 = i b_0. \quad (7.14)$$

3)  $\equiv i \Pi^{\mu\nu}(q)$
 $D = 2$

$\Pi^{\mu\nu}$ ne peut faire intervenir que $g^{\mu\nu}$ et $q^\mu q^\nu$. Or l'identité de Ward (voir chapitre 9) donne $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$, donc $\Pi^{\mu\nu}$ est proportionnel au projecteur transverse :

$$\Pi^{\mu\nu} \sim T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}.$$

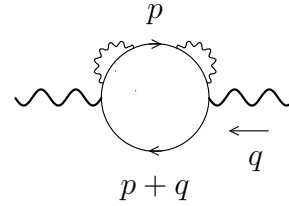
D'autre part $i\Pi^{\mu\nu}(q)$ étant le diagramme $1PI$, il ne peut avoir de pôle à $q^2 = 0$ (ceci correspondrait à avoir un état intermédiaire à une particule, de masse nulle, ce qui est impossible dans ce diagramme $1PI$; en fait ceci est faux à deux dimensions d'espace-temps : dans ce cas la singularité due à une paire de fermions sans masse est un pôle, et non une coupure !). On peut donc poser

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \quad (7.15)$$

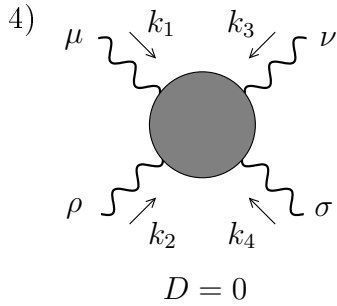
avec $\Pi(q^2)$ régulier en $q^2 = 0$.

Ceci est le développement de Taylor que nous cherchions à caractériser : on constate explicitement que les termes constants et linéaires sont nuls. Donc $D = 0$.

Le lecteur curieux pourra considérer par exemple l'exemple du diagramme ci-contre pour comprendre ce qui arrive par différentiation par rapport à q .



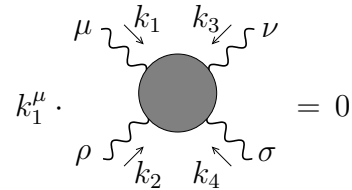
En conclusion, la seule divergence est contenue dans $\Pi(q^2)$, et elle est logarithmique. Ceci est bien en accord avec un calcul explicite à une boucle, dont le résultat est donné dans la partie 7.4.



Cette amplitude est **convergente**. Son degré de divergence est $D = -4$, ce qui est bien meilleur que ce que l'analyse naïve laissait supposer.

Preuves:

- On peut partir de l'identité de Ward ci-contre, appliquée à chaque propagateur, et montrer que l'amplitude est proportionnelle à $g^{\mu\nu}k_1^\sigma - g^{\mu\sigma}k_1^\nu$ avec un terme de ce type par propagateur, ce qui montre que $D = -4$.



- Argument équivalent : l'amplitude étant invariante de jauge, elle doit être constituée à l'aide du tenseur $F_{\mu\mu'}$, un pour chaque champ A_μ sortant : $\mathcal{M} = F_{\mu\mu'}F_{\nu\nu'}F_{\rho\rho'}F_{\sigma\sigma'}\widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\mu'\nu\nu'\rho\rho'\sigma\sigma'}$ (\mathcal{M} = élément de matrice, i.e. après contraction de l'amplitude avec les états extérieurs) avec $F_{\mu\mu'} = k_{1\mu}\varepsilon_{1\mu'} - k_{1\mu'}\varepsilon_{1\mu}$, etc...

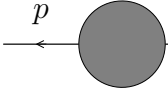
Ceci montre de la même façon que $D = -4$.

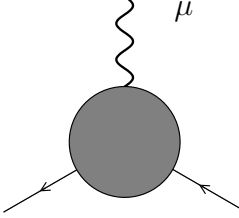
(Si l'on fait $\varepsilon_1 \rightarrow k_1$ on a bien sûr $F_{\mu\mu'} = 0$ et donc $\mathcal{M} = 0$, à condition que $\widetilde{\mathcal{M}}$ lui-même n'ait pas de singularité en $k_1^2 \rightarrow 0$. De même pour les trois autres photons, donc $\widetilde{\mathcal{M}}$ est supposée régulière).

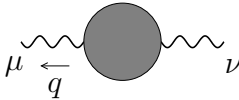
Ce résultat, directement relié à l'identité de Ward, i.e. à l'invariance de jauge, est important : si l'amplitude était divergente, elle nécessiterait une renormalisation par une interaction en $(A_\mu A^\mu)^2$ (interaction à quatre photons), qui n'est pas invariante de jauge : la théorie ne serait plus invariante de jauge après avoir soustrait cette divergence, ce qui serait désastreux.

Résumons

Les seules amplitudes primitivement divergentes sont

1)  $= a_0 m_0 \ln \Lambda + a_1 \not{p} \ln \Lambda + \text{termes finis}$

2)  $\sim -ie\gamma^\mu \ln \Lambda + \text{termes finis}$

3)  $\sim (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$ avec $\Pi(q^2) \sim \ln \Lambda$

Au total, il y a quatre coefficients divergents dans le développement en puissance de l'impulsion externe, qui peuvent être absorbés en redéfinissant la masse de l'électron et la normalisation du champ de l'électron (amplitude 1)), la charge de l'électron (amplitude 2)), et la normalisation du champ du photon (amplitude 3)), sans violer l'invariance de jauge. En pratique, cela signifie que les termes infinis, en $\ln \Lambda$, sont absorbés dans les paramètres du lagrangien, qui deviennent donc formellement divergents (ce qui physiquement n'est pas gênant puisque l'on ne peut pas les mesurer, personne ne pouvant "débrancher" les interactions pour avoir accès aux paramètres sans corrections radiatives), de façon à ce que les paramètres physiques, i.e. mesurables, soient bien finis.

7.1.3 Renormalisabilité d'une théorie des champs

Après avoir étudié la structure des divergences de QED, revenons sur la notion de degré superficiel de divergence qui nous a servi de point de départ dans notre analyse.

La définition naturelle de D en QED, donnée en (7.3) à 4 dimensions d'espace-temps, s'étend en dimension d arbitraire en tenant compte du changement dans le comptage de puissance de k dû à l'intégration sur k , soit

$$D = dL - I_e - 2I_\gamma. \quad (7.16)$$

Nous avons établi plus haut les égalités (voir (7.4) et (7.5))

$$L = I_e + I_\gamma - V + 1$$

et

$$V = 2I_\gamma + E_\gamma = \frac{1}{2}(2E_e + E_e).$$

On déduit de cette dernière relation que

$$\begin{cases} I_e = V - \frac{1}{2}E_e \\ I_\gamma = \frac{V}{2} - \frac{1}{2}E_\gamma \end{cases} \quad (7.17)$$

d'où, en utilisant (7.4)

$$D = d(I_e + I_\gamma - V + 1) - I_e - 2I_\gamma = d + I_e(d-1) + I_\gamma(d-2) - dV,$$

qui s'écrit encore, grâce à (7.17),

$$D = d + \left(V - \frac{1}{2} E_e \right) (d - 1) + \left(\frac{V}{2} - \frac{1}{2} E_\gamma \right) (d - 2) - dV,$$

d'où finalement

$$\boxed{D = d - \underbrace{\frac{4-d}{2}}_{[e]} V - \underbrace{\frac{d-1}{2}}_{[\psi]} E_e - \underbrace{\frac{d-2}{2}}_{[A]} E_\gamma} \quad (7.18)$$

Cette relation généralise le résultat $D = 4 - \frac{3}{2} E_e - E_\gamma$, qui a été établi à 4 dimensions, et pour lequel D était indépendant de V. Elle s'écrit simplement en terme des dimensions des champs et des couplages.

Preuve:

Calculons la dimension de masse du couplage et des champs.

L'action S est reliée au lagrangien par

$$S = \int d^d x \mathcal{L}.$$

S a la dimension de \hbar . Comme on travaille avec $\hbar = 1$, $[S] = 0$ donc $[\mathcal{L}] = d$ en dimension de masse.

Terme cinétique du scalaire :	$(\partial^\mu \phi)^2$	donc $2[\phi] + 2 = d$,	soit $[\phi] = \frac{d-2}{2}$
----------------------------------	-------------------------	--------------------------	-------------------------------

Terme cinétique du fermion :	$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi$	donc $2[\psi] + 1 = d$,	soit $[\psi] = \frac{d-1}{2}$
---------------------------------	---------------------------------	--------------------------	-------------------------------

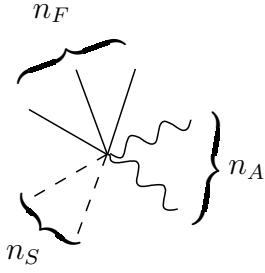
Terme cinétique du boson vecto- riel :	$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	donc $2[A] + 2 = d$,	soit $[A] = \frac{d-2}{2}$
--	--------------------------------------	-----------------------	----------------------------

Terme de cou- plage :	$-ie\gamma_\mu \bar{\psi} A^\mu \psi$	donc $[e] + 2[\psi] + [A] = d$,	soit $[e] = d - 2[\psi] - [A] = \frac{4-d}{2}$
--------------------------	---------------------------------------	----------------------------------	--

Ces dimensions prennent les valeurs suivantes dans le cas particulier $d = 4$:

$$\boxed{[\phi] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2}, \quad [A] = 1, \quad [e] = 0.} \quad (7.19)$$

Généralisation :



Considérons une théorie des champs avec des vertex du type

$$\mathcal{L}_I = \sum_a \lambda_a \partial^{k_a} \phi^{n_S} \psi^{n_F} A^{n_A}.$$

ψ symbolise ψ ou $\bar{\psi}$. Il faut bien sûr respecter la structure de Lorentz (qui donne des contraintes sur k_a, n_S, n_F, n_A).

Le degré superficiel de divergence est donc donné par

$$D = dL - 2I_S - I_F - 2I_A + \sum_a k^a V^a \tag{7.20}$$

où V^a est le nombre de vertex de type a , le dernier terme provenant des numérateurs en représentation d'impulsion, à cause de la présence de termes dérivatifs dans les vertex. La conservation de l'énergie-impulsion (7.4) s'écrit maintenant de façon générale

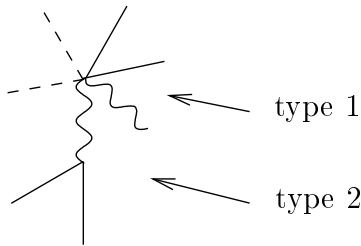
$$L = I_S + I_F + I_A - \sum_a V^a + 1$$

De même, les contraintes topologiques (7.5) se généralisent aisément : en donnant un coup de ciseau au milieu de chaque propagateur et en effectuant le comptage vertex par vertex, on obtient, pour chaque type de champ

$$\sum V^a n_S^a = 2I_S + E_S, \quad \sum V^a n_F^a = 2I_F + E_F \quad \text{et} \quad \sum V^a n_A^a = 2I_A + E_A. \tag{7.21}$$

Exemple:

Considérons le graphe suivant, constitué à partir d'un lagrangien comportant deux types de vertex différents.



$$V^1 = 1 \quad E_S = 2 \quad E_F = 4 \quad E_A = 1$$

$$V^2 = 1 \quad I_S = 0 \quad I_F = 0 \quad I_A = 1$$

$$n_S^1 = 2 \quad n_F^1 = 2 \quad n_A^1 = 2$$

$$n_S^2 = 0 \quad n_F^2 = 2 \quad n_A^2 = 1$$

On vérifie immédiatement que les relations (7.21) sont bien satisfaites sur cet exemple :

$$\begin{aligned} \underbrace{n_S^1 V^1}_2 + \underbrace{n_S^2 V^2}_0 &= \underbrace{2I_S}_0 + \underbrace{E_S}_2 \\ \underbrace{n_F^1 V^1}_2 + \underbrace{n_F^2 V^2}_2 &= \underbrace{2I_F}_0 + \underbrace{E_F}_4 \\ \underbrace{n_A^1 V^1}_1 + \underbrace{n_A^2 V^2}_2 &= \underbrace{2I_A}_2 + \underbrace{E_A}_1 \end{aligned}$$

Les relations (7.21) permettent d'exprimer le nombre de lignes internes de type donné en fonction du nombre de vertex faisant intervenir ce type de ligne et du nombre de lignes externes de ce type. On obtient

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{1}{2} \sum_a n_S^a V^a - \frac{1}{2} E_S \\ I_F &= \frac{1}{2} \sum_a n_F^a V^a - \frac{1}{2} E_F \\ I_A &= \frac{1}{2} \sum_a n_A^a V^a - \frac{1}{2} E_A \end{aligned}$$

ce qui donne pour D , d'après (7.20),

$$D = d \left(I_S + I_F + I_A - \sum_a V^a + 1 \right) - 2I_S - I_F - 2I_A + \sum_a k^a V^a$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\begin{aligned} D &= d - \sum_a V^a \left(d - n_S^a \frac{d-2}{2} - n_F^a \frac{d-1}{2} - n_A^a \frac{d-2}{2} - k^a \right) \\ &\quad - E_S \frac{d-2}{2} - E_F \frac{d-1}{2} - E_A \frac{d-2}{2}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Or puisque $[\mathcal{L}] = d$,

$$[\lambda_a] + k^a + n_S^a [\phi] + n_F^a [\psi] + n_A^a [A] = d$$

d'où l'on déduit la dimension de la constante de couplage pour un vertex de type a

$$\boxed{[\lambda_a] = d - k^a - n_S^a [\phi] - n_F^a [\psi] - n_A^a [A].} \tag{7.23}$$

En combinant ce résultat avec le calcul des dimensions des champs effectué page 95, on obtient finalement pour D :

$$\boxed{D = d - \sum_a V^a [\lambda_a] - E_S [\phi] - E_F [\psi] - E_A [A].} \tag{7.24}$$

QED à quatre dimensions est donc une théorie particulière pour laquelle $[\lambda] = 0$.

De manière générale, le résultat (7.24) nous amène à distinguer 3 types de théories, puisque selon le signe de $[\lambda_a]$, lorsque le nombre de vertex augmente le degré superficiel de divergence peut diminuer ou augmenter :

<ul style="list-style-type: none"> • théories super-renormalisables : $\Leftrightarrow [\lambda_a] > 0, \forall a$ <p>Seul un nombre fini de diagrammes de Feynman diverge.</p>	(7.25)
<ul style="list-style-type: none"> • théories renormalisables : $\Leftrightarrow [\lambda_a] = 0, \forall a$ <p>Seul un nombre fini d'amplitudes divergent, mais ces divergences apparaissent à tous les ordres en perturbation</p>	
<ul style="list-style-type: none"> • théories non renormalisables : $\Leftrightarrow \exists a$ t. q. $[\lambda_a] < 0$ <p>Toutes les amplitudes sont divergentes à un ordre suffisamment élevé en perturbation</p>	

La relation (7.23) permet explicitement de **classifier les théories renormalisables** : il suffit d'ajuster k^a, n_S^a, n_F^a, n_A^a pour que $[\lambda_a] = 0$.

Exemple:

Considérons le cas de $d = 4$. Alors $n_S \leq 4$ et $n_F \leq 2$ (en fait 0 ou 2 car \mathcal{L} est un scalaire de Lorentz) et $n_A \leq 2$.

<u>$n_F = 2$</u>	$k = 1$	$\bar{\psi} \partial_\mu \psi$	terme cinétique			
	$n_S = 1$	$\bar{\psi} \psi \phi$	théorie de Yukawa			
		$\bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi$				
	$n_A = 1$	$\bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi$	QED			
<u>$n_F = 0$</u>	$k = 2$	$(\partial^\mu \phi)^2$	terme cinétique	$k = 0$	ϕ^4	couplage en
	$n_S = 2$			$n_S = 4$		théorie scalaire
	$k = 2$	$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	terme cinétique	$k = 0$	$\phi^2 A_\mu A^\mu$	couplage en
	$n_A = 2$			$n_S = 2$		QED scalaire
				$n_A = 2$		
	$k = 1$	$\phi \partial_\mu \phi A^\mu$	QED scalaire			
	$n_S = 2$					
	$n_A = 1$					

7.1.4 Renormalisation en théorie des perturbations nue

La procédure de renormalisation est la suivante :

- pour obtenir une amplitude donnée, a priori divergente, on calcule les diagrammes correspondant en utilisant un régulateur (Pauli-Villars, régularisation dimensionnelle, ou encore régularisation sur un réseau ; en revanche une régularisation avec une coupure UV n'est pas adaptée à QED car elle brise l'invariance de jauge)

- les expressions obtenues dépendent des paramètres m_0 (masse de l' e^-) et e_0 (charge de l' e^-) du lagrangien, et d'un régulateur UV (symboliquement noté Λ)

- on calcule la masse physique m et la constante de couplage physique e , toutes ces quantités dépendant de m_0 , e_0 et Λ . Ces calculs doivent être faits en perturbation jusqu'à un ordre compatible avec l'ensemble du calcul. Si la quantité que l'on cherche à calculer est un élément de matrice S , d'après la formule de réduction on doit aussi calculer les renormalisations Z des champs.

- on obtient alors une expression pour l'amplitude ou élément de matrice S considéré, que l'on exprime, grâce à l'étape précédente, en fonction de m et e (en ayant éliminé toute trace de m_0 et e_0 qui ont été exprimées en fonction de m et e). Le résultat obtenu est alors fini dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ (i. e. $d \rightarrow 4$ en régularisation dimensionnelle), et préserve les symétries initiales (locales ou globales, mais sans anomalies) du lagrangien.

La procédure précédente est appelée *méthode des perturbations nue*.

On démontre que cette procédure est cohérente pour les théories des champs renormalisables : en redéfinissant un nombre *fini* de paramètres du lagrangien, ordre par ordre en perturbation, de manière à absorber dans ces paramètres les divergences logarithmiques obtenues, on obtient une théorie finie. En pratique, cette preuve est plus aisée en suivant une approche équivalente, discutée dans la partie qui suit.

7.2 Théorie des perturbations renormalisée

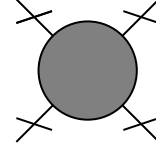
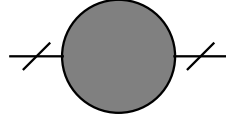
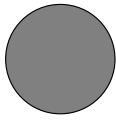
7.2.1 Contre-termes

Il existe une approche systématique alternative à l'approche précédente. Comme souvent, afin de mettre en place la méthode, il est plus simple de commencer par le cas de la théorie ϕ^4 à 4 dimensions, de lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4. \quad (7.26)$$

Comme précédemment, on note m_0 et λ_0 les paramètres du lagrangien. D'après la relation (7.24), $D = 4 - E$, où E est le nombre de pattes externes. Par symétrie $\phi \rightarrow -\phi$, les amplitudes comportant un nombre impair de pattes externes sont nulles.

Finalement, il reste donc à examiner les amplitudes amputées et 1-particule irréductibles suivantes :



(7.27)

décalage non physique
de l'énergie du vide

$\sim \Lambda^2 + p^2 \ln \Lambda +$ termes
finis

$\sim \ln \Lambda +$ termes finis

Il s'agit donc d'absorber les trois constantes infinies ci-dessus dans trois paramètres inobservables de la théorie : m_0 , λ_0 et la renormalisation du champ ϕ .

L'idée de la théorie des perturbation renormalisée est en fait de réorganiser la théorie des perturbations afin de ne pas faire apparaître explicitement ces quantités non physiques dans les règles de Feynman. Les quantités physiques étant évidemment finies, les quantités infinies sont cachées dans m_0 , λ_0 et Z , mais comme on ne les voit plus, peu importe !

D'après la représentation spectrale de Kählen-Lehmann du propagateur exact,

$$\int d^4x \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle e^{ipx} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + \text{termes réguliers en } p^2 = m^2,$$

où m est la **masse physique**

On élimine Z en redéfinissant le champ :

$$\boxed{\phi = \sqrt{Z} \phi_R.} \tag{7.28}$$

D'après ce que nous avons vu plus tôt sur la formule de réduction, ceci revient donc, si l'on calcule les diagrammes **amputés** (et **connexes** si l'on calcule $\langle f | iT | i \rangle$) dans la théorie avec champ ϕ_R , à enlever les préfacteurs \sqrt{Z} :

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = \text{diagramme amputé} \tag{7.29}$$

calculé avec les champs ϕ_R , i.e. fonction de Green pour la théorie des champs ϕ_R

Le lagrangien *initial* (7.26) s'écrit maintenant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_R^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_R^4. \tag{7.30}$$

On élimine à présent m_0 , λ_0 et Z de l'écriture explicite de \mathcal{L} en posant :

$$\delta_Z = Z - 1 \tag{7.31}$$

$$\delta_m = m_0^2 Z - m^2 \tag{7.32}$$

$$\delta_\lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda, \tag{7.33}$$


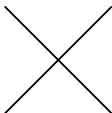
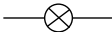
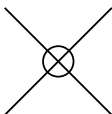
où m et λ sont des quantités physiques.

Alors

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_R^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_R^4$	} même forme que le "lagrangien habituel," exprimé en termes des quantités physiques
$+ \frac{1}{2} \delta_Z (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \phi_R^4$	} contre termes
$= \mathcal{L}' + \mathcal{L}_{\text{contre-termes}}$	

(7.34)

Règles de Feynman :

	$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	
	$-i\lambda$	
	$i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$	(7.35)
	$-i\delta_\lambda$	

Les deux dernières règles proviennent des contre-termes, et sont à considérer comme des nouveaux vertex.

Remarques:

- On n'a pas "ajouté" des contre-termes : \mathcal{L} est bien le lagrangien initial. Il est simplement réorganisé différemment.
- δ_Z , δ_m , δ_λ sont des quantités infinies non physiques.

Il nous reste à définir les quantités physiques.

Une possibilité est de décider que, d'une part, m^2 est la position du pôle du propagateur

complet, et d'autre part, que λ est l'amplitude de diffusion à impulsion nulle :

$$\text{---} \circ \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{termes réguliers en } p^2 = m^2 \quad (7.36)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = -i\lambda \text{ à } s = 4m^2, t = u = 0, \text{ i.e. } \vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3 = \vec{p}_4 = \vec{0}. \quad (7.37)$$

Cette seconde amplitude (qui est par définition amputée), calculée en théorie renormalisée (i.e. en terme de ϕ_R), est un élément de matrice S comme nous l'avons vu en (7.29).

Les deux conditions (7.36) et (7.37) sont appelées **conditions de renormalisation**.

Remarques:

- Rappelons, comme nous l'avons déjà vu plus haut, que la condition (7.36) contient en fait deux conditions : une pour la masse, l'autre pour le résidu, donc pour Z .

- Il y a une part d'arbitraire dans ces conditions de renormalisation. On parle de schéma de renormalisation (on pourrait choisir une condition pour λ ailleurs qu'en $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ par exemple) et d'échelle de renormalisation (dépendance, dans un schéma donné, par rapport au point où l'on fixe la condition de renormalisation). Cette idée sera développée plus loin dans la notion de groupe de renormalisation, importante pour comprendre la liberté asymptotique de QCD.

7.2.2 Renormalisation en théorie des perturbations renormalisée

La procédure de renormalisation en théorie des perturbations renormalisée est la suivante :

- on calcule l'amplitude cherchée comme une somme de tous les diagrammes possibles en utilisant les règles de Feynman ci-dessus

- pour évaluer les boucles dans les diagrammes, on introduit un régulateur lorsqu'une divergence apparaît

- le résultat dépend de $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$, qui sont pour le moment arbitraires

- on les ajuste, à l'ordre de perturbation considéré, afin de respecter les conditions de renormalisation (c'est l'étape de renormalisation)

- le résultat obtenu pour l'amplitude est fini et indépendant du régulateur.

La théorie des perturbations nue et la théorie des perturbations renormalisée sont équivalentes. En pratique, la théorie des perturbations renormalisée est plus commode pour les calculs aux grands ordres, et la théorie des perturbations nue est plus commode pour des calculs d'amplitudes à une boucle compliqués.

7.2.3 Renormalisabilité d'une théorie quelconque

Une théorie est renormalisable si

- les fonctions de Green calculées perturbativement à l'aide du lagrangien \mathcal{L}' (c'est le lagrangien de départ où l'on a remplacé les quantités nues (masses, couplages) par les quantités physiques : voir page 101 le cas de ϕ^4) deviennent finies ordre par ordre en perturbation en **ajoutant des contre-termes de dimension inférieure ou égale à 4** (sinon on aurait devant ces contre-termes des constantes de couplage de dimension négative, et ces contre-termes ne seraient eux-mêmes pas renormalisables !)

- dans le cas où la théorie possède une symétrie sans anomalie, globale ou locale, les **contre-termes** doivent eux-mêmes être **invariants sous cette symétrie**. Dans ce cas, il faut prendre garde d'utiliser une méthode de régularisation qui préserve cette symétrie. Ceci est essentiel dans les théories de jauge, afin de ne pas briser l'invariance de jauge.

Remarque:

Le point de vue énoncé ici est en quelque sorte le complémentaire de la procédure explicitée pages 100 et 102. Dans cette approche, nous avons réécrit le lagrangien nu \mathcal{L}_0 par une redéfinition des champs (on note généralement \mathcal{L}_R ce lagrangien (7.30), qui est bien *identique* à \mathcal{L}_0 (7.26)) (mais dont la forme fonctionnelle diffère de celle de \mathcal{L}_0 puisqu'ils ne sont pas fonction des mêmes variables : $\mathcal{L}_0(\phi, m_0, \lambda_0) = \mathcal{L}_R(\phi_R, m, \lambda)$) et nous avons séparé ce lagrangien en

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}' + \mathcal{L}_{\text{contre-termes}},$$

où \mathcal{L}' a la même forme fonctionnelle que le lagrangien \mathcal{L}_0 , mais en diffère puisqu'il est obtenu

à partir de \mathcal{L}_0 par la transformation

$$\left. \begin{array}{l} m_0 \rightarrow m \\ \lambda_0 \rightarrow \lambda \\ \phi \rightarrow \phi_R \end{array} \right\}$$

Ici, on regarde la procédure en partant de \mathcal{L}' , que l'on complète par des contre-termes $\mathcal{L}_{c,t}$ pour le rendre fini. Il nous a semblé utile d'éclairer ces deux points de vue équivalents sur la théorie des perturbations renormalisée, afin de faciliter la lecture éventuelle des ouvrages sur le sujet.

On démontre que l'analyse naïve des divergences suffit à rendre la théorie finie à tous les ordres.

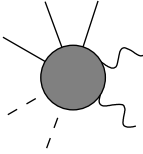
La preuve dans le cas des théories scalaires est due à Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann. On lira avec intérêt l'excellent exposé sur ce sujet dans l'ouvrage de Muta. Cette méthode, connue sous le nom de BPHZ, est mal adaptée au cas des théories de jauge. Nous discuterons plus loin la renormalisabilité de ces théories de jauge, en suivant une méthode fonctionnelle basée sur la symétrie BRST. La méthode BPHZ est cependant fort utile en théorie de jauge dans le cadre du développement en produit d'opérateurs (OPE en anglais), outil formel qui permet de justifier l'approche perturbative de la diffusion profondément inélastique $e^- - P$ par exemple (factorisation entre un terme "dur," calculable perturbativement, et un élément de matrice non perturbatif). Ce point ne sera pas discuté dans ce cours. Nous renvoyons au cours de M. Davier pour une approche phénoménologique à ce sujet.

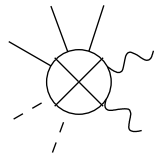
7.2.4 Structure des contre-termes

Les contre-termes ont automatiquement une structure renormalisable si le lagrangien renormalisé est lui-même constitué de termes renormalisables.

Preuve:

On a de manière générale $D = d - \sum_a V^a[\lambda_a] - E_S[\phi] - E_F[\psi] - E_A[A]$. Un contre-terme donné a pour structure $O_{ct} = \partial^{k_{ct}} \phi^{n_{ctS}} \psi^{n_{ctF}} A^{n_{ctA}}$.

Pour rendre finie une amplitude donnée  il faut introduire un contre-terme du

type  qui a donc le même nombre de pattes externes, type par type.

Donc $E_S = n_{ctS}$, $E_F = n_{ctF}$, $E_A = n_{ctA}$.
Ceci permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} [\lambda_{ct}] &= d - k_{ct} - n_{ctS}[\phi] - n_{ctF}[\psi] - n_{ctA}[A] \\ &= D + \sum_a V^a[\lambda_a] - k_{ct} \end{aligned}$$

Si le diagramme divergent se comporte en

$$P^{(n)}(p_i) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_D p^D$$

où les p_i sont les impulsions des pattes externes, ($a_m p^m$ est une écriture symbolique pour $a_{i_1 \dots i_m}^{\nu_1 \dots \nu_m} p_{i_1 \nu_1} \dots p_{i_m \nu_m}$), il faudra que les contre-termes comportent un nombre de dérivées variant de 0 à D pour compenser chacun de ces termes divergents. Donc $k_{ct} \leq D$. Ainsi

$$[\lambda_{ct}] \geq \sum_a V^a[\lambda_a],$$

la borne inférieure étant atteinte par au moins un contre-terme.

Donc si le lagrangien de départ est super-renormalisable, c'est aussi le cas des contre-termes.

Si le lagrangien de départ est renormalisable, les contre-termes le sont aussi.

Enfin si le lagrangien n'est pas renormalisable, les contre-termes ne le sont pas non plus.

7.3 Renormalisation à une boucle de ϕ^4

7.3.1 calcul de δ_λ

Considérons l'amplitude à 4 pattes amputées 1PI :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} p_1 \nearrow \\ \bullet \\ p_2 \nwarrow \end{array} & \begin{array}{c} p_3 \nearrow \\ \bullet \\ p_4 \nwarrow \end{array} & = i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) . \\
 & & (7.38)
 \end{array}$$

On introduit les variables de Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$. $i\mathcal{M}$ s'écrit, en perturbation,

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\text{diagramme à 4 pattes}}_{\text{ordre } \lambda^1} + \underbrace{\text{diagramme à 1 boucle}}_{\text{ordre } \lambda^2} + \dots \\
 \text{ordre } \lambda^1 \qquad \qquad \qquad \text{ordre } \lambda^2
 \end{array} \qquad (7.39)$$

Calculons le premier diagramme d'ordre λ^2 du développement (7.39). On pose $p = p_1 + p_2$, de sorte que $s = p^2$. On a donc

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} k \\ \curvearrowright \\ \rightarrow p \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ k+p \end{array}
 \end{array} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = (-i\lambda)^2 iV(p^2),$$

le préfacteur 1/2 étant un facteur de symétrie. Le développement jusqu'à l'ordre 2 de $i\mathcal{M}$ s'écrit donc

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda .$$

Condition de renormalisation :

On impose que l'amplitude amputée 1-particule irréductible (7.38) vérifie la condition (7.36) :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array}
 \end{array} = -i\lambda \text{ à } s = 4m^2, t = u = 0, \text{ i.e. pour } \vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3 = \vec{p}_4 = \vec{0},$$

ce qui implique donc que

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \quad \text{à l'ordre } \lambda^2. \qquad (7.40)$$

Nous allons à présent calculer $V(p^2)$ en régularisation dimensionnelle (voir détail de la méthode dans la partie 7.5.1), qui consiste à éviter le problème de divergence UV en diminuant la dimension d'espace-temps : $d = 4$ devient $d = 4 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$).

La première étape consiste à introduire un paramètre de Feynman x , en suivant l'approche générale discutée dans la partie 7.5.2 :

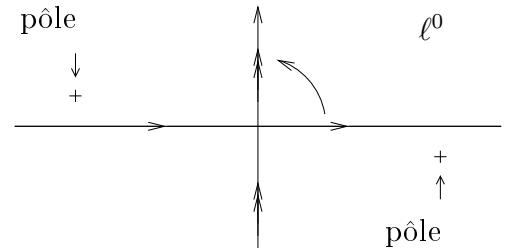
$$\begin{aligned} V(p^2) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)} \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(1-x)(k^2 - m^2) + x((k+p)^2 - m^2)]^2} \end{aligned}$$

Dans la seconde étape, on utilise le fait que l'intégrale sur k est quadratique : après avoir complété le carré, on fait une translation de la variable d'intégration, ce qui ramène l'intégrale sur l'impulsion à une classe d'intégrale facile à calculer. Ainsi

$$\begin{aligned} V(p^2) &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2x k \cdot p + x p^2 - m^2]^2} \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\underbrace{[k + xp]^2}_{\equiv \ell} + x(1-x)p^2 - m^2]^2} \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\ell^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2} \end{aligned}$$

Dans la troisième étape, on ramène l'intégrale sur l'impulsion ℓ , qui est dans l'espace de Minkowski, à une intégration euclidienne, en effectuant une **rotation de Wick** :

on fait tourner le contour d'intégration sur ℓ_0 de $+\pi/2$, comme indiqué dans le dessin ci-contre, ce qui revient à faire $\ell_0 \rightarrow i\ell_0$. On pose donc $\ell^0 = i\ell_E^0$ (avec ℓ_E^0 variant sur $]-\infty, +\infty[$). Le quadrivecteur $\ell_E = (\ell_E^0, \vec{\ell}_E = \vec{\ell})$ est donc maintenant une impulsion euclidienne, avec $\ell^2 = -\ell_E^2$. Cette rotation de l'axe d'intégration ne rencontre pas les pôles des propagateurs définis suivant la prescription de Feynman. En outre, l'intégrale tend vers zéro le long des deux quarts de cercle de rayons infinis situés dans le premier et dans le troisième quadrant. Par application immédiate du théorème de Cauchy, on a donc



$$\begin{aligned} V(p^2) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\ell_E^2 - x(1-x)p^2 + m^2]^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-d/2}} \end{aligned}$$

Dans la limite $\varepsilon = d - 4 \rightarrow 0$, ce résultat devient

$$V(p^2) \sim -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln[m^2 - x(1-x)p^2] \right\}. \quad (7.41)$$

On en déduit donc, d'après la condition (7.40),

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2 \Gamma(2 - \frac{d}{2})}{2 (4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{[m^2 - x(1-x)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{(m^2)^{2-d/2}} \right)$$

$$\xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma + 3 \ln(4\pi) - \ln[m^2 - x(1-x)4m^2] - 2 \ln m^2 \right\}$$

qui est *divergent*. Notons que la divergence logarithmique en $\ln \Lambda$ se manifeste en régularisation dimensionnelle par la présence d'un pôle en $1/\varepsilon$.

On obtient donc finalement

$$i\mathcal{M} = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \left[\ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2 - x(1-x)4m^2} + \ln \frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2} + \ln \frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2} \right] dx,$$

qui est maintenant finie. L'intégration sur x ne pose pas de difficulté particulière. De façon générale, pour des diagrammes à plusieurs boucles, cette dernière étape consistant à intégrer successivement sur plusieurs paramètres de Feynman (un par boucle) est la plus difficile techniquement. Elle nécessite d'utiliser des techniques de manipulation de fonctions spéciales assez sophistiquées (les fonctions que l'on obtient typiquement sont des fonctions hypergéométriques).

7.3.2 Calcul de δ_Z et δ_m

Notons comme en (6.5) $\text{---} \textcircled{1 \text{ PI}} \text{---} \equiv -iM^2(p^2)$ la somme de toutes les contributions 1-PI au propagateur. En suivant la même démarche qu'en (6.6), on constate que le propagateur complet peut s'écrire comme une série géométrique de raison $-iM^2(p^2)$:

$$\text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} = \text{---} \frac{i}{p^2 - m^2} \text{---} + \text{---} \textcircled{1 \text{ PI}} \text{---} + \text{---} \textcircled{1 \text{ PI}} \text{---} \textcircled{1 \text{ PI}} \text{---} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)}.$$
(7.42)

On notera que l'équation (7.42) fait intervenir la masse physique m , contrairement au développement (6.6) qui faisait intervenir la masse nue m_0 . Ceci vient du fait que nous travaillons ici en théorie des perturbations renormalisée.

Condition de renormalisation :

On demande, en suivant (7.36), que

$$\text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{termes réguliers en } p^2 = m^2,$$

ce qui conduit aux deux relations

$$M^2(p^2)\Big|_{p^2=m^2} = 0 \quad (7.43)$$

$$\frac{d}{dp^2}M^2(p^2)\Big|_{p^2=m^2} = 0 \quad (7.44)$$

Ces équations sont les analogues des conditions (6.9) et (6.11) que nous avons obtenues dans le langage de la théorie des perturbations nue.

A une boucle, les contributions 1-particule irréductibles au propagateur s'écrivent

$$\begin{aligned} -iM^2(p^2) &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= -i\lambda \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\ &= \underbrace{-i \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}}}_{\text{indépendant de } p^2} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \end{aligned} \quad (7.45)$$


$$\text{indépendant de } p^2 \quad (7.46)$$

Les conditions de renormalisation (7.43) et (7.44) s'écrivent donc

$$\begin{cases} \delta_z = 0 \\ \delta_m = -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}} \end{cases} ,$$

d'où l'on déduit que $M^2(p^2) = 0$ pour toute valeur de p^2 .

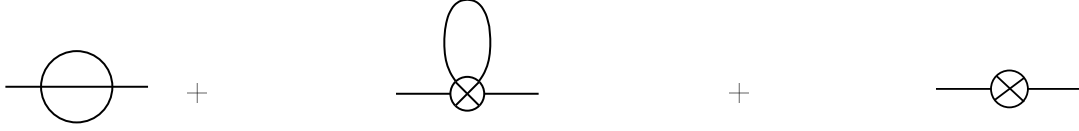
Remarque:

Pour un lagrangien avec un terme d'interaction : $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$:, la contribution  de type tad-pole ne peut apparaître puisque les contractions à l'intérieur de : ϕ^4 : sont interdites (d'après le théorème de Wick).

Il ne reste donc dans le développement (7.45) que le terme $i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$, et il est alors immédiat que $\delta_Z = \delta_m = 0$ est la seule solution des conditions de renormalisation, ce qui donne encore $M(p^2) = 0$.

Le remplacement $\phi^4 \leftrightarrow \phi^4$: revient donc juste à décaler par une constante non physique la valeur de δ_m .

A l'ordre 2 boucles, $M^2(p^2)$ et δ_Z sont non nuls. On trouvera le calcul explicite des contributions correspondantes dans Peskin. La structure du résultat est la suivante :



contient δ_λ à l'ordre λ , déjà calculé lors du calcul à une boucle. Il compense la divergence UV du premier diagramme quand l'impulsion **d'une** des boucles est grande et l'autre petite

$p^2\delta_Z - m$ **qu'il faut fixer à l'ordre λ^2** en imposant qu'il compense la divergence du premier diagramme quand les impulsions des **2 boucles** sont grandes

7.4 Renormalisation de QED

7.4.1 Théorie des perturbations renormalisée

On suit la méthode des perturbations renormalisée. Partons du lagrangien nu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m_0) \psi - e_0 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu.$$

En théorie des perturbation nue, la structure des propagateurs complet doit être du type

$$\begin{array}{c} p \\ \leftarrow \bullet \leftarrow \end{array} = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \dots \quad \begin{array}{c} \mu \\ \leftarrow \bullet \leftarrow \\ \nu \end{array} = -\frac{iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots$$

par extension immédiate des résultats du chapitre 6.

La formulation renormalisée de la théorie des perturbations nécessite en premier lieu de renormaliser les champs

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi = \sqrt{Z_2} \psi_R \\ A^\mu = \sqrt{Z_3} A_R^\mu \end{array}} \quad (7.47)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_R^{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\psi}_R (i\cancel{\partial} - m_0) \psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R A_{R\mu}$$

e , la charge électrique statique (qui correspond donc à $\Delta t \rightarrow \infty$ soit $q_0 = 0$) mesurée à grandes distances (i.e. $q = 0$), est introduite en posant

$$e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1. \quad (7.48)$$

On écrit alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_R^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_R (i\cancel{\partial} - m) \psi_R - e \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R A_{R\mu} \\ -\frac{1}{4} \delta_3 (F_R^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_R (i\delta_2 \cancel{\partial} - \delta_m) \psi_R - e \delta_1 \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R A_{R\mu} \\ \text{avec } \begin{cases} \delta_3 = Z_3 - 1, & \delta_2 = Z_2 - 1 \\ \delta_m = Z_2 m_0 - m, & \delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{cases} \end{array}} \quad (7.49)$$

En tenant compte du terme de fixation de jauge, on obtient les règles de Feynman suivantes, dans la jauge de Feynman :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \leftarrow q \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} & \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} & \begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \otimes \text{~~~~~} \\ \leftarrow q \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} & -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_3 \\
 \\
 \begin{array}{c} \leftarrow \\ p \end{array} & \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} & \begin{array}{c} \leftarrow \otimes \\ p \end{array} & i(\not{p}\delta_2 - \delta_m) \\
 \\
 \begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \leftarrow \leftarrow \end{array} & -ie\gamma^\mu & \begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \leftarrow \otimes \leftarrow \end{array} & -ie\gamma^\mu \delta_1
 \end{array} \tag{7.50}$$

Le contre-terme du propagateur du photon ci-dessus s'obtient aisément par intégration par partie du terme $-\frac{1}{4}(F_R^{\mu\nu})^2$.

Notations :

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \leftarrow q \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} \text{ (1 PI) } \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} = i\Pi_R^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_R(q^2) \tag{7.51}$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{(1 PI)} \\ \leftarrow \end{array} = -i\Sigma_R(\not{p}) \tag{7.52}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \downarrow q \\ \text{(1 PI)} \\ \nearrow p \quad \searrow p' \end{array} = -ie\Gamma_R^\mu(p', p) \tag{7.53}$$

Il faut calculer ces trois amplitudes qui sont logarithmiquement divergentes à l'aide de la théorie des perturbations renormalisée définie plus haut (d'après ce que nous avons vu lors de l'étude des diagrammes primitivement divergent, ce sont les seules amplitudes à étudier). Nous avons muni ces expressions d'un indice R pour insister sur le fait que ces quantités sont calculées dans la théorie des perturbations renormalisées, i.e. avec les règles (7.50).

7.4.2 Conditions de renormalisation

Les conditions de renormalisation usuelles utilisée en QED sont les conditions dites sur-couche (et statique pour la charge) :

$$\begin{array}{l}
 \Sigma_R(\not{p} = m) = 0 \quad (1) \\
 \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma_R(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} = 0 \quad (2) \\
 \Pi_R(q^2 = 0) = 0 \quad (3) \\
 -ie\Gamma_R^\mu(q = p' - p = 0) = -ie\gamma^\mu \quad (4)
 \end{array} \quad (7.54)$$

Ces conditions sont dites sur couche : on impose que le propagateur de l'électron sur sa couche de masse soit identique à son propagateur libre (conditions (7.54-1) et (7.54-2)), de même pour le photon (condition (7.54-3)). La charge est renormalisée en définissant la charge électrique par sa valeur statique (condition (7.54-4)).

Il est utile de relier ces conditions de renormalisation sur les quantités renormalisées à celles sur les quantités nues. Les quantités une particule-irréductibles renormalisées et nues sont reliées par les relations

$$\not{p} - m - \Sigma_R(\not{p}) = Z_2 (\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})), \quad (7.55)$$

$$1 - \Pi_R(q^2) = Z_3 (1 - \Pi(q^2)), \quad (7.56)$$

$$\Gamma_R^\mu(p', p) \equiv Z_1 \Gamma^\mu(p', p), \quad (7.57)$$

la dernière de ces relations étant une relation qui définit Z_1 . On en déduit les conditions de renormalisation pour les quantités nues :

$$\Sigma(\not{p} = m) = m - m_0, \quad (7.58)$$

$$\left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} = 1 - Z_2^{-1}, \quad (7.59)$$

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}, \quad (7.60)$$

$$\Gamma^\mu(p, p) = Z_1^{-1} \gamma^\mu. \quad (7.61)$$

Remarques:

- Il est important de vérifier que la définition (7.57) de Z_1 est bien en accord avec le choix de définition (7.48) pour la charge électrique physique (i.e. renormalisée) e . En effet, la relation entre les fonctions de corrélation nue et renormalisée une particule-irréductibles entre deux champs fermioniques et un champ photonique s'écrit :

$$\langle \Omega | \bar{\Psi}_R A_R^\mu \Psi_R | \Omega \rangle_{1PI} = Z_2 Z_3^{+1/2} \langle \Omega | \bar{\Psi} A^\mu \Psi | \Omega \rangle_{1PI}. \quad (7.62)$$

On notera le signe des exposants, qui vient de l'amputation. En combinant cette relation avec la définition (7.53), on en déduit que

$$-ie\Gamma_R^\mu(p', p) = Z_2 Z_3^{+1/2} (-ie_0) \Gamma^\mu(p', p), \quad (7.63)$$

d'où, grâce à la définition (7.57),

$$e Z_1 = Z_2 Z_3^{+1/2} e_0 \quad (7.64)$$

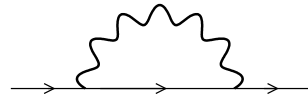
qui est bien identique à (7.48).

• Les conditions de renormalisation (7.54) ne sont pas uniques, et le fait de faire un autre choix de conditions de renormalisations ne doit pas affecter les résultats physique. Cette observation est à la base du groupe de renormalisation qui sera discuté dans un chapitre ultérieur.

7.4.3 Renormalisation de QED à une boucle

Nous donnons ci-dessous le résultat des calculs en régularisation dimensionnelle, après introduction d'un régulateur μ pour les divergences IR (voir détail des calculs dans Le Bellac p. 504; on trouvera la méthode de Pauli-Villars dans Itzykson-Zuber p. 318). La méthode de la régularisation dimensionnelle est détaillée dans la partie 7.5.1 et en suivant la méthode explicitée pour le cas de la théorie scalaire dans la partie 7.3, le calcul ne pose pas de difficultés particulières, même s'il est assez long. On pose $\varepsilon = 4 - d$.

La contribution du diagramme de self-énergie de l'électron à une boucle vaut



$$-i\Sigma_2(p) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) ((4 - \varepsilon)m - (2 - \varepsilon)xp)}{[(1 - x)m^2 + x\mu^2 - x(1 - x)p^2]^{2-d/2}} \quad (7.65)$$

Elle possède comme prévu un pôle en $1/\varepsilon$. L'application des conditions de renormalisation (7.54(1)) et (7.54(2)) fixe la valeur du contre-terme du propagateur de l'électron : (7.54(1)) s'écrit

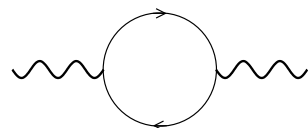
$$\delta_m - m \delta_2 = -\Sigma_2(m) = -\frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) ((4 - 2x - \varepsilon(1 - x)))}{[(1 - x)^2 m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \quad (7.66)$$

et (7.54(2)) conduit à

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \left. \frac{d}{d\mathbf{p}} \Sigma_2(\mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}=m} = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1 - x)^2 m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \\ &\times \left[(2 - \varepsilon)x - \frac{\varepsilon}{2} \frac{2x(1 - x)m^2}{(1 - x)^2 m^2 + x\mu^2} (4 - 2x - \varepsilon(1 - x)) \right] \end{aligned} \quad (7.67)$$

Notons que dans l'équation précédente, seul le premier terme dans le crochet donne une contribution divergente, car le second terme contient un facteur ε qui compense le pôle de la fonction $\Gamma(2 - \frac{d}{2}) = \Gamma(\varepsilon)$.

La contribution du diagramme de self-énergie du photon à une boucle vaut



$$\Pi_2(q^2) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2 - x(1 - x)q^2)^{2-d/2}} \cdot 8x(1 - x) \quad (7.68)$$

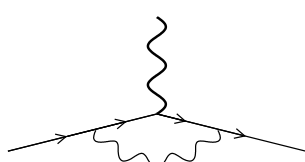
La condition de renormalisation (7.54(3)) impose que

$$\delta_3 = \Pi_2(0), \quad (7.69)$$

soit

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{2-d/2}} \cdot 8x(1-x). \quad (7.70)$$

La contribution à la fonction de vertex amputée à une boucle, exprimée comme une correction au facteur de forme suivant $\delta\Gamma^\mu = \gamma^\mu \delta F_1(q^2)$ (voir chapitre 6 pour une discussion concernant ce facteur de forme), vaut



$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) &= \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\times \left[\frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \frac{(2-\varepsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Delta^{3-d/2}} \right. \\ &\left. (q^2[2(1-x)(1-y) - \varepsilon xy] + m^2[2(1-4z+z^2) - \varepsilon(1-z)^2]) \right] \end{aligned} \quad (7.71)$$

avec $\Delta = (1-z)^2 m^2 + z\mu^2 - xyq^2$.

On tire de la condition de renormalisation de la fonction de vertex (7.54(4))

$$\begin{aligned} \delta_1 = -\delta F_1(0) &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dz(1-z) \\ &\left[\frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{((1-z)^2 m^2 + z\mu^2)^{2-d/2}} \frac{(2-\varepsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{((1-z)^2 m^2 + z\mu^2)^{3-d/2}} \right. \\ &\left. [2(1-4z+z^2) - \varepsilon(1-z)^2] m^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.72)$$

On notera la présence du facteur $(1-z)$ lorsque l'on passe de (7.71) à (7.72). Il apparaît lorsque l'on intègre sur x et y , à cause du fait que x , y et z varient entre 0 et 1, d'où la présence d'une fonction $\theta(1-y-z)$ lorsque l'on intègre la relation (7.71) par rapport à x . L'intégrale de cette fonction θ par rapport à y conduit à ce facteur.

En intégrant par partie par rapport à z , on peut montrer que $\delta_1 = \delta_2$, i.e. $Z_1 = Z_2$. En particulier, on peut vérifier explicitement que les parties logarithmiquement divergentes (pôles en $1/\varepsilon$) de $-i\Sigma_2$ (cf. (7.65)) et de $\delta\Gamma^\mu$ (cf. (7.71)) vérifient bien la relation (7.14) attendue.

La relation $Z_1 = Z_2$ obtenue ici à une boucle est valable à tous les ordres, comme conséquence des identités de Ward, discutées en détail dans le chapitre 9. En conséquence le lien entre la charge renormalisée et la charge nue $e = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} e_0$ se simplifie en

$$\boxed{e = \sqrt{Z_3} e_0}. \quad (7.73)$$

Cette relation est remarquable, et propre à QED : le couplage physique est relié au couplage nu uniquement par les corrections radiatives au propagateur du photon. Ce n'est pas le cas pour les théories de jauge non-abéliennes, par exemple pour QCD pour laquelle le lien entre le couplage physique de couleur entre quark et gluon fait également intervenir les corrections radiatives à la fonction de vertex quark-gluon et au propagateur du quark.

7.5 Méthodes de calcul des diagrammes en boucles

7.5.1 Régularisation dimensionnelle

Cette méthode très puissante est due à 't Hooft et Veltmann. Elle est adaptée aux théories de jauge, car elle ne brise pas l'invariance de jauge (techniquement, ceci vient du fait qu'elle est compatible avec les translations dans les changements de variables d'intégration). C'est l'un des outils fondamentaux dans les calculs modernes perturbatifs en théorie des champs.

Principe :

On calcule un diagramme de Feynman comme une fonction analytique de la dimension d d'espace temps. Pour d assez petit, les intégrales deviennent convergentes UV. Ensuite, lorsque l'on passe à la limite $d \rightarrow 4$, les expressions finales des **quantités physiques** sont finies, en raison de la renormalisabilité de la théorie. La même méthode de régularisation est applicable pour traiter les problèmes de divergence IR.

Plusieurs conventions sont possibles (voir par exemple Itzykson-Zuber page 377). Voici un **ensemble cohérent de conventions** :

Métrie

On utilise la métrie $g^{\mu\nu} = (+, -, \dots -)$.

Par définition $g^{\mu\nu}$, est la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$. La trace de la matrice $\mathbb{1}$ étant égale à d , on a donc

$$\boxed{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g_{\mu}^{\mu} = d.} \quad (7.74)$$

Cette relation est utile pour ramener une intégrale dont le numérateur possède une structure tensorielle à une intégrale scalaire : ainsi

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f(k^2) k^{\mu} k^{\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 f(k^2). \quad (7.75)$$

Algèbre de Clifford pour l'espace des matrices γ

$$\boxed{\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu},} \quad (7.76)$$

d'où l'on tire, d'après (7.74),

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) &= \gamma_{\nu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma_{\nu} = 2\gamma^{\nu} \gamma_{\nu} \\ &= 2d \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\gamma_{\mu} \gamma^{\mu} = d.} \quad (7.77)$$

De même $\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma_{\mu} = -\gamma^{\mu} \gamma_{\mu} \gamma^{\nu} + 2\gamma^{\mu} g_{\mu}^{\nu}$ (en anticommutant γ^{ν} et γ_{μ}) soit

$$\boxed{\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma_{\mu} = (2-d)\gamma^{\nu}.} \quad (7.78)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = -\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\rho + 2\gamma^\rho \gamma^\nu = (-2 + d)\gamma^\nu \gamma^\rho + 2\gamma^\rho \gamma^\nu.$$

En réécrivant le dernier terme de la somme précédente comme $-2\gamma^\nu \gamma^\rho + 4g^{\rho\nu}$, on obtient donc

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = (d - 4)\gamma^\nu \gamma^\rho + 4g^{\rho\nu}.} \quad (7.79)$$

Enfin

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma^\sigma + 2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho = -(d - 4)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - 4g^{\nu\rho} \gamma^\sigma + 2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho,$$

qui s'écrit encore, en anticommutant γ^ν et γ^ρ dans le dernier terme de l'équation précédente qui devient $-2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + 4\gamma^\sigma g^{\nu\rho}$,

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -(d - 4)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu.} \quad (7.80)$$

Calcul des traces :

Si l'on impose que

$$\boxed{Tr \mathbb{1} = 4} \quad (7.81)$$

(d'autres choix seraient possibles), alors, d'après (7.76),

$$\boxed{Tr \gamma_\mu \gamma_\nu = 4g_{\mu\nu}.} \quad (7.82)$$

Remarque:

γ_5 ne peut être construite de manière non ambiguë en dimension arbitraire. En pratique, le choix

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (7.83)$$

en dimension d conduit à

$$\boxed{\begin{aligned} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0 \text{ pour } \mu = 0, 1, 2, 3 \\ [\gamma_5, \gamma^\mu] &= 0 \text{ pour les } d - 4 \text{ autres dimensions.} \end{aligned}} \quad (7.84)$$

C'est une prescription suffisante lorsque la théorie ne présente pas d'anomalie. Elle permet également de traiter correctement les théories des champs avec anomalie axiale (voir par exemple Peskin Chap.19).

Mesure d'intégration (intégrales euclidiennes et minkowskiennes)

Examinons le calcul de l'intégrale d'une fonction que l'on supposera scalaire. Le calcul des intégrales tensorielles se ramène à celui des intégrales scalaires en utilisant des projecteurs adéquats (voir l'exemple de (7.75)). L'étape suivante consiste à ramener le calcul d'une intégrale minkowskienne à celui d'une intégrale euclidienne par rotation de Wick :

$$\int \frac{d^d k_M}{(2\pi)^d} f(k_M^2) = i \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} f(-k_E^2). \quad (7.85)$$

Dans la suite, nous examinons le calcul d'une intégrale *euclydienne*, de forme générique

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f(k^2). \quad (7.86)$$

On prendra donc garde de ne pas oublier le facteur $+i$ si l'on utilise les résultats qui suivent pour calculer une intégrale minkowskienne.

Le problème pratique qui se pose est d'évaluer la partie angulaire de l'élément d'intégration de (7.86). La généralisation des coordonnées sphérique permet d'écrire

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f(k^2) = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk k^{d-1} f(k^2)$$

où $S_d = \int d\Omega_d$ est la surface de la sphère unité S^{d-1} plongée ici dans un espace de dimension d . On prendra garde aux notations, qui sont standards.

Exemples:

$$\begin{aligned} S^1 &= \text{cercle que l'on plonge dans } \mathbb{R}^2 \\ S^2 &= \text{sphère que l'on plonge dans } \mathbb{R}^3 \\ S^3 &= \text{sphère que l'on plonge dans } \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}}. \quad (7.87)$$

En particulier,

d	$\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$	S_d
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	2π
3	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	4π
4	1	$2\pi^2$

Preuve de (7.87) :

Partant de l'intégrale gaussienne bien connue, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^d &= \pi^{d/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_d e^{-(x_1^2 + \cdots + x_d^2)} = \int d^d \vec{x} e^{-\vec{x}^2} \\ &= S_d \int_0^\infty r^{d-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} S_d \int_0^\infty \rho^{\frac{d}{2}-1} e^{-\rho} d\rho = \frac{1}{2} S_d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\rho = r^2$.

Développement utile

$$\varepsilon \Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1 + \varepsilon) = \Gamma(1) [1 + \varepsilon \psi(1) + \cdots]$$

avec $\psi(1) = -\gamma_E$, où γ_E est la constante d'Euler, et

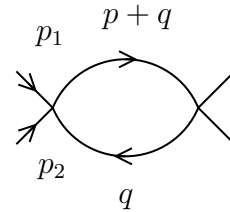
$$\psi(z) \equiv \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

7.5.2 Méthode des paramètres de Feynman

Cette méthode permet d'évaluer de manière systématique les intégrales sur les impulsions qui apparaissent en théorie des champs. L'idée est de grouper l'ensemble des produits de propagateurs d'une expression en un seul terme. Elle fut développée séparément par Feynman et Schwinger.

Exemple simple

Supposons que l'on cherche à évaluer le diagramme ci-contre en théorie ϕ^4 .



$$p = p_1 + p_2$$

Ce diagramme s'écrit

$$\mathcal{A} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2(p+q)^2}.$$

Afin de regrouper les deux propagateurs, nous allons utiliser la relation

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{(Ax + B(1-x))^2}.$$

Preuve:

$$\int_0^1 \frac{dx}{[Ax + B(1-x)]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(A-B)x + B]^2} = \frac{-1}{(A-B)x + B} \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{A-B} = \frac{1}{AB}.$$

Ceci permet d'écrire

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2(p+q)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[x(p+q)^2 + (1-x)q^2]^2}.$$

On complète à présent le carré afin que le dénominateur soit de la forme $[\ell^2 + \text{cste}]^2$:

$$x(p+q)^2 + (1-x)q^2 = (q+xp)^2 + x(1-x)p^2$$

et l'on pose naturellement $\ell = q + xp$, ce qui permet d'intégrer par rapport à q , puisque $d^d q = d^d \ell$. Notons qu'il est essentiel en particulier en régularisation dimensionnelle que les prescriptions définissant l'intégration respectent l'invariance par translation. Il reste à évaluer

$$\mathcal{A} = \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\ell^2 + x(1-x)p^2]^2}.$$

L'intégrand possède une symétrie sphérique par rapport à ℓ , donc l'intégrale est facile à calculer, à condition d'avoir effectué la rotation de Wick $\ell^0 \rightarrow i\ell_E^0$ pour que l'intégrale soit euclidienne. L'intégrale difficile à calculer est celle par rapport à x . Dans le cas présent, elle se ramène à une intégrale de type fonction B d'Euler (voir la relation (7.91) pour le résultat général concernant ce type d'intégrale).

Méthode générale

La méthode repose sur l'identité

$$\boxed{\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta\left(1 - \sum_1^n x_i\right) x_1^{\alpha_1-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1}}{[A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n]^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}.} \quad (7.88)$$

Les α_i sont des nombres arbitraires, réels ou complexes. En régularisation dimensionnelle, $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ sont en général non entiers. Les n variables d'intégration x_i sont appelés paramètres de Feynman.

Preuve:

$$\frac{1}{A^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-tA} t^{\alpha-1} dt \quad \text{car} \quad \Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt. \quad (7.89)$$

donc

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^\infty e^{-(t_1 A_1 + \cdots + t_n A_n)} t_1^{\alpha_1-1} \cdots t_n^{\alpha_n-1} dt_1 \cdots dt_n.$$

On insère

$$\int_0^\infty d\lambda \delta(\lambda - t_1 - \cdots - t_n) = 1,$$

et on effectue le changement de variables

$$\begin{cases} t_1 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ t_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dx_1 \cdots dx_n \lambda^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1} x_1^{\alpha_1-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1} \\ &\quad \times \delta\left(1 - \sum_1^n x_i\right) e^{-\lambda[x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n]}. \end{aligned}$$

car

$$\delta(\lambda - \lambda x_1 - \cdots - \lambda x_n) = \frac{1}{\lambda} \delta(1 - x_1 - \cdots - x_n).$$

On intègre ensuite sur λ , ce qui donne le terme

$$\frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{(A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}$$

d'après (7.89). A cause de la contrainte $1 - \sum_1^n x_i = 0$, on peut ensuite ramener les intégrales sur x_i entre 0 et 1, ce qui achève la preuve.

On prendra garde à l'utilisation pratique de (7.88) : à cause des conditions $0 \leq x_i \leq 1$, l'intégration sur l'une des variables x_i , par exemple x_k , pour la faire disparaître à l'aide de la distribution de Dirac $\delta(1 - \sum x_i)$ introduit une fonction

$$\theta \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i - \sum_{i=k+1}^n x_i \right)$$

qu'il ne faut pas oublier.

Quelques cas particuliers utiles

Dans le cas particulier de (7.88) correspondant à $n = 2$,

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[xA + (1-x)B]^{\alpha+\beta}}$$

d'où l'on déduit

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^a}{(k^2 - C)^b} = i \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} (-1)^{b-a} C^{a-b+\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(a + \frac{d}{2}) \Gamma(b - a - \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(b)}, \quad (7.90)$$

où le facteur i est dû à la rotation de Wick. En particulier,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - C)^a} = i \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} (-1)^a C^{-a+\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(a - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)}. \quad (7.91)$$

Le résultat (7.90) s'établit aisément à l'aide de la représentation intégrale de la fonction B d'Euler :

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \equiv B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

avec

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x).$$

7.5.3 Lien entre régularisation dimensionnelle et régularisation avec coupure

Dans le calcul des intégrales divergentes UV, il est possible dans de nombreux cas d'utiliser une coupure explicite (notée Λ), lorsque cette coupure ne brise aucune symétrie. C'est le cas par exemple de la théorie ϕ^4 , qui n'est pas une théorie de jauge. La question naturelle est donc

de relier la divergence logarithmique en $\ln \Lambda$ de cette méthode au pôle en $1/\epsilon$ qui apparaît en régularisation dimensionnelle.

Un exemple générique est donné par l'intégrale correspondant au diagramme de la page 117, dans la limite où l'impulsion dans la voie s est nulle.

Nous souhaitons donc calculer

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4} = \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{i}{\Gamma(d/2)} \int^\Lambda dk \frac{k^{d-1}}{k^4}. \quad (7.92)$$

Cette intégrale est à la fois divergente dans l'UV et dans l'IR.

Intégrale avec coupure explicite IR

Une première façon de traiter cette intégrale est de la couper dans l'IR, en considérant plutôt

$$A = \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{i}{\Gamma(d/2)} \int_\rho^\Lambda dk \frac{k^{d-1}}{k^4}, \quad (7.93)$$

où $\rho > 0$.

Méthode avec coupure UV :

On calcule en dimension 4, avec une coupure Λ :

$$A = \frac{i}{8\pi^2} \int_\rho^\Lambda \frac{dk}{k} = \frac{i}{8\pi^2} (\ln \Lambda - \ln \rho) \sim \frac{i}{8\pi^2} \ln \Lambda. \quad (7.94)$$

Notons que cette méthode correspond à l'ordre des limites $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A]$.

Méthode avec régularisation dimensionnelle :

Elle correspond cette fois à considérer l'ordre des limites $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} A]$. On calcule en effet cette fois en dimension $d = 4 - \epsilon$, sans coupure UV, ce qui s'écrit

$$A = \frac{i}{8\pi^2} \int_\rho^\Lambda \frac{dk}{k^{\epsilon+1}} = \frac{i}{8\pi^2} \left(-\frac{1}{\epsilon} \Lambda^{-\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \rho^{-\epsilon} \right), \quad (7.95)$$

que l'on doit calculer dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ à ϵ fixé. Le premier terme tend vers 0. Ne reste donc que

$$\frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \rho^{-\epsilon},$$

que l'on peut maintenant développer dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, ce qui donne finalement

$$A = \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (7.96)$$

On constate donc explicitement sur ce calcul, en comparant (7.96) et (7.94), qu'à une divergence logarithmique $\ln \Lambda$ correspond un pôle $1/\epsilon$.

Intégrale avec régulateur explicite dans l'IR

On peut introduire un régulateur explicite dans l'infrarouge en considérant

$$B = \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{i}{\Gamma(d/2)} \int_{\rho}^{\Lambda} dk \frac{k^{d-1}}{(k^2 + \Delta)^2}, \quad (7.97)$$

avec $\Delta > 0$ (ce régulateur joue le rôle d'une masse).

Un calcul explicite (le faire !) permet d'obtenir des résultats identiques à (7.96) et (7.94).

Résultat spécifique dans le cadre de la régularisation dimensionnelle

Dans l'approche avec coupure explicite IR et régularisation dimensionnelle, nous avons soigneusement évité la discussion de la divergence IR de l'intégrale (7.93). En fait, en régularisation dimensionnelle, cette intégrale est nulle. Nous allons plus généralement montrer que

$$\boxed{\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-k^2)^\alpha} = 0 \text{ avec } \alpha > 0.} \quad (7.98)$$

Preuve:

La rotation de Wick permet d'écrire

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-k^2)^\alpha} = \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{i}{\Gamma(d/2)} \int_{\rho \rightarrow 0}^{\Lambda \rightarrow \infty} dk \frac{k^{d-1}}{(k^2)^\alpha}. \quad (7.99)$$

Pour aller plus loin, on introduit une coupure arbitraire c ($\rho < c < \Lambda$) pour séparer le secteur UV du secteur IR, et on écrit donc

$$\int_{\rho}^{\Lambda} dk \frac{k^{d-1}}{(k^2)^\alpha} = \int_{\rho}^c dk k^{d-2\alpha-1} + \int_c^{\Lambda} dk k^{d-2\alpha-1}. \quad (7.100)$$

Traitons séparément les deux intégrales précédentes, qui convergent en dimension $d > 2\alpha$ pour la première, et $d < 2\alpha$ pour la seconde. On pose donc $d = 2\alpha - \epsilon_{IR}$ dans la première intégrale, et $d = 2\alpha - \epsilon_{UV}$ dans la seconde. Bien sûr, à la fin du calcul, nous devons faire $\epsilon_{IR} = \epsilon_{UV}$ puisque le calcul est effectué dans une dimension donnée d'espace-temps ! Pour assurer la convergence de chacune des intégrales prises séparément, nous devons pour le moment choisir $\epsilon_{IR} < 0$ et $\epsilon_{UV} > 0$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^{\Lambda} dk \frac{k^{d-1}}{(k^2)^\alpha} &= \int_{\rho}^c dk k^{-1-\epsilon_{IR}} + \int_c^{\Lambda} dk k^{-1-\epsilon_{UV}} \\ &= \left(-\frac{1}{\epsilon_{IR}} c^{-\epsilon_{IR}} + \frac{1}{\epsilon_{IR}} \rho^{-\epsilon_{IR}} \right) + \left(-\frac{1}{\epsilon_{UV}} \Lambda^{-\epsilon_{UV}} + \frac{1}{\epsilon_{UV}} c^{-\epsilon_{UV}} \right) \end{aligned} \quad (7.101)$$

qui se simplifie, dans la limite $\rho \rightarrow 0$ et $\Lambda \rightarrow \infty$, en

$$\int_{\rho}^{\Lambda} dk \frac{k^{d-1}}{(k^2)^\alpha} = -\frac{1}{\epsilon_{IR}} c^{-\epsilon_{IR}} + \frac{1}{\epsilon_{UV}} c^{-\epsilon_{UV}}. \quad (7.102)$$

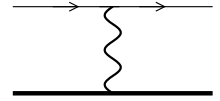
Cette expression possède un pôle en $\epsilon_{IR} = \epsilon_{UV} = 0$ puisqu'elle se réduit, dans la limite $\epsilon_{IR} \rightarrow 0$ et $\epsilon_{UV} \rightarrow 0$, à

$$\int_{\rho}^{\Lambda} dk \frac{k^{d-1}}{(k^2)^{\alpha}} \sim -\frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{1}{\epsilon_{UV}}. \quad (7.103)$$

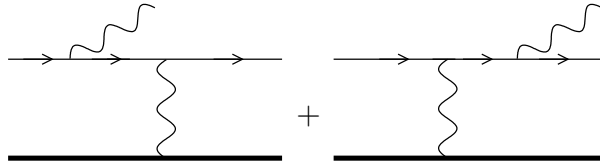
Puisque nous n'avons rencontré que des pôles, nous pouvons utiliser l'expression (7.102) pour définir par prolongement analytique le résultat de l'intégrale dont nous sommes partis. Les contraintes $\epsilon_{IR} < 0$ et $\epsilon_{UV} > 0$ peuvent donc être oubliées (c'est le principe d'une continuation), et l'on peut maintenant faire l'identification $\epsilon_{IR} = \epsilon_{UV} = \epsilon$, d'où l'on déduit d'après (7.102) que l'intégrale dont nous sommes partis est nulle.

7.6 Renormalisation de la charge électrique

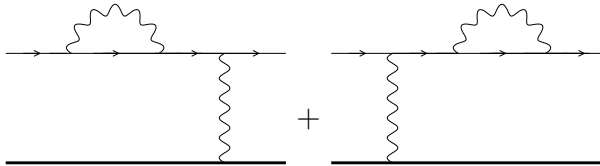
Nous allons revenir sur la renormalisation du couplage électron-photon, déjà étudiée dans le chapitre 6 et dans la partie 7.4 de ce chapitre. Considérons l'interaction d'un électron avec une cible lourde (ion lourd par exemple). Le terme de Born correspond à l'échange d'un photon entre l'électron et la cible, illustré par le diagramme ci-contre. Les corrections à l'ordre α font intervenir quatre types de diagrammes :



En premier lieu, les diagrammes de Bremsstrahlung, correspondant à l'émission d'un photon par l'électron dévié par la cible, et illustrés ci-dessous.

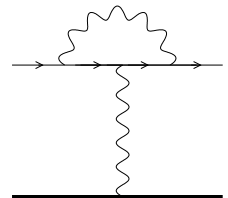


Deuxièmement, les diagrammes correspondant aux corrections radiatives virtuelles des propagateurs des électrons, illustrés ci-dessous.



Troisièmement, le diagramme de correction radiative du vertex électron-photon, illustré ci-contre.

Ces deux derniers types de diagrammes sont divergents à la fois dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet. Les divergences infrarouges proviennent du fait que les photons sont de masse nulle. L'émission d'un photon mou (i.e. de quadri-impulsion négligeable devant les autres impulsions), réelle pour les diagrammes de type Bremsstrahlung, ou virtuelle pour les deux classes précédentes, ne coûte rien en énergie. Ces divergences peuvent être régularisées termes à termes en donnant une masse fictive μ au photon. Elles disparaissent dès que l'on considère une observable physique raisonnable,



i.e. qui est toujours en partie inclusive. On sait bien en effet qu'un détecteur n'a jamais une résolution parfaite en énergie. Dans la réalité, les diagrammes de la première classe (contribution inélastique) et des deux classes précédentes doivent être pris en compte ensemble. La

somme de la section efficace élastique et de la section efficace inélastique devient alors finie. Ceci s'étend au cas de QCD. Dans ce cours, nous ne discuterons pas de façon générale le problème des singularités infrarouges en QED et en QCD.

Enfin, nous devons prendre en compte les corrections dues aux paires virtuelles électron-positron, correspondant au diagramme ci-contre. Le couplage électron-photon est modifié par les corrections radiatives, par les corrections du vertex, du propagateur de l'électron, et du propagateur du photon. Cependant, grâce à l'identité de Ward $Z_1 = Z_2$, nous savons que les corrections du vertex et du propagateur de l'électron se compensent à *tous les ordres*, et que seul l'habillage du propagateur du photon par les corrections radiative modifie ce couplage, suivant la relation (7.73)

$$e = \sqrt{Z_3} e_0.$$

En notant

$$\alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (7.104)$$

les constantes de structure fine nue et physique, on a donc

$$\alpha_{eff.} \equiv \alpha = \alpha_0 Z_3 = \frac{\alpha_0}{1 - \Pi(0)}, \quad (7.105)$$

d'après la structure (7.15) du diagramme $i\Pi^{\mu\nu}(q^2)$ de polarisation du vide du photon et la condition de renormalisation qui définit le couplage physique de l'électron, les divergences ultra-violettes de Z_3 étant absorbées dans α_0 . Cependant, cette relation n'épuise pas l'information contenue dans le fait que les corrections radiatives au couplage entre les deux charges sont dues à l'habillage du propagateur du photon. En effet, pour une impulsion q échangée quelconque, on montre (voir chapitre 9), que le propagateur complet du photon s'écrit, en jauge covariante

$$G^{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 + i\varepsilon} \left[\frac{T^{\mu\nu}}{1 - \Pi(q^2)} + \xi L^{\mu\nu} \right]. \quad (7.106)$$

Le terme $L^{\mu\nu}$ ne contribue pas lorsque l'on calcule un élément de matrice S , à cause de l'identité de Ward $q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ (voir chapitre 9) valable lorsque les fermions externes sont sur couche, ce qui est le cas pour un élément de matrice S .

Si l'on effectue le calcul en théorie des perturbations nue, l'effet de la polarisation du vide est donc en pratique de remplacer le propagateur complet du photon par

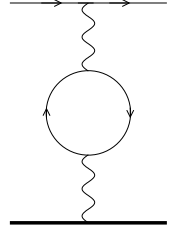
$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 - \Pi(q^2)}$$

ce qui signifie que la constante de structure fine α doit être remplacée par

$$\alpha_{eff.}(q^2) = \frac{e_0^2}{4\pi} \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{Z_3(1 - \Pi(q^2))}. \quad (7.107)$$

En théorie des perturbation renormalisée, en incluant l'ensemble des contributions (i.e. y compris les contre-termes) dans la définition de $\Pi_R(q^2)$, ceci s'écrirait

$$\alpha_{eff.}(q^2) = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{1 - \Pi_R(q^2)}, \quad (7.108)$$



en accord avec (7.107) puisque

$$\frac{1}{1 - \Pi_R(q^2)} = \frac{1}{Z_3} \frac{1}{1 - \Pi(q^2)}. \quad (7.109)$$

Quelle que soit la façon dont on formule la renormalisation perturbative de QED, on obtient donc bien sûr un résultat identique, qui s'écrit encore

$$\alpha_{eff.}(q^2) = \alpha_{eff.}(0) \frac{1 - \Pi(0)}{1 - \Pi(q^2)} = \alpha \frac{1 - \Pi(0)}{1 - \Pi(q^2)}. \quad (7.110)$$

Dans la relation précédente, numérateur et dénominateur sont séparément divergent dans l'ultraviolet, mais en revanche leur rapport est fini. On obtient ainsi une relation entre le couplage statique et le couplage pour une virtualité q^2 arbitraire.

A l'ordre α , cette relation peut être remplacée par

$$\alpha_{eff.}(q^2) \simeq \alpha \frac{1}{1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))} = \alpha \frac{1}{1 - \widehat{\Pi}_2(q^2)}. \quad (7.111)$$

Nous allons maintenant examiner cette relation.

7.6.1 Structure analytique de $\widehat{\Pi}_2$

D'après la relation (7.68), on a

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) = \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \quad (7.112)$$

qui est finie.

Canaux t et u : ils correspondent à $q^2 < 0$, domaine pour lequel $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ est réel et analytique d'après la structure de l'argument du logarithme apparaissant dans la relation précédente.

Canal s : il correspond à $q^2 > 0$. Comme la fonction \ln a une coupure lorsque son argument devient négatif, $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ a une coupure pour $m^2 - x(1-x)q^2 < 0$. Or $x(1-x)$ peut atteindre $\frac{1}{4}$, donc $m^2 - x(1-x)q^2$ peut devenir négatif si et seulement si $m^2 - \frac{q^2}{4} \leq 0$. Ainsi

$\widehat{\Pi}_2(q^2)$ est analytique dans le plan complexe de la variable q^2 en dehors de la coupure $q^2 \geq 4m^2$ correspondant au seuil de production de paires e^+e^- .

Supposons que $q^2 \geq 4m^2$ et examinons la discontinuité de $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ le long de cette coupure. Soit

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} < 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} m^2 - x(1-x)q^2 &= m^2 - \frac{q^2}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 q^2 = \frac{q^2}{4} \left[\frac{4m^2}{q^2} - 1 + 4 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \\ &= q^2 \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta\right) \right) \left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta\right) \right) \end{aligned}$$

donc $m^2 - x(1-x)^2q^2 < 0$ pour $x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta]$. En dehors de ce domaine, \ln est réel. Sur ce domaine, on a

$$\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)(q^2 \pm i\varepsilon)} = \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2 \mp i\varepsilon} = \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \pm i\varepsilon$$

qui est du type $-X \pm i\varepsilon$ avec X réel positif. Comme $\ln(-X \pm i\varepsilon) = \pm\pi$, on en déduit

$$\begin{aligned} \text{Im } \widehat{\Pi}_2(q^2 \pm i\varepsilon) &= \frac{-2\alpha}{\pi} (\pm\pi) \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta} dx x(1-x) = \mp 2\alpha \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} dy \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) \\ &= \mp 2\alpha \left[\frac{\beta}{4} - \frac{2}{3} \frac{\beta^3}{8} \right] = \mp \frac{\alpha}{2} \beta \left[1 - \frac{\beta^2}{3} \right] = \mp \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right). \end{aligned} \quad (7.113)$$

Ce résultat est identique (à un facteur multiplicatif près) à la section efficace totale $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ à l'ordre Born (on suppose que f n'est pas un électron, pour ne pas avoir à considérer le diagramme avec échange de photon dans la voie t), par exemple $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Rappelons en effet que la section efficace totale $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ vaut

$$\sigma_{tot}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \left[1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right]. \quad (7.114)$$

En effet, d'après le théorème optique,

The diagram shows the optical theorem. On the left, 2Im is multiplied by a diagram of a particle scattering off a target (represented by a grey circle) and emerging in the same state. This is equal to 2 times a diagram of a particle scattering off the target and emerging in a different state (indicated by a vertical dashed line). This is equal to the sum over all possible final states X of the square of the amplitude for a particle scattering off the target and emerging in state X .

relation que nous avons vérifiée ici à l'ordre dominant en α^2 (il est instructif de déterminer la constante multiplicative permettant de relier (7.114) à (7.113)).

7.6.2 Interprétation du couplage effectif

Nous allons à présent interpréter la relation (7.111).

Potentiel non relativiste

L'élément de matrice de la diffusion $e^-(p)Z(P) \rightarrow e^-(p')Z(P')$ (où Z est un ion de charge $Z|e|$) s'écrit, dans la limite non relativiste où le photon a une énergie négligeable,

$$i\mathcal{M} = \frac{(i|e|)(-i|e|Z)(-i)}{-\vec{q}^2[1 - \widehat{\Pi}_2(q^2)]} \bar{u}^{\sigma'_1}(p')\gamma_\mu u^{\sigma_1}(p) \bar{u}^{\sigma'_2}(P')\gamma^\mu u^{\sigma_2}(P).$$

En utilisant l'identité de Gordon, que l'on approxime dans la limite non relativiste, on obtient

$$\bar{u}^{\sigma'_1}(p')\gamma_\mu u^{\sigma_1}(p) \bar{u}^{\sigma'_2}(P')\gamma^\mu u^{\sigma_2}(P) \simeq \frac{(p+p') \cdot (P'+P)}{2m \ 2M} \delta^{\sigma_1\sigma'_1} \delta^{\sigma_2\sigma'_2} \simeq \delta^{\sigma_1\sigma'_1} \delta^{\sigma_2\sigma'_2}$$

donc

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ie^2Z}{\vec{q}^2(1 - \widehat{\Pi}_2(-\vec{q}^2))} \delta^{\sigma_1\sigma'_1} \delta^{\sigma_2\sigma'_2}. \quad (7.115)$$

On peut comparer cette expression à l'amplitude de diffusion en mécanique quantique non relativiste. Pour cela, il suffit de se souvenir que dans le cadre de la théorie quantique des champs, les règles de Feynman énoncée dans le chapitre 2 permettent de calculer les éléments de matrice de iT (au sens $S = 1 + iT$). Le passage à la mécanique quantique correspond à intégrer sur le temps, puisque le processus dure un temps infiniment long et ne dépend pas du temps (ce qui correspond à un échange d'énergie nul). Ceci conduit techniquement à une distribution de Dirac correspondant à la conservation de l'énergie entre particule entrante et sortante. D'autre part, la densité lagrangienne s'écrit comme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cin.} - V$, et à l'ordre le plus bas en perturbation, calculer un élément de matrice de iT correspond donc à calculer la valeur moyenne de $-iV$, d'après le développement de $\exp(i \int d^4x \mathcal{L})$. On peut donc écrire

$$\langle p' | iT | p \rangle = -i\tilde{V}(q)(2\pi)\delta(E_{p'} - E_p), \quad (7.116)$$

où $\tilde{V}(q)$ est la transformée de Fourier du potentiel, d'où l'on tire

$$V(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2 Z}{\vec{q}^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2)]}. \quad (7.117)$$

Comportement à grande distance

Etudions le comportement du potentiel (7.117) dans le régime $r = |\vec{x}| \gg \frac{1}{m} = \lambda_C = 4 \cdot 10^{-13}m$

L'intégrand de (7.117) contribue pour $q \cdot x \lesssim 1$ d'après la méthode de la phase oscillante. Le régime $x \gg \frac{1}{m}$ implique donc que la région contribuant à l'intégrale (7.117) est $|q^2| \ll m^2$. Le développement de la fonction logarithme dans ce régime donne

$$\ln \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \sim -\ln \left(1 - \frac{x(1-x)}{m^2} q^2 \right) \sim \frac{x(1-x)}{m^2} q^2$$

En utilisant l'intégrale

$$\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{1}{30}$$

on obtient donc

$$\left[1 - \hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2) \right]^{-1} \sim \left[1 - \alpha \frac{\vec{q}^2}{m^2} \frac{1}{15\pi} \right]^{-1} \sim 1 + \alpha \frac{\vec{q}^2}{m^2} \frac{1}{15\pi}. \quad (7.118)$$

Ainsi

$$V(x) \underset{x \gg \frac{1}{m}}{\sim} -4\pi\alpha Z \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{\vec{q}^2} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \right] e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}. \quad (7.119)$$

Le premier terme donne la contribution coulombienne habituelle. Pour le montrer, on intègre d'abord sur l'angle entre \vec{q} et \vec{x} , ce qui donne

$$\int d^3q \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{\vec{q}^2} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{+\infty} dq e^{iqx \cos\theta} = \frac{\pi}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{q} (e^{iqx} - e^{-iqx}).$$

L'intégrale sur q peut alors s'effectuer en utilisant la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{q} e^{iqx} = i\pi \operatorname{sgn}(x). \quad (7.120)$$

Preuve:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{q} e^{iqx} = \int_{-\infty}^{+\infty} q dq \frac{e^{iqx}}{q^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q dq e^{iqx}}{q^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} q dq e^{iqx} \left(\frac{1}{q - i\epsilon} - \frac{1}{q + i\epsilon} \right).$$

Pour $x > 0$, on peut fermer le contour d'intégration vers le haut, ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{q} e^{iqx} = \frac{2i\pi}{2i\epsilon} i\epsilon = i\pi.$$

De même, pour $x < 0$, on ferme le contour d'intégration vers le bas, ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{q} e^{iqx} = -\frac{2i\pi}{2i\epsilon} i\epsilon = -i\pi,$$

ce qui achève la preuve de (7.120), et permet d'achever le calcul du terme coulombien venant du premier terme de (7.119).

Le second terme de (7.119) donne une distribution de Dirac. Au total

$$V(x) \underset{x \gg \frac{1}{m}}{\sim} -\frac{Z\alpha}{r} - \frac{4Z\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (7.121)$$

La force électromagnétique devient donc extrêmement élevée à courte distance. Cet effet se manifeste dans le Lamb shift : la levée de dégénérescence correspondante vaut

$$\begin{aligned} \delta E_{n,\ell} &= -\frac{4Z\alpha^2}{15m^2} \int d^3r \psi_{n,\ell}^*(\vec{r}) \delta^{(3)}(\vec{r}) \psi_{n,\ell}(\vec{r}) \\ &= -\frac{4Z\alpha^2}{15m^2} \delta_{\ell,0} |\psi_{n,0}(0)|^2 = -\frac{4Z^4\alpha^5}{15\pi n^3} m \delta_{\ell,0} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la valeur de la fonction d'onde à l'origine dans un potentiel coulombien, qui vaut $\psi_{n,0}(0) = (\pi n^3 a^3)^{-1/2}$ avec $a = (Zm\alpha)^{-1}$ (voir Messiah Tome I p. 356 et p. 410 avec $\epsilon_0 = 1$ dans le choix d'unité utilisé ici).

Dans la théorie de Dirac, les états $n = 2$, $j = \frac{1}{2}$ de parité opposée $2s_{1/2}$ et $2p_{1/2}$ sont dégénérés. En utilisant $\hbar \simeq 4,13 \cdot 10^{-15} eV \cdot s$ et $m_e \simeq 0,511 \text{ MeV}$, on obtient

$$\frac{\Delta E}{\hbar} = -27 \text{ MHz}$$

correspondant à un abaissement du niveau s .

En réalité, en 1947, Lamb et Rutherford ont obtenu +1000 MHz. L'explication principale de cet effet vient de l'interaction de l'électron lié avec les fluctuations du champ électrique du vide (voir Itzykson-Zuber p. 358).

Potentiel d'Uehling

On peut améliorer le développement de $V(x)$ en évitant le développement du logarithme intervenant dans (7.117). Introduisons une masse fictive μ pour le photon, de sorte que

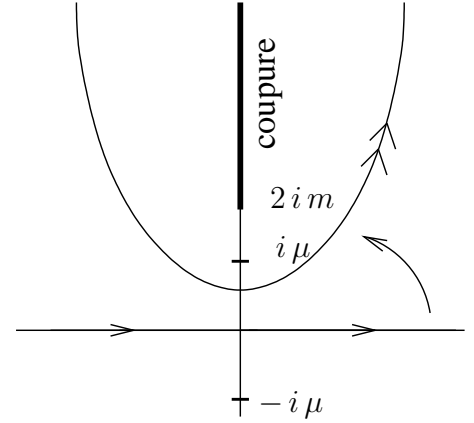
$$V(r) = \frac{ie^2 Z}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + \mu^2} \left[1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2) \right]$$

où $Q = |\vec{q}|$. Cette fonction possède deux pôles en $\pm i\mu$ puisque

$$\frac{1}{Q^2 + \mu^2} = \frac{1}{(Q - i\mu)(Q + i\mu)} = \left[\frac{1}{Q - i\mu} - \frac{1}{Q + i\mu} \right] \frac{1}{2i\mu}.$$

En déformant le contour d'intégration vers le haut comme indiqué sur la figure ci-contre, on obtient

$$V_{\text{pôle}}(r) \sim \frac{ie^2 Z}{(2\pi)^2 r} \frac{\pi i\mu}{\mu} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{Z}{r} = -\frac{Z\alpha}{r}.$$



L'intégrand possède également une coupure pour $Q \in [i2m, i\infty[$, qui contribue pour

$$V_{\text{coupure}}(r) \sim \frac{-iZ e^2}{(2\pi)^2 r} \left[\int_{+\infty+i\varepsilon}^{2m} dq \frac{q e^{-qr}}{-q^2 + \mu^2} \left(1 + \widehat{\Pi}_2(q^2)\right) + \int_{2m}^{+\infty-i\varepsilon} dq \frac{q e^{-qr}}{-q^2 + \mu^2} \left(1 + \widehat{\Pi}_2(q^2)\right) \right]$$

où l'on a posé $q = -iQ$ et utilisé le fait que Q varie de $i\infty - \varepsilon$ à $2im - \varepsilon$ puis de $2im + \varepsilon$ à $i\infty + \varepsilon$. Cela correspond à q variant de $\infty + i\varepsilon$ à $2m + i\varepsilon$ puis de $2m - i\varepsilon$ à $\infty - i\varepsilon$. La contribution sur le demi-cercle de centre $2im$ et de rayon ε est négligeable dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. On a donc

$$V_{\text{coupure}}(r) = \frac{-ie^2 Z}{(2\pi)^2 r} \int_{2m}^{+\infty} dq \frac{q e^{-qr}}{-q^2 + \mu^2} \left[\widehat{\Pi}_2(q^2 - i\varepsilon) - \widehat{\Pi}_2(q^2 + i\varepsilon) \right].$$

Comme

$$i \operatorname{Im} \widehat{\Pi}_2(q^2 - i\varepsilon) = \frac{1}{2} \left[\widehat{\Pi}_2(q^2 - i\varepsilon) - \widehat{\Pi}_2(q^2 + i\varepsilon) \right],$$

on en déduit, en passant à la limite $\mu^2 \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} V_{\text{coupure}}(r) &= \frac{-2e^2 Z}{(2\pi)^2 r} \int_{2m}^{+\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \operatorname{Im} \left[\widehat{\Pi}_2(q^2 - i\varepsilon) \right] \\ &= \frac{-\alpha Z}{r} \frac{2}{\pi} \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \end{aligned}$$

Dans la région à longue distance $r \gg \frac{1}{m}$ que nous examinons, cette intégrale est complètement dominée par la contribution au voisinage de la borne inférieure de l'intégrale, i.e. par $q \sim 2m$. On pose donc $t = q - 2m$ et l'on développe au voisinage de $t = 0$, ce qui donne

$$\delta V(r) \sim \frac{-Z\alpha^2}{r} \frac{1}{2\pi m^{3/2}} e^{-2mr} \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-rt} dt$$

soit en posant $x = \sqrt{t}$,

$$\delta V(r) = \frac{-Z\alpha^2}{r} \frac{1}{\pi m^{3/2}} e^{-2mr} \int_0^{\infty} x^2 e^{-rx^2} dx = \frac{-Z\alpha}{r} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}},$$

l'intégrale sur x valant $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Finalement,

$$\boxed{V(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right)}. \quad (7.122)$$

Le terme exponentiel est appelé potentiel d'Uehling et s'approxime en $\delta(r)$ sur la taille typique d'un atome d'hydrogène.

Considérons à présent le comportement de $|V(r)|$. A courte distance, il augmente, tandis qu'il diminue à grande distance. Cet effet est typique d'un diélectrique, l'écrantage de la charge située en $r = 0$ étant dû aux paires virtuelles e^+e^- . A grande distance, l'écrantage se fait sentir tandis qu'à courte distance, on est de plus en plus sensible à la charge nue $Z|e_0|$. Cette charge nue est bien sûr infiniment plus grande que la charge $Z|e|$ d'après la relation $e = \sqrt{Z_3}e_0$ (on a vu (7.70) que $\delta_3 < 0$, et divergente). La charge nue est habillée d'un nuage de particules virtuelles, qui donnent lieu à des corrections quantiques divergentes. Plus on s'approche de cette charge, moins les effets de ce nuage sont visibles, et plus on se rapproche de la situation d'une charge nue (mais qui reste infinie : on ne finit jamais de s'approcher de la charge !). Le comportement à très courte distance fait l'objet du paragraphe suivant.

Comportement à courte distance

Nous examinons à présent le régime $r \ll \frac{1}{m}$.

L'intégrand de (7.117) contribue pour $q \lesssim \frac{1}{r}$, or $\frac{1}{r} \gg m$, donc l'intégrale est dominée par la région $-q^2 \gg m^2$. Dans ce régime, en utilisant

$$\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} = \frac{m^2}{-q^2} \frac{1}{x(1-x)} \left(1 - \frac{m^2}{q^2 x(1-x)}\right)^{-1}$$

on a

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \sim \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\ln \frac{-q^2}{m^2} + \ln[x(1-x)] + \ln \left(1 - \frac{m^2}{q^2 x(1-x)}\right) \right]. \quad (7.123)$$

La première intégrale vaut $\frac{1}{6}$, tandis que la seconde s'obtient en écrivant

$$\int_0^1 dx x(1-x) \ln[x(1-x)] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{1+\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\Gamma^2(\varepsilon+2)}{\Gamma(2\varepsilon+4)} \Big|_{\varepsilon=0},$$

technique classique pour évaluer analytiquement des intégrales de fonctions logarithmiques. En utilisant

$$\frac{\Gamma^2(\varepsilon+2)}{\Gamma(2\varepsilon+4)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma^2(2)[1+\varepsilon\psi(2)]^2}{\Gamma(4)[1+2\varepsilon\psi(4)]} \sim \frac{\varepsilon}{3}(\psi(2) - \psi(4)) \sim -\frac{5}{18}\varepsilon$$

on tire l'intégrale cherchée. Ainsi

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \sim \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln -\frac{q^2}{m^2} - \frac{5}{3} + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right].$$

Notons que l'intégrale négligée dans (7.123) n'est pas singulière en $x = 0$ et $x = 1$ en raison du préfacteur en $x(1-x)$ devant le logarithme. Sa contribution est en $\frac{m^2}{q^2}$, qui est sous-dominante. Finalement,

$$\boxed{\alpha_{eff}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \widehat{\Pi}_2(q^2)} \sim \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{-q^2}{Am^2}} \quad \text{avec } A = e^{5/3}. \quad (7.124)}$$

A courte distance, le couplage devient donc très intense, à mesure que l'on pénètre le nuage de paires virtuelles e^+e^- .

Si l'on note $R = 1/q$ l'échelle typique de distance correspondant à la virtualité q^2 , on constate d'après (7.118) et (7.124) que le couplage entre deux charges vaut $\alpha = 1/137$, à distance infinie, et qu'il augmente à mesure que l'on diminue la distance R .

Cette situation sera exactement opposée dans le cas de QCD. Techniquement, cela vient du fait que l'identité de Ward $Z_1 = Z_2$ n'est plus satisfaite. Les corrections radiatives au couplage entre deux charges de couleur ne peuvent se réduire aux corrections radiatives du propagateur du gluon. Physiquement, la présence des bosons de jauge donne lieu à un *anti-écranage* des charges.

Chapitre 8

Fonctionnelles génératrices connexes et propres. Action effective

Le but de ce chapitre¹ est d'introduire une méthode systématique pour calculer les fonctions de corrélation connexes, puis les fonctions de corrélation une particule irréductibles, dont nous avons vu l'importance dans l'étude de la renormalisation au chapitre 7. Nous discuterons en particulier en détail le cas de QED et de QCD.

8.1 Fonctionnelle génératrice connexe

Considérons la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation introduite page 21 pour une théorie des champs scalaires :

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}[S[\phi]+J\phi]}. \quad (8.1)$$

On montre alors que

$W(J) = i\hbar \ln Z(J)$
est la fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes :
$\frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} = i^{n+1} \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle_{\text{connexe}}$

(8.2)

Dans la suite, $\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle_{\text{connexe}}$ sera noté de façon équivalente $G_c(x_1, \dots, x_n)$.

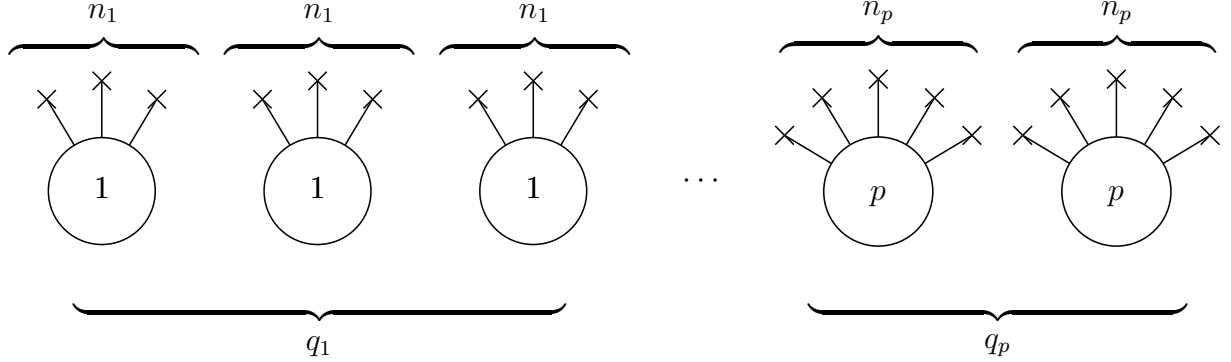
Preuves:

1) **méthode algébrique** (empruntée à Le Bellac)

Soit $G^{(N)}$ un diagramme quelconque, a priori non connexe, que l'on décompose en diagrammes connexes. On regroupe les diagrammes connexes en sous-ensembles de diagrammes

¹Ce chapitre peut être sauté en première lecture. En particulier la partie 8.4 ne sera pas utilisée dans la suite.

ayant un nombre identique de lignes externes n_i . Chaque paquet est constitué de q_i diagrammes, de sorte que $q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N$.



Le nombre de termes indépendants est

$$\frac{N!}{(n_1!)^{q_1} q_1! \dots (n_p!)^{q_p} q_p!} \quad (8.3)$$

en tenant compte des permutations entre les lignes externes d'une part, et entre les différents diagrammes identiques d'autre part. Le développement de la fonctionnelle $Z(J)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{Z(J)}{Z(0)} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int dx_1 \dots dx_N J(x_1) \dots J(x_N) \\ &\times \sum_{q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N} G_c^{(n_1)}(x_1, \dots, x_{n_1}) \dots G_c^{(n_p)}(\dots x_N) \end{aligned} \quad (8.4)$$

soit encore, par symétrie des fonctions de corrélations par rapport à leur argument et en tenant compte du comptage (8.3) du nombre de termes indépendants

$$\begin{aligned} \frac{Z(J)}{Z(0)} &= \sum_{N=0}^{\infty} i^N \sum_{q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N} \prod_{i=1}^p \frac{1}{q_i!} \left[\frac{\int dx_1 \dots dx_{n_i} J(x_1) \dots J(x_{n_i}) G_c^{(n_i)}(x_1, \dots, x_{n_i})}{n_i!} \right]^{q_i} \\ &= \sum_{q_i} \prod_i \frac{1}{q_i!} \left[\frac{\int dx_1 \dots dx_{n_i} i J(x_1) \dots i J(x_{n_i}) G_c^{(n_i)}(x_1, \dots, x_{n_i})}{n_i!} \right]^{q_i} \\ &= \exp \sum_{N=1}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int dx_1 \dots dx_N J(x_1) \dots J(x_N) G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (8.5)$$

ce qui achève la preuve.

2) méthode heuristique

Cette seconde preuve utilise des propriétés de W analogues à celles satisfaites par l'énergie libre en physique statistique. Si l'on effectue la rotation de Wick pour se ramener au cas euclidien, i.e. si l'on pose $x_M^0 = it_E$, on remplace S par iS_E . En faisant $J \rightarrow -iJ_E$, on a alors

$$Z(J) \rightarrow Z_E(J_E) = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}[S_E[\phi] - J_E \phi]}$$

où $J_E \phi$ symbolise $\int dt_E d^3x J_E(x) \phi(x)$.

On pose

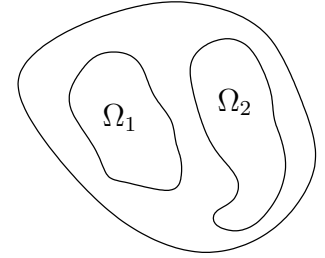
$$W_E(J_E) = \hbar \ln Z_E(J_E), \quad (8.6)$$

qui est clairement l'analogie de l'énergie libre en physique statistique (il suffit de faire $t \rightarrow \frac{1}{\beta}$). W_E possède la propriété d'extensivité pour une théorie des champs locale : soient deux domaines Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et supposons que

$$J(x) = J_1(x) + J_2(x)$$

avec $J_1(x) = 0$ pour $x \notin \Omega_1$ et $J_2(x) = 0$ pour $x \notin \Omega_2$. Alors

$$\begin{aligned} S(\phi) - J\phi &= \int_{x \in \Omega_1} dx [\mathcal{L}(\phi(x)) - J_1(x)\phi(x)] \\ &+ \int_{x \in \Omega_2} dx [\mathcal{L}(\phi(x)) - J_2(x)\phi(x)] \\ &+ \int_{x \notin \Omega_1 \cup \Omega_2} dx \mathcal{L}(\phi(x)) + \text{termes de bord} \end{aligned}$$



$J_1(x)$ et $J_2(x)$ fluctuent par hypothèse autour d'une constante arbitraire petite mais non nulle. On peut écrire

$$Z[J] = Z(J_1 = J_2 = 0) Z_1(J_1) Z_2(J_2) Z_{12}(J_1, J_2),$$

relation qui définit Z_{12} , avec

$$\begin{aligned} Z_1(J_1) &= \int_{x \in \Omega_1} \mathcal{D}\phi e^{[-S(\phi) + J_1 \cdot \phi]} \\ Z_2(J_2) &= \int_{x \in \Omega_2} \mathcal{D}\phi e^{[-S(\phi) + J_2 \cdot \phi]} \end{aligned}$$

normalisés pour que $Z_1(0) = Z_2(0) = 1$ (avec $\hbar = 1$ ici). On a

$$Z_1(J_1) \sim \text{volume de } \Omega_1 \quad Z_2(J_2) \sim \text{volume de } \Omega_2 \quad Z_{12} \sim \text{surface}.$$

Donc dans la limite des grands volumes Ω_1 et Ω_2 ,

$$W(J_1 + J_2) \sim W_1(J_1) + W_2(J_2). \quad (8.7)$$

On en déduit que si $S(\phi) - J \cdot \phi$ est invariant par translation (en particulier ceci nécessite que $J(x)$ est constante), alors $W(J)$ est extensive.

Propriété de cluster

$$\begin{aligned} W_E(J) &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N W^{(N)}(x_1, \cdots, x_N) J(x_1) \cdots J(x_N) \\ W_E(J_1 + J_2) &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{p=0}^N \frac{N!}{p!(N-p)!} \int dx_1 \cdots dx_p dy_{p+1} \cdots dy_N \\ &\times W^{(N)}(x_1, \cdots, x_p, y_{p+1}, \cdots, y_N) J_1(x_1) \cdots J_1(x_p) J_2(y_{p+1}) \cdots J_2(y_N) \end{aligned} \quad (8.8)$$

avec $x_i \in \Omega_1$, $y_i \in \Omega_2$. (8.7) implique que les termes correspondants à $p \neq 0$ ou $p \neq N$ sont négligeables pour Ω_1 et Ω_2 grands. Ceci est équivalent à imposer que

$$W^{(N)}(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_N) \rightarrow 0$$

pour $\min|x_i - y_j| \rightarrow \infty$ avec $i = 1 \dots p$ et $j = p + 1 \dots N$,

i.e. que $W^{(N)}$ décroît rapidement quand $\{x_1, \dots, x_p\}$ et $\{y_{p+1}, \dots, y_N\}$ sont éloignés
En terme de diagramme de Feynman, un diagramme disconnecté peut s'écrire

$$F_1(x_1, \dots, x_p) F_2(y_1, \dots, y_q),$$

qui bien sûr ne change pas si on éloigne les deux sous-ensembles $\{x_1, \dots, x_p\}$ et $\{y_1, \dots, y_q\}$ (en supposant la théorie invariante par translation). Donc les diagrammes de Feynman qui contribuent à $W^{(N)}$ sont tous connectés. Ceci achève cette seconde preuve.

Remarques:

- pour une théorie massive, on montre que les diagrammes de Feynman décroissent comme $e^{-\frac{d}{m}}$ lorsque la distance d entre points devient grande, m étant la masse de la particule la plus légère.

- dans le cas où le fondamental est dégénéré, la propriété de cluster peut être violée.

8.2 Fonctionnelle génératrice propre

Nous allons maintenant définir une fonctionnelle génératrice pour les fonctions de corrélation 1-particule irréductible, encore appelées propres.

Nous avons vu lors de l'introduction de la notion de fonctionnelle génératrice que

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J} = i \frac{\delta}{\delta J(x)} \ln Z[J] = - \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i f(\mathcal{L}+J\phi)} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{i f(\mathcal{L}+J\phi)}}$$

(on revient aux notations minkowskiennes) qui permet de calculer

$$\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = - \frac{\delta W}{\delta J} \Big|_{J=0}$$

On peut cependant considérer le cas plus général d'une source extérieure non nulle : alors

$$\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J = - \frac{\delta W(J)}{\delta J} \equiv \phi_{classique}(x),$$

(8.9)

qui dépend bien sûr de la source $J(x)$.

C'est l'analogie, en mécanique statistique, de l'aimantation M , qui dépend du champ extérieur H . On verra dans la partie 8.4, pour le lecteur curieux, pourquoi on note $\phi_{classique}(x)$ cette valeur moyenne de $\phi(x)$ en présence de J . Dans la suite, on notera $\phi_c(x)$ le champ classique, pour alléger les notations.

Introduisons à présent la transformée de Legendre de $W[J]$ par rapport à la source J .

$$\Gamma(\phi_c) = -W(J) - \int d^4x J(x)\phi_c(x) \quad (8.10)$$

Γ est appelée action effective.

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi_c(x)}\Gamma(\phi_c) &= -\frac{\delta}{\delta\phi_c(x)}W(J) - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\phi_c(x) - J(x) \\ &= -\int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)} \frac{\delta W(J)}{\delta J(y)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\phi_c(y) - J(x) \\ &= -J(x) \quad \text{puisque } -\frac{\delta W(J)}{\delta J(y)} = \phi_c(y) \end{aligned}$$

Remarque:

Ce calcul est le même que celui bien connu qui permet en mécanique de passer de la formulation lagrangienne à la formulation hamiltonienne

$$H(q, \bar{p}) = \bar{p}\dot{q} - L(q, \dot{q})$$

avec \bar{p} solution de l'équation $\bar{p} = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}$. Alors

$$\frac{\delta H}{\delta \bar{p}} = \dot{q} + \bar{p} \frac{\delta \dot{q}}{\delta \bar{p}} - \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \cdot \frac{\delta \dot{q}}{\delta \bar{p}} = \dot{q}.$$

Résumons :

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &= -\frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} \\ J(x) &= -\frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)} \end{aligned} \quad \Gamma(\phi_c) = -W(J) - \int d^4x J(x)\phi_c(x) \quad (8.11)$$

Les diagrammes 1PI sont au cœur de la renormalisation, comme nous l'avons vu dans le

chapitre 7. Nous allons montrer le résultat important suivant

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(\phi_c) \text{ est une fonctionnelle génératrice pour les diagrammes propres (i.e. 1PI) :} \\
 n \geq 2 : & \quad \frac{\delta^n \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x_1) \cdots \delta \phi_c(x_n)} = -i \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{1PI} = \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\
 n = 2 : & \quad \frac{\delta^2 \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x_1) \delta \phi_c(x_2)} = i \left[\text{---} \bullet \text{---} \right]^{-1} \stackrel{\text{Fourier}}{=} p^2 - m^2 - M^2(p^2) \\
 & \quad = p^2 - m^2 - i \text{---} \textcircled{1 \text{ PI}} \text{---}
 \end{aligned}$$

(8.12)

On a utilisé ci-dessus la notation m^2 pour la masse *nue* apparaissant dans le lagrangien. On utilise cette notation dans tout ce chapitre par soucis d'alléger l'écriture. Comme il n'est question nulle part de renormalisation dans ce chapitre, nous espérons éviter toute confusion.

Preuve:

Avant de démontrer à proprement parler ce résultat, nous allons le justifier sur quelques exemples simples. Afin de conserver le caractère général des développements qui suivent, nous supposons que la théorie des champs scalaire considérée possède des couplages parmi lesquels au moins l'un d'eux comporte un nombre *impair* de champs, de manière à ce que les fonctions de corrélations avec un nombre impair de champs ne soient pas trivialement nulles. Le cas particulier de la théorie ϕ^4 simplifie en ce sens la discussion puisque seules les fonctions de corrélation avec un nombre *pair* de champs ne sont pas nulles.

Considérons la relation élémentaire

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = -\delta(x-y). \quad (8.13)$$

Elle s'écrit encore

$$\begin{aligned}
 \delta(x-y) &= -\int d^4 z \frac{\delta \phi_c(z)}{\delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(z) \delta \phi_c(x)} \\
 &= \int d^4 z \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(z)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(z) \delta \phi_c(x)}.
 \end{aligned}$$

Cette relation est exactement la façon opératorielle de définir l'inverse d'un opérateur, vu comme une matrice de dimension infinie dont les coefficients sont indexés par les variables continues x et y :

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} \right)_{x,z} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J \delta J} \right)_{z,y} = 1_{x,y}. \quad (8.14)$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} &= \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c \delta \phi_c} \right]^{-1} (x,y) = -i \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\text{connexe}} = -i G_c^{(2)}(x,y) \\
 &\equiv -i D(x,y).
 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Notons qu'avec les conventions utilisées, $G_c^{(2)}\Gamma^{(2)} = i$.

En introduisant la transformée de Fourier de ce propagateur complet

$$D(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} D(p)$$

(on suppose que J est constant, et donc que ϕ_c l'est aussi, afin de pouvoir utiliser l'invariance par translation) on peut donc écrire

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_c\delta\phi_c} = iD^{-1}(p) = p^2 - m^2 - M^2(p^2) \quad \text{et} \quad +i\frac{\delta^2W}{\delta J\delta J} = \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2} = D(p) \quad (8.16)$$

avec $-iM^2(p^2) \equiv \text{---} \bigcirc \text{---}$ en suivant (6.5).

Pour obtenir les ordres plus élevés, on utilise

$$\frac{\delta}{\delta J(z)} = \int d^4w \frac{\delta\phi_c(w)}{\delta J(z)} \frac{\delta}{\delta\phi_c(w)} = i \int d^4w D(z, w) \frac{\delta}{\delta\phi_c(w)}.$$

Rappel :

Pour une matrice $A(\alpha)$, la relation $A(\alpha)A^{-1}(\alpha) = 1$ conduit à

$$A'(\alpha)A^{-1}(\alpha + A(\alpha))\frac{d}{d\alpha}A^{-1}(\alpha) = 0$$

d'où

$$\frac{d}{d\alpha}A^{-1}(\alpha) = -A^{-1}(\alpha)A'(\alpha)A^{-1}(\alpha). \quad (8.17)$$

On en déduit donc ici que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3W(J)}{\delta J_x\delta J_y\delta J_z} &= i \int d^4w D(z, w) \frac{\delta}{\delta\phi_w^c} \left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_x^2\delta\phi_y^2} \right]^{-1} \\ &= -i \int d^4w D_{zw} \int d^4u \int d^4v (-iD_{xu}) \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_u^c\delta\phi_v^c\delta\phi_w^c} (-iD_{vy}) \\ &= i \int d^4u d^4v d^4w D_{xu}D_{yv}D_{zw} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_u^c\delta\phi_v^c\delta\phi_w^c} \end{aligned}$$

soit finalement

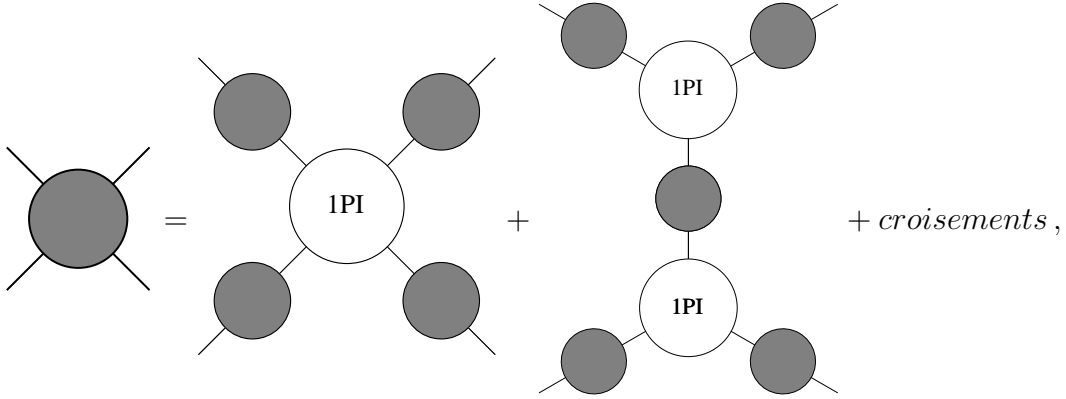
Σ diagrammes connexes

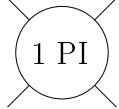
(8.18)

De même, on peut aisément établir que

$$-\frac{i\delta^4 W}{\delta J_w \delta J_x \delta J_y \delta J_z} = D_{sw} D_{xt} D_{yu} D_{zv} \left[\frac{i\delta^4 \Gamma}{\delta \phi_s^c \delta \phi_t^c \delta \phi_u^c \delta \phi_v^c} + \frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_s^c \delta \phi_t^c \delta \phi_r^c} D_{qr} \frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_q^c \delta \phi_u^c \delta \phi_v^c} + (t \leftrightarrow u) + (t \leftrightarrow v) \right]$$

les deux derniers termes correspondant aux diagrammes obtenus par croisement. En mettant cette relation en parallèle avec le développement



on en déduit immédiatement que $\frac{i\delta^4 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi \delta \phi \delta \phi}$ peut être identifié avec .

Nous allons maintenant justifier (8.12) dans le cas général. L'idée est de factoriser le propagateur $G_c^{(2)}$ en extrayant la partie quadratique en ϕ_c de $\Gamma(\phi_c)$. Posons donc

$$\Gamma(\phi_c) = \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \Gamma^{(2)}(x-y) \phi_c(x) \phi_c(y) + \hat{\Gamma}(\phi_c). \quad (8.19)$$

Des relations

$$\phi_c(x) = -\frac{\delta W}{\delta J(x)} \quad \text{et} \quad J(x) = -\frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)}$$

on tire donc

$$-J(y) = \int d^4 x \Gamma^{(2)}(y-x) \times \left(-\frac{\delta W}{\delta J(x)} \right) + \frac{\delta}{\delta \phi_c(y)} \hat{\Gamma} \left(\phi_c = -\frac{\delta W}{\delta J} \right)$$

soit

$$\phi_c(x) = -\frac{\delta W}{\delta J(x)} = i \int d^4 y G_c^{(2)}(x-y) \left[J(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}}{\delta \phi_c(y)} \left(\underbrace{-\frac{\delta W}{\delta J}}_{\text{argument de } \frac{\delta \hat{\Gamma}}{\delta \phi_c(y)}} \right) \right]. \quad (8.20)$$

La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation connexes s'écrit, d'après (8.2),

$$W(J) = \sum_n i^{n+1} \int \frac{1}{n!} G_c(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

donc

$$\phi_c(x) = -\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \sum \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \int G_c^{(n)}(x, \dots, x_n) J(x_2) \cdots J(x_n) \quad (8.21)$$

qui se traduit graphiquement comme

$$\phi_c(x) \equiv x \text{---} \bullet = \sum \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \left. \begin{array}{c} x \text{---} \bigcirc \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \\ G_c^{(n)} \end{array} \right\} n-1 \quad (8.22)$$

$$= i \left[x \text{---} \bigcirc \bullet \begin{array}{l} J \\ \bullet \end{array} + \frac{i}{2!} x \text{---} \bigcirc \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} \begin{array}{l} J \\ J \end{array} + \dots \right]. \quad (8.23)$$

$G_c^{(2)} \qquad G_c^{(3)}$

D'autre part, le développement en série de la fonctionnelle $\Gamma(J)$ s'écrit

$$\Gamma(J) = \sum_n \int \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \cdots \phi_c(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad (8.24)$$

ce qui permet d'écrire le développement (8.20) du champ classique sous la forme

$$\phi_c(x) = i \left[x \text{---} \bigcirc \bullet \begin{array}{l} J \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{2!} x \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{3!} x \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \dots \right] \quad (8.25)$$

$G_c^{(2)} \qquad G_c^{(2)} \quad \Gamma_c^{(3)} \qquad G_c^{(2)} \quad \Gamma_c^{(4)}$

$$= i \left[x \text{---} \bigcirc \bullet \begin{array}{l} J \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{2!} x \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{3!} x \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \dots \right]$$

$G_c^{(2)} \qquad G_c^{(2)} \quad \Gamma_c^{(3)} \qquad G_c^{(2)} \quad i \Gamma^{(3)}$

où l'on a utilisé le développement (8.22). Ce développement systématique en arbre justifie donc finalement (8.12).

Dans la partie 8.4, nous reprendrons ce qui précède en utilisant le fait que $\hbar \rightarrow 0$, ce qui permettra d'utiliser la méthode du col et de justifier le nom de champ classique donné à ϕ_c . On utilisera le formalisme euclidien

$$\begin{cases} -iS_M & = & S_E \\ iJ_M & = & J_E \end{cases}$$

ce qui ne changera bien sûr rien au raisonnement !

8.3 Extension au cas des fermions

La généralisation des fonctionnelles génératrices connexes et propres au cas des fermions ne pose pas de difficultés de principe. Cependant, à cause de la nature grassmannienne des variables utilisées, il importe de fixer avec soin les définitions et les conventions utilisées. Nous allons donc répéter l'analyse des parties précédentes de façon pédestre, ce qui nous permettra d'obtenir des expressions sans ambiguïtés pour les fonctions de corrélations intervenant en QED et en QCD. L'écriture des relations qui vont suivre, bien qu'un peu lourde techniquement, ne présente aucune difficulté de principe, et constitue une simple extension de ce qui précède.

Considérons la fonctionnelle génératrice, normalisée pour que $Z[0] = 1$, définie par

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int \mathcal{L}_{eff} dx} \quad (N : \text{normalisation pour que } Z(0) = 1)$$

avec

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{dyn.} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta.$$

La forme explicite de $\mathcal{L}_{dyn.}$, caractéristique de la théorie considérée, ne nous intéresse pas ici (nous verrons dans les chapitres qui suivent les propriétés satisfaites par $Z[\eta, \bar{\eta}, J]$ dans le cas des théories de jauge abéliennes et non abéliennes). A_μ sera génériquement appelé photon, même si l'ensemble de ce qui suit ne présage rien sur la nature de ce champ vectoriel. Les termes ajoutés à la partie dynamique du lagrangien sont des termes de source qui vont nous permettre de systématiser le calcul des fonctions de corrélation, en accord avec le chapitre 1.

On a alors, en utilisant (1.45) et (1.49),

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \cdots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_n) A_{\rho_1}(z_1) \cdots A_{\rho_p}(z_p) | \Omega \rangle \\ &= \left(-i \frac{\delta}{\delta J^{\rho_1}(z_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J^{\rho_p}(z_p)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta \eta(y_1)} \right) \cdots \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_n)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta \eta(y_n)} \right) Z[0]. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Comme dans le cas (8.2) des particules scalaires, la fonctionnelle génératrice connexe est définie par

$$W[\eta, \bar{\eta}, J] = i \ln Z[\eta, \bar{\eta}, J]. \quad (8.27)$$

et l'on montre comme plus haut que les fonctions de corrélation connexes s'écrivent

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \cdots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_n) A_{\rho_1}(z_1) \cdots A_{\rho_p}(z_p) | \Omega \rangle_{connexe} \\ &= -i \left(-i \frac{\delta}{\delta J^{\rho_1}(z_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J^{\rho_p}(z_p)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta \eta(y_1)} \right) \cdots \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_n)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta \eta(y_n)} \right) W[0]. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Considérons quelques cas particuliers. Le propagateur complet du photon s'écrit

$$\langle \Omega | T A_\mu(x) A_\nu(y) | \Omega \rangle_{\text{connexe}} = G_{\mu\nu}(x, y) = G_{\mu\nu}(x - y) = i \frac{\delta^2}{\delta J^\mu(x) \delta J^\nu(y)} W[0], \quad (8.29)$$

tandis le propagateur complet de l'électron prend la forme

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle_{\text{connexe}} = S(x, y) = S(x - y) = -i \frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} W[0]. \quad (8.30)$$

Le sens des lignes fermioniques étant important, il est utile d'en donner sa représentation de Fourier ainsi que la notation graphique associée :

$$\begin{array}{c} x \quad p \\ \longleftarrow \bullet \longleftarrow y \\ \end{array} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (8.31)$$

Ceci est bien entendu en accord avec le fait que les propagateurs fermioniques se multiplient en *remontant* graphiquement le flux des impulsions circulant dans les lignes. Ce propagateur complet se réduit bien sûr au propagateur S_F donné en (1.52) dans le cas d'une théorie libre².

Terminons avec le vertex complet connexe $ee\gamma$ qui s'écrit

$$\langle \Omega | T A_\mu(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle_{\text{connexe}} = -\frac{\delta^3}{\delta J^\mu(z) \delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} W[0]. \quad (8.32)$$

De la même façon qu'en 8.2, il est naturel d'introduire la fonctionnelle génératrice pour les fonctions de corrélations une particule irréductibles (ou propre), en effectuant une transformée de Legendre sur W , définie par

$$\Gamma(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = -W(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) - \int d^4 x (A_\mu J^\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta). \quad (8.33)$$

Les variables conjuguées vérifient donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_\mu & = -\frac{\delta W}{\delta J^\mu} & J_\mu & = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} \\ \psi & = -\frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} & \bar{\eta} & = +\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \\ \bar{\psi} & = +\frac{\delta W}{\delta \eta} & \eta & = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} \end{array} \right. \quad (8.34)$$

On en déduit en suivant la même logique qu'en (8.13) que

$$\frac{\delta}{\bar{\eta}(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} = \frac{\delta \bar{\eta}(x)}{\delta \bar{\eta}(y)} = \delta(x - y), \quad (8.35)$$

²On prendra garde aux notations utilisées : les propagateurs complets sont notés sans indice (S , D , G) tandis que les propagateurs libres portent l'indice F . Comme d'habitude, il n'y a pas d'unicité dans les notations utilisées. Dans certains ouvrages, les propagateurs libres sont notés avec indice 0. On trouvera également des auteurs (ex : Ryder) utilisant des notations sans indice pour les propagateurs libre et un ' pour les propagateurs complets.

et donc

$$\delta(x - y) = \int d^4z \frac{\delta\bar{\psi}(z)}{\delta\bar{\eta}(y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(x)} = \int d^4z \frac{\delta^2W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta\eta(z)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(x)}, \quad (8.36)$$

ce qui est la relation de définition de l'inverse d'un opérateur, analogue de la relation (8.14) dans le cas scalaire. On peut donc écrire

$$\boxed{\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}\delta\psi} \right]^{-1}(x, y) = \frac{\delta^2W}{\delta\bar{\eta}(x)\delta\eta(y)} = i S(x - y).} \quad (8.37)$$

Remarque:

Si l'on part de la relation

$$\frac{\delta}{\delta\eta(y)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} = -\frac{\delta\eta(x)}{\delta\eta(y)} = -\delta(x - y), \quad (8.38)$$

alors on obtient

$$\delta(x - y) = - \int d^4z \frac{\delta\psi(z)}{\delta\eta(y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\bar{\psi}(x)} = \int d^4z \frac{\delta^2W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(z)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\bar{\psi}(x)}, \quad (8.39)$$

relation équivalente à (8.36) par anticommutation des variables de Grassmann η , $\bar{\eta}$ et ψ , $\bar{\psi}$: (8.36) traduit $M M^{-1} = 1$ tandis que (8.39) exprime $M^{-1} M = 1$, où $M = \frac{\delta^2W}{\delta\bar{\eta}\delta\eta}$.

De la même façon, des relations (8.34) on tire

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(z)} = \int d^4w \frac{\delta A_\nu(w)}{\delta J^\mu(z)} \frac{\delta}{\delta A_\nu(w)} = - \int d^4w \frac{\delta^2W}{\delta J^\mu(z)J^\nu(w)} \frac{\delta}{\delta A_\nu(w)} \quad (8.40)$$

et donc, d'après (8.29),

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(z)} = i \int d^4w G_{\mu\nu}(z, w) \frac{\delta}{\delta A_\nu(w)}, \quad (8.41)$$

d'où l'on déduit que

$$\delta(x - z) g_\mu^\rho = \frac{\delta J^\rho(x)}{\delta J^\mu(z)} = i \int d^4w G_{\mu\nu}(z, w) \frac{\delta J^\rho(x)}{\delta A_\nu(w)} = -i \int d^4w G_{\mu\nu}(z, w) \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\nu(w)\delta A_\rho(x)} \quad (8.42)$$

ce qui montre que

$$\boxed{\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A\delta A} \right]_{\mu\nu}^{-1}(z, w) = \frac{\delta^2W}{\delta J^\mu(z)\delta A^\nu(w)} = -i G_{\mu\nu}(z - w),} \quad (8.43)$$

relation analogue à (8.15).

Nous allons maintenant établir une relation analogue à (8.18), en factorisant explicitement les propagateurs des électrons et du photon sur les lignes externes dans la fonction de corrélation connexe (8.32). En utilisant (8.41), la fonction de corrélation connexe à 3 particules s'écrit

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T A_\mu(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle_{\text{connexe}} &= - \frac{\delta^3 W[0]}{\delta J^\mu(z) \delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \\
&= -i \int d^4 w G_{\mu\nu}(z, w) \frac{\delta}{\delta A_\nu(w)} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \right] \\
&= -i \int d^4 w G_{\mu\nu}(z, w) \frac{\delta}{\delta A_\nu(w)} \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \right]^{-1}(x, y),
\end{aligned} \tag{8.44}$$

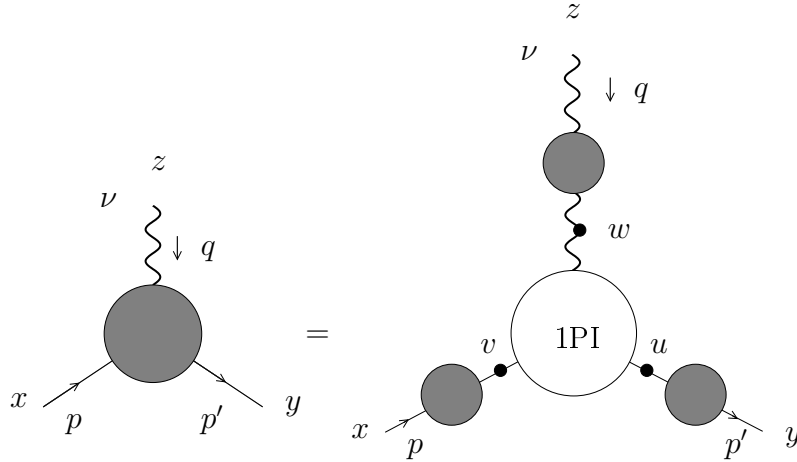
soit encore, d'après (8.17),

$$\begin{aligned}
&\langle \Omega | T A_\mu(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle_{\text{connexe}} \\
&= +i \int d^4 w G_{\mu\nu}(z, w) \int d^4 u d^4 v \left[\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \right]^{-1}(x, u) \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta A_\nu(w) \delta \bar{\psi}(u) \delta \psi(v)} \left[\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \right]^{-1}(v, y) \\
&= +i \int d^4 w G_{\mu\nu}(z, w) \int d^4 u d^4 v i S(x - u) \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta A_\nu(w) \delta \bar{\psi}(u) \delta \psi(v)} i S(v - y)
\end{aligned} \tag{8.45}$$

ce qui montre que

$$\boxed{\frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta A_\nu(w) \delta \bar{\psi}(u) \delta \psi(v)} = i \langle \Omega | T A_\mu(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle_{1PI}} \tag{8.46}$$

La relation (8.45) est illustrée ci-dessous,



où l'on a fait apparaître la représentation en impulsion correspondant à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à 3 particules 1PI qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T A_\nu(w) \psi(u) \bar{\psi}(v) | \Omega \rangle_{1PI} \\
= (-ie) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot v - ip' \cdot u + iq \cdot w} (2\pi)^4 \delta^4(q + p - p') \Gamma_\nu(p', p)
\end{aligned} \tag{8.47}$$

par invariance par translation.

8.4 Action effective et développement en boucles

Nous avons vu dans la partie 8.2 que la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation propres $\Gamma(\phi_c)$ est définie par une transformée de Legendre de $W(J)$. C'est une fonctionnelle du champ classique $\phi_c(x)$ qui est par définition la valeur moyenne du champ $\phi(x)$ en présence d'une source extérieure $J(x)$, ce qui se traduit par la relation, écrite ici dans le cas Minkowskien,

$$\phi_c(x) = -\frac{\delta W(J)}{\delta J(x)}, \quad (8.48)$$

Cette dépendance de $\Gamma(\phi_c)$ en ϕ_c est très intriquée techniquement, à cause de la structure de la relation

$$\Gamma(\phi_c) = -W(J) - \int d^4x J(x) \phi_c(x) \quad (8.49)$$

dans laquelle $\phi_c(x)$ est lui-même fonction implicite de $J(x)$ par inversion de la relation

$$J(x) = -\frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)}. \quad (8.50)$$

Physiquement, le point important dans cette relation, qui donne tout son intérêt aux développements qui vont suivre, est le fait que dans la limite d'une source extérieure nulle, le champ classique ϕ_c satisfait à l'équation

$$\frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)} = 0. \quad (8.51)$$

ce qui montre que $\Gamma(\phi_c)$ joue le rôle d'un potentiel effectif. Si l'on pouvait exprimer exactement Γ comme fonction de ϕ_c , nous aurions un moyen de déterminer le vide Ω de la théorie. On ne sait en général pas le faire de façon exacte, mais nous allons montrer comment mener ce calcul en théorie des perturbations.

8.4.1 Point selle

Considérons la fonctionnelle génératrice d'une théorie des champs scalaires, définie dans l'eulidien :

$$Z(J) = \int [d\phi] e^{-\frac{1}{\hbar}[S_E(\phi) - J_E\phi]}. \quad (8.52)$$

Dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, l'intégrale est dominée par les contributions aux voisinage du point selle $\phi_s(J)$ défini par les équations de point selle

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)}[\phi_s(J)] = J(x) \quad (8.53)$$

où l'inconnue est $\phi_s(J)$. La théorie des perturbations s'obtient alors en développant $\phi_s(J)$ en puissances de J .

Exemple :

Considérons le cas d'une action quadratique en ϕ

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\phi K\phi + V(\phi)$$

avec $V(\phi) = O(\phi^3)$ pour $\phi \rightarrow 0$. L'équation de point selle s'écrit alors

$$K\phi_s + \frac{\delta V}{\delta\phi_s} = J$$

qui se résout de façon récursive sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_s &= \Delta J - \Delta \frac{\delta V[\phi_s]}{\delta\phi} = \Delta J - \Delta \frac{\delta V}{\delta\phi} \left[\Delta J - \Delta \frac{\delta V}{\delta\phi} [\phi_s] \right] = \dots \\ &= \Delta J - \Delta \frac{\delta V}{\delta\phi_s} [\Delta J] + \dots \end{aligned}$$

où $\Delta = K^{-1}$, qui joue le rôle de propagateur dans l'eulidien.

Exemple :

Dans le cas de la théorie ϕ^4 ,

$$V(\phi) = \frac{g}{4!} \int dx \phi^4(x) \quad \text{et} \quad \frac{\delta V}{\delta\phi} = \frac{g}{3!} \int dx \phi^3(x)$$

conduisent à

$$\phi_s = \Delta J - \Delta \frac{g}{3!} \left[\Delta J - \Delta \frac{g}{3!} [\Delta J - \dots]^3 \right]^3.$$

qui conduit au développement suivant (les lignes symbolisent le propagateur $nu \Delta$) :

$$\begin{aligned} \phi_c(x) = & \text{---} \bullet \text{---} J - \frac{g}{3!} \text{---} \bullet \begin{array}{l} \diagup \bullet J \\ \text{---} \bullet J \\ \diagdown \bullet J \end{array} + 3 \left(-\frac{g}{3!}\right)^2 \text{---} \bullet \begin{array}{l} \diagup \bullet J \\ \diagup \bullet J \\ \text{---} \bullet J \\ \diagdown \bullet J \end{array} \\ & + 3 \left(-\frac{g}{3!}\right)^3 \text{---} \bullet \begin{array}{l} \diagup \bullet J \\ \diagup \bullet J \\ \text{---} \bullet J \\ \diagdown \bullet J \\ \diagdown \bullet J \end{array} + 9 \left(-\frac{g}{3!}\right)^3 \text{---} \bullet \begin{array}{l} \diagup \bullet J \\ \diagup \bullet J \\ \text{---} \bullet J \\ \diagdown \bullet J \\ \diagdown \bullet J \\ \diagdown \bullet J \end{array} + O(g^4) \end{aligned} \tag{8.54}$$

Ce développement engendre uniquement des diagrammes en arbres. C'est un cas particulier du résultat de la page 139 (absence de boucles dans les diagrammes 1-particule irréductibles, qui se réduisent simplement à des vertex nus à $n = 4$ pattes, et propagateurs qui sont nus).

8.4.2 Ordre dominant

A l'ordre dominant en puissance de \hbar , la fonctionnelle s'écrit

$$Z_0(J) \sim e^{\left[\frac{1}{\hbar}(-S(\phi_s) + J\phi_s) + O(1)\right]}. \quad (8.55)$$

La fonctionnelle connexe est reliée à Z par

$$W(J) = \hbar \ln Z(J) \quad (8.56)$$

Rappelons que dans l'approche Minkowskienne on poserait naturellement

$$S_E = -iS_{Minkowski} \text{ et } W_E = -iW_M, \text{ i.e. } Z = e^{-\frac{i}{\hbar}W_M}.$$

On en déduit donc

$$W_0(J) = -S(\phi_s) + J\phi_s. \quad (8.57)$$

On effectue maintenant la transformation de Legendre :

$$\phi(x) = \frac{\delta W_0}{\delta J(x)} = \phi_c(x) + \int dy \frac{\delta \phi_c}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta \phi_c(y)} [J\phi_c - S(\phi_c)].$$

La condition de point selle

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} [\phi_s(J)] = J(x)$$

conduit alors à

$$\phi_s(x) = \phi_c(x),$$

d'où

$$W_0(J) + S(\phi_c) - J\phi_c = 0,$$

i.e., puisque

$$\Gamma(\phi_c) + W(J) - \int dx J(x) \phi_c(x) = 0,$$

à l'égalité entre l'action classique et $\Gamma(\phi_c)$:

$$\boxed{\Gamma_0(\varphi) = S(\varphi)}. \quad (8.58)$$

L'action et la fonctionnelle génératrice des diagrammes en arbre connectés sont donc reliés par transformée de Legendre, et $S(\phi_c)$ ne contient que les vertex de la théorie.

8.4.3 Corrections d'ordre \hbar

Afin de prendre en compte les corrections quantiques à l'ordre le plus bas, on pose

$$\phi = \phi_s(J) + \sqrt{\hbar} \chi$$

le but étant d'évaluer l'intégrale gaussienne en développant autour du point selle. L'action s'écrit donc

$$S(\phi) - J(\phi) = S(\phi_s) - J\phi_c + \frac{\hbar}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} \Big|_{\phi=\phi_s} \chi(x_1) \chi(x_2) + O(\hbar^{3/2}) \quad (8.59)$$

et la fonctionnelle Z devient

$$Z(J) \sim Z_0(J) \int [d\chi] \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \chi(x_1) \chi(x_2) \right] \quad (8.60)$$

d'où

$$Z(J) \sim N Z_0(J) \left[\det \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \right]^{-1/2}, \quad (8.61)$$

N étant fixé pour que $Z(0) = 1$. On en déduit alors que

$$W(J) = W_0(J) + \hbar W_1(J) + O(\hbar^2) \quad (8.62)$$

avec

$$W_1(J) = -\frac{1}{2} \left[\text{Tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \Big|_J - \text{Tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \Big|_{J=0} \right] \quad (8.63)$$

puisque

$$Z(J) = \frac{Z_0(J)}{Z_0(0)} \left[\det \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \Big|_J \right]^{-1/2} / \left[\det \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \Big|_{J=0} \right]^{-1/2}. \quad (8.64)$$

Exemple :

Considérons à nouveau la théorie ϕ^4 . On obtient alors

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} = K(x_1, x_2) + \frac{g}{2} \phi^2(x_1) \delta(x_1 - x_2)$$

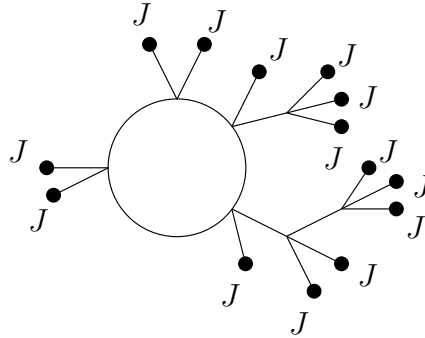
donc

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \Big|_J - \text{Tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_s(x_1)\delta\phi_s(x_2)} \Big|_{J=0} \\ &= \text{Tr} \ln \left[K(x_1, x_2) + \frac{g}{2} \phi_c^2(x_1) \delta(x_1, x_2) \right] - \text{Tr} \ln K(x_1, x_2) \\ &= \text{Tr} \ln \left[\delta(x_1, x_2) + \frac{g}{2} \Delta(x_1, x_2) \phi_s^2(x_2) \right] \end{aligned}$$

Ainsi, en développant en puissance de ϕ_s ,

$$W_1(J) = -\frac{1}{2} \left[\frac{g}{2} \int dx_1 \Delta(x_1, x_2) \phi_s^2(x_1) - \frac{g^2}{8} \int dx_1 dx_2 \Delta(x_1, x_2) \phi_s^2(x_2) \Delta(x_2, x_1) \phi_s^2(x_1) + \dots \right]$$

Il reste à développer en puissance de J pour obtenir la théorie des perturbations. $W_1(J)$ contient maintenant des diagrammes à une boucle, comme illustré ci-dessous :



Considérons à présent la transformation de Legendre

$$\Gamma(\varphi) = \int dx J(x)\varphi(x) - W_0(J) - \hbar W_1(J) + O(\hbar^2)$$

A $\varphi(x)$ fixé, par définition de la transformée de Legendre, $\Gamma(\varphi)$ est stationnaire en $J(x)$. Donc si la relation entre $J(x)$ et $\varphi(x)$ est modifiée par un terme d'ordre \hbar , le membre de droite est modifié par un terme d'ordre \hbar^2 .

A l'ordre \hbar où l'on fait le calcul, on peut donc encore utiliser la relation approchée

$$\phi_c(x) \simeq \phi_s(J; x),$$

ce qui permet finalement d'en déduire le résultat cherché (on peut maintenant remplacer ϕ_c par un champ classique arbitraire ϕ) :

$$\Gamma(\varphi) = S(\varphi) + \hbar\Gamma_1(\varphi) + O(\hbar^2)$$

avec
$$\Gamma_1(\varphi) = \frac{1}{2}tr \left[\ln \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} - \ln \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi\delta\varphi} \Big|_{\varphi=0} \right]$$

(8.65)

Exemple :

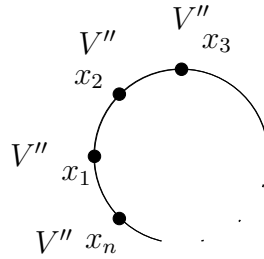
Une théorie scalaire du type

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\phi K\phi + V(\phi)$$

conduit à

$$\Gamma_1(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int dx_1 \cdots dx_n V''(\varphi(x_1))\Delta(x_1, x_2)V''(\varphi(x_2))\Delta(x_2, x_3) \cdots V''(\varphi(x_n))\Delta(x_n, x_1)$$

illustré par



On a donc obtenu la fonctionnelle génératrice des diagrammes à une boucle 1 particule irréductibles.

8.4.4 Lien avec le développement en boucle

Le résultat obtenu à l'ordre \hbar se généralise :

Le développement en puissance de \hbar est un développement en boucles :

$$\hbar^L \leftrightarrow L \text{ boucles}$$

(8.66)

Preuves :

- Effectons le changement de variable $\phi(x) \rightarrow \frac{\phi(x)}{\sqrt{g}}$ (valable pour ϕ^4 , sinon il faut généraliser), auquel correspond au niveau de l'action la transformation

$$\frac{S}{\hbar} \rightarrow \int d^4x \frac{1}{g\hbar} \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 \right)$$

ce qui justifie le résultat.

- autre méthode par comptage direct des puissances de \hbar : en écrivant

$$\frac{1}{\hbar}S(\phi) = \frac{1}{2\hbar}\phi K \phi + \frac{1}{\hbar}V(\phi)$$

on constate qu'à $\Gamma(\phi)$ correspond \hbar^{I-V+1} , le terme $+1$ provenant du préfacteur \hbar apparaissant dans la relation $W(S) = \hbar \ln Z(J)$.

De la relation de conservation globale de l'impulsion $L = I - V + 1$ on déduit finalement le résultat.

Remarque:

Le comptage des puissances des diagrammes de Feynman ou de $W(J)$ est le même car le terme supplémentaire dû au terme de source $\frac{1}{\hbar}J\phi$ ne change rien : il suffit de considérer les

diagrammes amputés, ce qui correspond à enlever

$$\hbar \Delta \text{ (propagateur externe)} \times \frac{J}{\hbar}$$

qui n'apporte pas de puissance \hbar .

Chapitre 9

Identités de Ward en QED

9.1 Les identités de Ward dans la formulation canonique

9.1.1 Preuve formelle

Considérons le courant électromagnétique

$$j_\rho(x) = e : \bar{\psi}(x)\gamma_\rho\psi(x) : \quad (9.1)$$

qui est conservé :

$$\partial^\rho j_\rho(x) = 0.$$

Calculons à présent la quadri-divergence d'une fonction de corrélation arbitraire entre ce courant, un nombre arbitraire n de paires de champs de fermions et d'antifermions et p champs électromagnétiques :

$$\begin{aligned} & \partial_x^\rho \langle \Omega | T j_\rho(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \cdots \bar{\psi}(y_n) A_{\rho_1}(z_1) \cdots A_{\rho_p}(z_p) | \Omega \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \Omega | T \{ [j_0(x), \psi(x_i)] \delta(x^0 - x_i^0) \bar{\psi}(y_i) + \psi(x_i) [j_0(x), \bar{\psi}(y_i)] \delta(x^0 - y_i^0) \} \\ & \times \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \cdots \widehat{\psi(x_i) \bar{\psi}(y_i)} \cdots A_{\rho_p}(z_p) | \Omega \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^p \langle \Omega | T \psi(x_1) \cdots \bar{\psi}(y_n) A_{\rho_1}(z_1) \cdots [j_0(x), A_{\rho_j}(z_j)] \delta(x^0 - z_j^0) \cdots A_{\rho_p}(z_p) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (9.2)$$

où le symbole $\widehat{}$ dénote l'absence des termes correspondants. Le membre de droite de l'équation (9.2) est obtenu à cause du fait que le T -produit fait intervenir des termes typiques en

$$\theta(x^0 - x_i) j_\rho(x) \psi(x_i) + \theta(x_i^0 - x^0) \psi(x_i) j_\rho(x),$$

et l'action de ∂_x sur ces termes donne

$$\delta(x^0 - x_i^0) (j_0(x) \psi(x_i) - \psi(x_i) j_0(x)) = \delta(x^0 - x_i^0) [j_0(x), \psi(x_i)].$$

La quantification canonique impose que

$$[j_0(x), \psi(x')] \delta(x^0 - x'^0) = -e \psi(x) \delta^4(x - x') \quad (9.3)$$

$$[j_0(x), \bar{\psi}(x')] \delta(x^0 - x'^0) = +e \bar{\psi}(x) \delta^4(x - x') \quad (9.4)$$

$$[j_0(x), A_\rho(x')] \delta(x^0 - x'^0) = 0. \quad (9.5)$$

Preuve:

L'égalité (9.5) est immédiate.

Les deux autres égalités se démontrent en partant de $j_0(x) = e : \psi^+(x)\psi(x) :$. En $x^0 = x'^0$, on a

$$\begin{aligned} [\psi^+(x)\psi(x), \psi(x')] &= \psi^+(x)\psi(x)\psi(x') - \psi(x')\psi^+(x)\psi(x) \\ &= \psi^+(x)\psi(x)\psi(x') + \psi^+(x)\psi(x')\psi(x) - \psi(x')\psi^+(x)\psi(x) - \psi^+(x)\psi(x')\psi(x) \\ &= \psi^+(x) \underbrace{\{\psi(x), \psi(x')\}}_0 - \underbrace{\{\psi(x'), \psi^+(x)\}}_{\delta^3(\vec{x}' - \vec{x})} \psi(x) = -\psi(x)\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}). \end{aligned}$$

De même, en $x^0 = x'^0$,

$$\begin{aligned} [\psi^+(x)\psi(x), \bar{\psi}_\beta(x')] &= \left(\psi_\alpha^+(x)\{\psi_\alpha(x), \psi_{\beta'}^+(x')\} - \underbrace{\{\psi_\alpha^+(x), \psi_{\beta'}^+(x')\}}_0 \psi_\alpha(x) \right) \gamma_{\beta'\beta}^0 \\ &= \psi_\alpha^+(x)\delta_{\alpha\beta'}\delta'(\vec{x} - \vec{x}')\gamma_{\beta'\beta}^0 \\ &= \bar{\psi}_\beta(x)\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned}$$

Remarque:

Les relations (9.3), (9.4) et (9.5) expriment le fait que ψ , $\bar{\psi}$ et A créent des quanta de charge électrique $Q = \int j_0(\vec{x}, t)d^3x$ égales à $-e$, e , 0 respectivement.

On obtient donc finalement, d'après (9.2)

$$\begin{aligned} \partial_x^\rho &< \Omega | T j_\rho(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_n) A_{\rho_1}(z_1)\cdots A_{\rho_p}(z_p) | \Omega > \\ &= e < \Omega | T \psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_n) A_{\rho_1}(z_1)\cdots A_{\rho_p}(z_p) | \Omega > \sum_{i=1}^n [\delta^4(x - y_i) - \delta^4(x - x_i)] \end{aligned} \quad (9.6)$$

qui forment les identités de Ward générales.

9.1.2 Identité de Ward pour le propagateur du photon

Dans le cas du propagateur complet du photon, en utilisant le fait que le photon se couple ponctuellement à l'électron, on peut écrire



ce qui s'écrit

$$G_{\rho\sigma}(x-y) = G_{\rho\sigma}^{(0)}(x-y) - i \int d^4x' G_{\rho\sigma'}^{[0]}(x-x') \langle \Omega | T j_{\sigma'}(x') A_\sigma(y) | \Omega \rangle$$

propagateur complet
propagateur libre
(9.7)

En appliquant l'identité (9.6) au cas $n = 0$, $p = 1$, on obtient alors

$$\boxed{\partial_x^\rho G_{\rho\sigma}(x-y) = \partial_x^\rho G_{\rho\sigma}^{[0]}(x-y)} . \quad (9.8)$$

Preuve:

$$\partial_x^\rho G_{\rho\sigma'}^{[0]}(x-x') = -\partial_{x'}^\rho G_{\rho\sigma'}^{[0]}(x-x')$$

donc

$$\begin{aligned} & \partial_x^\rho \int d^4x' G_{\rho\sigma'}^{[0]}(x-x') \langle \Omega | T j_{\sigma'}(x') A_\sigma(y) | \Omega \rangle \\ &= - \int d^4x' \partial_{x'}^\rho G_{\rho\sigma'}^{[0]}(x-x') \langle \Omega | T j_{\sigma'}(x') A_\sigma(y) | \Omega \rangle . \end{aligned}$$

En intégrant par partie, la dérivée du deuxième terme du second membre de (9.7) s'écrit ainsi

$$i \int d^4x' G_{\rho\sigma'}^{[0]}(x-x') \partial_{x'}^\rho \langle \Omega | T j_{\sigma'}(x') A_\sigma(y) | \Omega \rangle = 0$$

par application de l'identité de Ward

$$\partial_{x'}^\rho \langle \Omega | T j_{\sigma'}(x') A_\sigma(y) | \Omega \rangle = 0 ,$$

ce qui prouve le résultat.

En jauge covariante arbitraire, le propagateur du photon s'écrit, d'après (1.58) :

$$G^{[0]\mu\nu}(k) = \tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) .$$

Considérons l'amplitude photon-photon 1-particule irréductible amputée et posons, en accord avec la page 92,

$$\nu \leftarrow \underbrace{\quad}_{q} \text{PI} \rightarrow \nu \equiv i \Pi^{\mu\nu}(q) .$$

On paramètre $\Pi^{\mu\nu}$ sous la forme

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = T^{\mu\nu} \Pi(k^2) k^2 + L^{\mu\nu} L(k^2) k^2 \quad (9.9)$$

avec les projecteurs transverse

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} , \quad (9.10)$$

qui vérifie $T^{\mu\nu}k_\nu = 0$, et longitudinal

$$L^{\mu\nu} = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad (9.11)$$

qui vérifie $L^{\mu\nu}k_\nu = k^\mu$, que nous avons déjà étudiés page 27. Rappelons qu'ils obéissent, comme tous les projecteurs, aux relations

$$T^{\mu\nu}T_{\nu\rho} = T^\mu_\rho \quad \text{et} \quad L^{\mu\nu}L_{\nu\rho} = L^\mu_\rho$$

ainsi qu'à la relation de complétude

$$g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + L^{\mu\nu}.$$

En terme de ces projecteurs, le propagateur libre s'écrit

$$G^{[0]\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} [T^{\mu\nu} + \xi L^{\mu\nu}].$$

Calculons le propagateur complet, dont le développement en terme de l'amplitude photon-photon 1-particule irréductible amputée peut s'écrire symboliquement

ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(k) &= \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} (T^{\mu\rho} + \xi L^{\mu\rho}) \left[g_\rho^\nu + i \left(T_\rho^{\nu'} \Pi(k^2) k^2 + L_\rho^{\nu'} L(k^2) k^2 \right) \left(-i \frac{T_\rho^{\nu'}}{k^2} - i \xi \frac{L_\rho^{\nu'}}{k^2} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} (T^{\mu\rho} + \xi L^{\mu\rho}) \left[g_\rho^\nu + (\Pi(k^2) + \Pi(k^2)^2 + \dots) T_\rho^\nu + (L(k^2) + L(k^2)^2 + \dots) L_\rho^\nu \right] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(k) &= -\frac{i}{k^2 + i\varepsilon} T^{\mu\nu} [1 + \Pi(k^2) + \Pi(k^2)^2 + \dots] - \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \xi L^{\mu\nu} [1 + L(k^2) + L(k^2)^2 + \dots] \\ &= \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left[\frac{T^{\mu\nu}}{1 - \Pi(k^2)} + \xi \frac{L^{\mu\nu}}{1 - L(k^2)} \right]. \end{aligned}$$

D'après l'identité de Ward (9.8), $k_\mu G^{\mu\nu}(k) = k_\mu G^{[0]\mu\nu}(k)$, i.e., puisque $k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ et $k_\mu L^{\mu\nu} = k^\nu$,

$$\frac{1}{1 - L(k^2)} = 1 \quad , \quad \text{d'où} \quad \boxed{L(k^2) = 0}$$

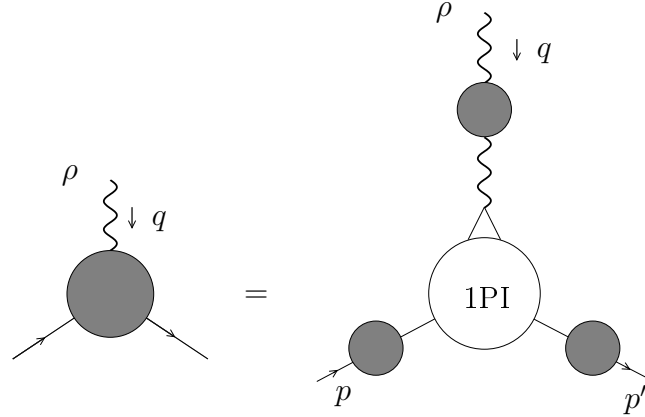
ce qui justifie l'équation (7.15). Ainsi

Le diagramme 1 particule-irréductible est purement transverse : seule la partie transverse de propagateur est affectée par les corrections radiatives, et ne dépend pas de la jauge. Le propagateur photonique complet s'écrit

$$G^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left[\frac{T^{\mu\nu}}{1 - \Pi(k^2)} + \xi L^{\mu\nu} \right] \quad (9.12)$$

9.1.3 Self-énergie et vertex

La fonction de vertex complète qui décrit le couplage photon-électron peut s'écrire



En notant $V_\rho(p', p)$ la fonction de vertex complète, ceci se traduit par

$$-ie(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) V_\rho(p', p) = \underbrace{G_{\rho\rho'}(q)}_{\text{propagateur complet du photon}} \times \underbrace{S(p')}_{\text{propagateur complet de l'électron}} \times \underbrace{(-ie\Gamma^\rho(p', p))}_{\text{vertex amputé}} \times S(p) \quad (9.13)$$

$$\text{propagateur complet du photon} \quad \text{propagateur complet de l'électron} \quad \text{vertex amputé} \quad (9.14)$$

Contractons avec q^ρ . Comme $q^\rho G_{\rho\rho'}(q) = q^\rho G_{\rho\sigma}^{[0]}(q)$ d'après l'identité de Ward (9.8), on obtient donc

$$\begin{aligned} & -ie(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) q^\rho G_{\rho\sigma}^{[0]}(q) S(p') \Gamma_\rho(p', p) S(p) \\ & = -iq^\rho G_{\rho\sigma}^{[0]}(q) \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \langle \Omega | T j^\sigma(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | \Omega \rangle . \end{aligned} \quad (9.15)$$

Or $q^\rho G_{\rho\sigma}^{[0]}(q) \sim q_\sigma$ donc $G_{\rho\sigma}^{[0]}(q)$ ne participe pas à l'équation précédente, que l'on peut donc encore écrire, en intégrant par partie,

$$\begin{aligned} & -ie(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) S(p') q^\rho \Gamma_\rho(p', p) S(p) \\ & = - \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \partial_x^\rho \langle \Omega | T j_\rho(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | \Omega \rangle \\ & = -e \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p' \cdot x_1 - p \cdot y_1 - q \cdot x)} \langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | \Omega \rangle \\ & \quad \times [\delta^4(x - y_1) - \delta^4(x - x_1)] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité de Ward (9.6) dans le cas $n = 1$ et $p = 0$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & -ie(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) S(p') q^\rho \Gamma_\rho(p', p) S(p) \\ & = -e \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 \left[e^{ip' \cdot (x_1 - y_1) + i(p' - p - q) \cdot y_1} \delta^4(x - y_1) \right. \\ & \quad \left. - e^{ip \cdot (x_1 - y_1) + i(p' - p - q) \cdot x_1} \delta^4(x - x_1) \right] \langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | \Omega \rangle . \end{aligned}$$

En utilisant l'invariance par translation de $S(x - y) = \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle$, on obtient

$$-ie S(p') q^\rho \Gamma_\rho(p', p) S(p) = e(S(p) - S(p')) \quad (9.16)$$

qui s'écrit encore

$$\boxed{\begin{aligned} -i q^\rho \Gamma_\rho(p', p) &= S^{-1}(p') - S^{-1}(p) \\ &= -i \{ [\not{p}' - m - \Sigma(p')] - [\not{p} - m - \Sigma(p)] \} \end{aligned}} \quad (9.17)$$

En particulier, à l'ordre le plus bas dans la charge e , puisque $\Gamma_\rho(p', p) = \gamma_\rho$, cette égalité se réduit donc à

$$-i \not{q} = -i(\not{p}' - \not{p}) \quad (9.18)$$

qui est trivialement satisfaite puisque $q = p' - p$.

Il suffit maintenant de différencier (9.17) par rapport à p'^ρ en $q = 0$ pour obtenir :

$$\boxed{\Gamma_\rho(p, p) = i \frac{\partial}{\partial p^\rho} S^{-1}(p)} . \quad (9.19)$$

Comme

$$\Gamma_\rho(p', p) \xrightarrow{p' - p \rightarrow 0} Z_1^{-1} \gamma_\rho \quad (\text{renormalisation du vertex})$$

et

$$S(p) \sim \frac{iZ_2}{\not{p} - m} \quad \text{au voisinage du pôle } p = m,$$

on déduit immédiatement de l'identité de Ward (9.19) que

$$\boxed{Z_1 = Z_2} . \quad (9.20)$$

Les identités de Ward précédentes peut s'écrire symboliquement sous la forme :

$$= e \left[\left(\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \end{array} \right)^{-1} - \left(\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \end{array} \right)^{-1} \right] \quad (9.21)$$

pour (9.17) qui s'écrit

$$q^\rho(-ie\Gamma_\rho) = e (S^{-1}(p') - S^{-1}(p)) ,$$

ou encore, pour (9.16),

$$q^\rho \cdot \left(\text{diagram} \right) = e \left(\text{diagram} - \text{diagram} \right) \tag{9.22}$$

Dans le cas où les deux fermions sont sur couche de masse, on déduit de (9.17) que

$$\boxed{q^\rho \Gamma_\rho(p', p) = 0 \quad e^- \text{ sur couche .}} \tag{9.23}$$

Ceci peut se comprendre facilement grâce à la formule de réduction : le membre de gauche de l'identité (9.22) correspond à un élément de matrice S après avoir extrait le résidu du double pôle $\frac{i\sqrt{Z_2}}{p'-m} \frac{i\sqrt{Z_2}}{p-m}$ (la contraction q^ρ correspond à avoir simplement remplacé la polarisation ε^ρ par q^ρ). Le membre de droite est la somme de deux termes qui possèdent chacun un pôle simple mais pas de double pôle. D'où le résultat.

Cette relation est en pratique l'une des plus importantes conséquences des identités de Ward. Elle se généralise aisément au cas où l'amplitude considérée comporte plusieurs lignes fermioniques et photoniques externes, en utilisant (9.6) avec un nombre non nul p de champs photoniques. La seule condition à satisfaire pour que la contraction de l'impulsion d'un photon arbitraire avec l'amplitude soit nulle est que *les lignes externes fermioniques* soient sur couche de masse. En revanche, les lignes photoniques peuvent être hors couche. Ceci vient du fait que les photons n'ont pas de charge électrique, comme nous en avons déjà fait la remarque juste avant (9.6). Cette extension de (9.23) reste valable dans les théories de Yang-Mills, à condition que toutes les pattes externes (fermions et bosons), hormis celle sur laquelle on contracte, soient sur couche de masse. Cette contrainte supplémentaire vient du fait que les bosons de jauge sont eux-même chargés.

9.2 Identité de Ward en formulation fonctionnelle

Considérons la fonctionnelle génératrice déjà discutée de façon générale dans la partie 8.3, que nous appliquons à présent au cas de QED :

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int \mathcal{L}_{eff} dx} \quad (N : \text{normalisation pour que } Z(0) = 1)$$

avec

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta. \quad (9.24)$$

La présence des trois termes de source dans le lagrangien \mathcal{L}_{eff} brise l'invariance de jauge. En revanche les observables physiques, calculables à l'aide de Z , sont invariantes de jauge. Ceci permet d'écrire une équation différentielle pour Z .

Considérons donc une transformation de jauge infinitésimale

$$\begin{cases} A_\mu & \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda \\ \psi & \rightarrow \psi - ie\Lambda\psi \\ \bar{\psi} & \rightarrow \bar{\psi} + ie\Lambda\bar{\psi} \end{cases} \quad (9.25)$$

(on a posé $\alpha = e\Lambda$ en comparaison de la page 31 : c'est purement conventionnel).

Sous cette transformation, le terme de fixation de jauge et les termes de sources se transforment. En revanche les trois premiers termes de \mathcal{L}_{eff} sont invariants de jauge. Z est donc modifié par un terme en

$$c = e \int dx \left[-\frac{1}{\xi}(\partial^\mu A_\mu)\square\Lambda + J^\mu\partial_\mu\Lambda - ie\Lambda(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right]$$

(à l'ordre linéaire en Λ), qui s'écrit encore, en intégrant par partie,

$$c = 1 + i \int dx \left[-\frac{1}{\xi}\square(\partial^\mu A_\mu) - \partial^\mu J_\mu - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right] \Lambda(x).$$

L'invariance de Z s'écrit donc

$$\boxed{\left[-\frac{1}{\xi}\square(\partial^\mu A_\mu) - \partial^\mu J_\mu - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right] Z = 0.} \quad (9.26)$$

Cette équation peut encore se mettre sous la forme d'une équation différentielle fonctionnelle. En faisant

$$\begin{cases} \psi & \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \\ \bar{\psi} & \rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\eta} \\ A_\mu & \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu} \end{cases} \quad (9.27)$$

et en utilisant

$$\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta = \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi},$$

on obtient

$$\boxed{\left[\frac{i}{\xi}\square\partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} - \partial^\mu J_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta\eta} \right) \right] Z(\bar{\eta}, \eta, J) = 0.} \quad (9.28)$$

qui est l'identité de Ward sous forme fonctionnelle.

Avant de faire le lien avec la forme usuelle de l'identité de Ward, on peut immédiatement retrouver le fait que seule la partie transverse du propagateur du photon est habillée par l'interaction. Différentions (9.28) par rapport à J et faisons $J = \eta = \bar{\eta} = 0$. On obtient alors

$$\frac{i}{\xi} \partial^2 \partial^\mu \frac{\delta^2 Z[0]}{\delta J^\mu(x) \delta J_\nu(y)} = \partial^\nu \delta(x - y)$$

Or le propagateur complet s'écrit, d'après la relation (1.45),

$$G_{\mu\nu}(x, y) = \left(-i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J^\nu(y)} \right) Z[\eta, \bar{\eta}, J] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=J=0} = - \frac{\delta^2}{\delta J^\mu(x) \delta J^\nu(y)} Z \Big|_0,$$

d'où l'on déduit

$$-\frac{i}{\xi} \partial^2 \partial^\mu G_{\mu\nu}(x, y) = \partial_\nu \delta(x - y)$$

qui s'écrit dans l'espace de Fourier, puisque $p_\mu = i\partial_\mu$,

$$\frac{i}{\xi} k^2 k^\mu G_{\mu\nu}(k) = k_\nu.$$

En posant

$$G_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} [T_{\mu\nu} A(k^2) + \xi B(k^2) L_{\mu\nu}]$$

où $T^{\mu\nu}$ et $L^{\mu\nu}$ sont les projecteurs transverses et longitudinaux rappelés en (9.10) et (9.11), on constate immédiatement que $B(k^2) = 1$: on retrouve le résultat déjà établi page 154.

L'équation satisfaite par Z peut facilement être traduite en terme de la fonctionnelle $W = i \ln Z$ des fonctions de Green connexes que nous avons définie en (8.27).

$$\boxed{\left[i e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) + \frac{1}{\xi} \square \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right] W(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) = \partial^\mu J_\mu.} \quad (9.29)$$

On peut à présent en déduire les contraintes satisfaites par Γ , la fonctionnelle génératrice des vertex propres (voir chapitre 8), en effectuant une transformation de Legendre définie par (8.33). Rappelons que

$$\Gamma(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = -W(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) - \int d^4x (A_\mu J^\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta),$$

les variables conjuguées vérifiant

$$\begin{cases} A_\mu &= -\frac{\delta W}{\delta J^\mu} & J_\mu &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} \\ \psi &= -\frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} & \bar{\eta} &= +\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \\ \bar{\psi} &= +\frac{\delta W}{\delta \eta} & \eta &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}}. \end{cases}$$

On en déduit l'identité de Ward satisfaite par la fonctionnelle génératrice propre :

$$\boxed{\partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} - ie \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \psi - \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} \bar{\psi} \right) - \frac{1}{\xi} \square \partial^\mu A_\mu = 0.} \quad (9.30)$$

En différentiant cette équation, on peut maintenant obtenir des relations entre les fonctions de corrélation 1 particule irréductibles.

Exemple:

Nous allons établir l'identité de Ward usuelle (9.17). Différentions (9.30) par rapport à $\psi(x_1)$ et $\bar{\psi}(y_1)$. En utilisant

$$\frac{\delta}{\delta \psi(x_1)} \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(z)} \psi(z) - \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(z)} \bar{\psi}(z) \right] = -\delta(x_1 - z) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(z)} - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x_1) \bar{\psi}(z)} \bar{\psi}(z) \quad (9.31)$$

on obtient, en prenant garde au caractère anticommutable des variables,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi}(y_1) \delta \psi(x_1)} \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(z)} \psi(z) - \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(z)} \bar{\psi}(z) \right] \\ &= -\delta(x_1 - z) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(y_1) \delta \psi(z)} - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x_1) \bar{\psi}(z)} \delta(y_1 - z) \end{aligned} \quad (9.32)$$

La dérivée fonctionnelle de (9.30) par rapport à $\psi(x_1)$ et $\bar{\psi}(y_1)$ en $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$ conduit donc à

$$\partial_z^\mu \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta A^\mu(z) \delta \bar{\psi}(y_1) \delta \psi(x_1)} = ie \left(-\delta(x_1 - z) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(y_1) \delta \psi(z)} + \delta(y_1 - z) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(z) \delta \psi(x_1)} \right).$$

En utilisant la relation (8.37) entre la dérivée seconde de Γ et le propagateur, et le lien établi en (8.46) entre dérivée la troisième de Γ et la fonction de corrélation 1PI à 3 particules, on peut donc écrire

$$i \partial_z^\mu \langle \Omega | T A_\mu(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle_{1PI} = ie \left[i \delta(x_1 - z) S^{-1}(y_1 - z) - i \delta(y_1 - z) S^{-1}(z - x_1) \right] \quad (9.33)$$

La représentation de Fourier (8.31),

$$S(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x - y)}$$

conduit à

$$S^{-1}(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^{-1}(p) e^{-ip \cdot (x - y)} \quad (9.34)$$

En combinant cette expression avec la représentation de Fourier (8.47), la relation (9.33) devient

$$\begin{aligned} & ie q^\mu \Gamma_\mu(p', p) \\ &= -e \left[\delta(x_1 - z) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} S^{-1}(p') e^{-ip' \cdot (y_1 - z)} - \delta(y_1 - z) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^{-1}(p) e^{-ip \cdot (z - x_1)} \right] \\ &= -e \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} S^{-1}(p') e^{ip \cdot (x_1 - z) - ip' \cdot (y_1 - z)} - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} S^{-1}(p) e^{ip \cdot (x_1 - z) - ip' \cdot (y_1 - z)} \right] \end{aligned} \quad (9.35)$$

d'où l'on déduit finalement

$$-i q^\mu \Gamma^\mu(p', p) = S^{-1}(p') - S^{-1}(p)$$

qui est bien en accord avec le résultat obtenu plus haut en (9.17).

Chapitre 10

Renormalisation des théories de Yang-Mills et symétrie BRST

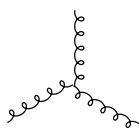
Dans le chapitre 7, nous avons étudié en détail la renormalisation des théories des champs scalaires et des théories de jauge abéliennes (QED). En particulier, la renormalisation de QED repose sur les identités de Ward, développées dans le chapitre 9, conséquences directes de l'invariance de jauge. Nous allons à présent étudier la renormalisation des théories de jauge non abéliennes, dont QCD est l'archétype. En particulier, nous verrons que les fonctions de corrélation de QCD sont sujettes à des identités de Slavnov-Taylor, analogues des identités de Ward de QED. Nous les établirons en utilisant la symétrie BRST.

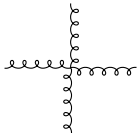
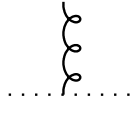
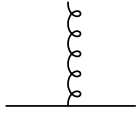
10.1 QCD en théorie des perturbations renormalisée

Nous avons vu dans le chapitre 3 que le lagrangien des théorie de Yang-Mills prend la forme, après quantification en jauge covariante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(A, \psi, c, g, m, \xi) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^a + \bar{\psi} i \not{D} \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \quad (10.1) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a \square c^a + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \\ &\quad - \frac{g}{2} f^{abc} (\partial^\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{cde} A_\mu^a A_\nu^b A^{c\mu} A^{d\nu} + g \bar{\psi} t^a \not{A} \psi - g f_{abc} \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^b c^c \end{aligned}$$

Les trois premiers termes correspondent aux parties cinétiques des gluons, des fantômes et des quarks. Les quatre derniers termes correspondent aux termes d'interaction à 3 gluons, 4 gluons, fantômes-gluon et quark-gluon. Ils ont pour dimensions respectives :

couplage à 3 gluons  $-igf_{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu}$ $3\frac{d-2}{2} + 1 + [g]$

couplage à 4 gluons		$-i\frac{1}{4}g^2 f_{abc}f_{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}$	$4\frac{d-2}{2} + 2[g]$
couplage fantôme-gluon		$-i g f_{abc} \partial^\mu \bar{c}_a A_\mu^b c_c$	$2\frac{d-2}{2} + \frac{d-2}{2} + 1 + [g] = 3\frac{d-2}{2} + 1 + [g]$
couplage quark-gluon		$i g A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi$	$2\frac{d-1}{2} + \frac{d-2}{2} + [g] = 3\frac{d-2}{2} + 1 + [g]$

(10.2)

En écrivant que ces termes doivent être de dimension d , on en déduit que

$$[g] = 2 - \frac{d}{2} \quad (10.3)$$

qui est sans dimension pour $d = 4$. La théorie est donc renormalisable en $d = 4$. Ceci sera vrai si l'on peut démontrer que les contre-termes sont renormalisables (ce qui est vrai d'après l'analyse faite page 104) et préservent la symétrie de jauge, à tous les ordres en perturbation.

10.1.1 Lagrangien renormalisé

L'approche est identique à celle suivie pour les théories scalaire page 99 et pour QED page 109. Rappelons-en la logique.

Le calcul d'observables physiques dans la théorie des perturbations basée sur le lagrangien nu (10.1) donne des quantités divergentes dans l'UV. L'idée de la théorie des perturbations renormalisée est de réécrire le lagrangien nu (10.1), exprimé en terme de champs et de paramètres nus, en terme de champs et de paramètres renormalisés, définis de sorte que la théorie des perturbations ainsi définie devienne finie ordre par ordre en perturbation. Les divergences qui ont disparues sont absorbées dans des constantes de renormalisation notées génériquement Z , qui permettent de passer des champs et paramètres nus au champs et paramètres renormalisés. La façon exacte dont ces divergences sont absorbées dans ces facteurs Z dépend du schéma de renormalisation utilisé (sur-couche, hors-couche, $\overline{\text{MS}}$, ...), comme nous le verrons dans le chapitre 11.

Dans le cas du schéma sur-couche, qui était le schéma implicite dans lequel nous avons raisonné dans le chapitre 7, les corrections radiatives aux propagateurs sont absorbées de sorte que ceux-ci aient la forme, au voisinage de la couche de masse, de propagateurs libres avec masses renormalisées. L'absence de modification du résidu du propagateur au voisinage de la masse physique suppose donc de définir les champs renormalisés en fonction des champs nus de la même façon que l'on relie les champs asymptotiques aux champs nus (comparer (5.1) et (7.28)). On garde conventionnellement cette relation, quelque soit le schéma de renormalisation utilisé, et l'on pose donc

$$\begin{aligned}
A_{0\mu}^a &= Z_3^{1/2} A_{R\mu}^a, & c_0^a &= \tilde{Z}_3^{1/2} c_R^a, & \bar{c}_0^a &= \tilde{Z}_3^{1/2} \bar{c}_R^a \\
\psi_0 &= Z_2^{1/2} \psi_R, & \bar{\psi}_0 &= Z_2^{1/2} \bar{\psi}_R.
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Pour éviter toute confusion, nous précisons ici les notations en mettant un indice 0 devant les quantités nues, et un indice R pour les quantités renormalisées. Le lagrangien s'écrit maintenant

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(A_0, \psi_0, c_0, g_0, m_0, \xi_0) &= -\frac{1}{4} Z_3 (\partial^\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a) (\partial^\mu A_R^{a\nu} - \partial^\nu A_R^{a\mu}) - \frac{1}{2\xi} Z_3 (\partial^\mu A_{R\mu}^a)^2 \\
&+ \tilde{Z}_3 \bar{c}_R^a \square c_R^a + Z_2 \bar{\psi}_R (i\rlap{/}\partial - m_0) \psi_R - \frac{1}{2} g_0 f^{abc} (Z_3)^{3/2} (\partial^\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a) A_R^{b\mu} A_R^{c\nu} \\
&- \frac{1}{4} g_0^2 Z_3^2 f^{abc} f^{cde} A_{R\mu}^a A_{R\nu}^b A_R^{c\mu} A_R^{d\nu} + g_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\psi}_R t^a \not{A}_R \psi_R - g_0 f_{abc} \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2} \partial^\mu \bar{c}_R^a A_{R\mu}^b c_R^c. \tag{10.5}
\end{aligned}$$

On redéfinit les paramètres du lagrangien suivant

$$g_0 = Z_g g_R, \quad \xi_0 = Z_\xi \xi_R, \quad m_0 = Z_m m_R, \tag{10.6}$$

et l'on pose

$$Z_1 = Z_g Z_3^{3/2}, \quad Z_4 = Z_g^2 Z_3^2, \quad \tilde{Z}_1 = Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}, \quad Z_1^F = Z_g Z_2 Z_3^{1/2}, \tag{10.7}$$

ce qui permet de réécrire le lagrangien nu sous la forme

$$\mathcal{L}(A_0, \psi_0, c_0, g_0, m_0, \xi_0) = \mathcal{L}(A_R, \psi_R, c_R, g_R, m_R, \xi_R) + \mathcal{L}_{\text{contre-termes}} \tag{10.8}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(A_R, \psi_R, c_R; g_R, n_R, \xi_R) &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi_R} (\partial^\mu A_{R\mu}^a)^2 \\
&+ \bar{c}_R^a \square c_R^a + \bar{\psi}_R (i\rlap{/}\partial - m_R) \psi_R - \frac{1}{2} g_R f^{abc} (\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a) A_R^{b\mu} A_R^{c\nu} \\
&- \frac{1}{4} g_R^2 f^{abc} f^{cde} A_{R\mu}^a A_{R\nu}^b A_R^{c\mu} A_R^{d\nu} + g_R \bar{\psi}_R t^a \not{A}_R \psi_R - g_R f_{abc} \partial^\mu \bar{c}_R^a A_{R\mu}^b c_R^c \tag{10.9}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{contre-termes}} &= -(Z_3 - 1) \frac{1}{4} (\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a)^2 - (Z_3 Z_\xi^{-1} - 1) \frac{1}{2\xi_R} (\partial^\mu A_{R\mu}^a)^2 + (\tilde{Z}_3 - 1) \bar{c}_R^a \square c_R^a \\
&+ (Z_2 - 1) \bar{\psi}_R i\rlap{/}\partial \psi_R - (Z_m Z_2 - 1) m_R \bar{\psi}_R \psi_R - (Z_1 - 1) \frac{g_R}{2} f^{abc} (\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a) A_R^{b\mu} A_R^{c\nu} \\
&- (Z_4 - 1) \frac{g_R^2}{4} f^{abc} f^{cde} A_{R\mu}^a A_{R\nu}^b A_R^{c\mu} A_R^{d\nu} + (Z_1^F - 1) g_R \bar{\psi}_R t^a \not{A}_R \psi_R - (\tilde{Z}_1 - 1) g_R f_{abc} \partial^\mu \bar{c}_R^a A_{R\mu}^b c_R^c. \tag{10.10}
\end{aligned}$$

Dans la suite, on enlèvera, pour simplifier l'écriture, les indices R . Il est donc sous-entendu à partir de maintenant que les quantités utilisées (champs, paramètres) sont les quantités renormalisées.

Remarques:

- Au niveau classique, nous avons constaté lors de la construction des théories de Yang-Mills au chapitre 2 que le couplage g est universel. Qu'en est-il après renormalisation? Les corrections quantiques préservent-elles cette structure? L'un des but de ce chapitre est de montrer que cette universalité est effectivement conservée.

- D'autre part, les contre-termes (10.10) sont invariants de jauge, à l'exception du terme

$$(Z_3 Z_\xi^{-1} - 1) \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2.$$

La renormalisabilité de la théorie suppose par définition que l'invariance de jauge doit être préservée après renormalisation, et donc que ce contre-terme qui brise l'invariance de jauge doit s'annuler.

Conséquences de ces remarques :

- l'unicité de la constante de couplage impose

$$\boxed{Z_g = Z_1 Z_3^{-3/2} = Z_4^{1/2} Z_3^{-1} = \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_3^{-1} Z_3^{-1/2} = Z_1^F Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}}. \quad (10.11)$$

Ces relations, analogues de l'identité de Ward (9.20), portent le nom d'identités de Slavnov-Taylor.

- l'annulation du contre-terme non invariant de jauge entraîne la relation

$$\boxed{Z_3 = Z_\xi}. \quad (10.12)$$

Nous démontrons plus loin ces relations à l'aide de la symétrie BRST.

10.1.2 Comptage de puissance

Effectuons un comptage de puissance afin de déterminer quels sont les graphes qui divergent superficiellement. Le comptage dimensionnel (10.2) a montré que $[g] = 0$ à 4 dimensions, d'après (10.3). L'analyse faite en (7.24) montre donc qu'à 4 dimensions

$$D = 4 - E_{Bosons} - \frac{3}{2} E_{fermions}.$$

Cette formule doit être légèrement modifiée. En effet, la règle de Feynman

qui décrit le couplage fantôme-gluon, fait intervenir l'impulsion p^μ uniquement pour le fantôme qui porte le nombre quantique de fantôme **sortant** du vertex. Ceci modifie donc la règle de comptage pour les lignes de fantômes externes : la moitié des lignes internes de fantômes adjacentes à des lignes de fantôme externes ne contribuent pas au comptage des impulsions p_μ au numérateur. Le degré de divergence D est donc surestimé par un facteur $\frac{E_{fant.}}{2}$. D'où

$$D = 4 - E_{Gluons} - \frac{3}{2} (E_{fant.} + E_{fermions}). \quad (10.13)$$