**M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application**
**Symétries en physique**

# Contrôle continu

## 1 Action d'un groupe sur un ensemble

Soient $E$ un ensemble, et $G$ un groupe.

On dit que le groupe $G$ agit sur l'ensemble $E$ s'il existe un morphisme $\beta$ de $G$ dans le groupe $S(E)$ des bijections de $E$ dans lui-même.

On notera cette action par $\forall g \in G$ , $\forall x \in E$ ,

$$g \cdot x = \beta(g)(x)\,. \tag{1}$$

1. Écrire précisément les conditions que doivent vérifier $\beta$.

[**Corrigé** : $g \mapsto \beta(g) \in S(E)$, $g^{-1} \mapsto \beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$, $g_1 \cdot g_2 \mapsto \beta(g_1 \cdot g_2) = \beta(g_1) \circ \beta(g_2)$, $\beta(e) = id_E$ . La condition $\beta(g_1 \cdot g_2) = \beta(g_1) \circ \beta(g_2)$ suffit, puisqu'elle implique $\beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$ et $\beta(e) = id_E$ .]

2. Montrer que le groupe $(\mathbb{R}, +)$ agit sur $\mathbb{C}$ , suivant

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\,, \forall z \in \mathbb{C}\,, \alpha \cdot z = e^{i\alpha} z\,. \tag{2}$$

[**Corrigé** : La vérification est immédiate puisque l'application exponentielle est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$ :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \beta(\alpha) : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto e^{i\alpha} z \end{array}$$

et donc $\forall z \in \mathbb{R}$ ,

$$\beta(\alpha + \alpha')(z) = e^{i(\alpha+\alpha')} z = e^{i\alpha}(e^{i\alpha'} z) = \beta(\alpha)(\beta(\alpha')(z)) = (\beta(\alpha) \circ \beta(\alpha'))(z)$$

*i.e.* $\beta(\alpha + \alpha') = \beta(\alpha) \circ \beta(\alpha')$ , q.e.d. ]

3. Pour chaque $x \in E$ , on définit l'orbite $O(x)$ par

$$O(x) = \{\beta(g)x \,/\, g \in G\}\,. \tag{3}$$

Montrer que la condition d'appartenance à une même orbite est une relation d'équivalence.

*Rappel :*

Une relation d'équivalence sur un ensemble $E$ est une relation binaire $\sim$ sur E qui est à la fois

réflexive : pour tout élément $x$ de $E$, on a $x \sim x$.

symétrique : $\forall x, y \in E,\ x \sim y \Rightarrow y \sim x$

transitive : $\forall x, y, z \in E, x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

[**Corrigé** : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = \beta(g)x$, réflexif : $x = \beta(e)x$, symétrique $x = \beta(g^{-1})y$, transitif : $x = \beta(g)y$ et $y = \beta(g')z \Rightarrow x = \beta(g)\beta(g')z = \beta(g \cdot g')\, z$ .]

4. On considère l'action du groupe $O(n)$ sur l'espace $\mathbb{R}^n$. Quelles sont les orbites ?

[**Corrigé** : Ce sont les sphères de centre $O$ ou l'origine $O$.]

5. Par définition, un espace est homogène s'il n'a qu'une seule orbite.
a) Que pouvez-vous dire de l'ensemble $\mathbb{R}^n$ sous l'action du groupe des translations ?

[**Corrigé** : $\mathbb{R}^n$ est homogène sous l'action des translations.]

b) Que pouvez-vous dire de l'action à gauche de $G$ sur lui-même, c'est-à-dire lorsque $E = G$ ?

[**Corrigé** : $G$ homogène car $\forall x, y \in G\,,\ \exists g = y \cdot x^{-1}\ :\ g \cdot x = y$]

c) Donner d'autres exemples d'espaces homogènes dans le cas où $G = \mathrm{O}(3)$ .

[**Corrigé** : Les sphères dans $\mathbb{R}^3$ pour $G = \mathrm{O}(3)$ .]

6. Quel est le groupe d'isotropie d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ sous l'action de $\mathrm{SO}(n)$ ?

[**Corrigé** : $S(x) \cong \mathrm{SO}(n-1)$ .]

7. On définit aussi le *groupe d'isotropie*, (appelé aussi *stabilisateur*, ou, par les physiciens, *petit groupe*) $S(x)$ de l'élément $x \in E$ : c'est le sous-groupe de $G$ laissant $x$ invariant :

$$S(x) = \{g \in G | \beta(g)x = x\}\ . \tag{4}$$

Si $H$ est un sous-groupe du groupe $G$, on appelle sous-groupe conjugué de $H$ tout sous-groupe de la forme $gHg^{-1}$ avec $g \in G$ .

Montrer que si $x$ et $y$ appartiennent à la même orbite, leurs groupes d'isotropie sont conjugués.

[**Corrigé** : Si $y \sim x$ donc $\exists g \in G : y = \beta(g)x$, considérons $S(y) = \{g' | \beta(g')y = y\}$, donc $\beta(g')\beta(g)x = \beta(g)x$ donc $\beta(g^{-1}g'g)x = x$ c'est-à-dire $g^{-1}g'g \in S(x)$, donc $g^{-1}S(y)g \subset S(x)$. Si l'on inverse les opérations, $g^{-1}S(y)g = S(x)$, q.e.d.]

8. Le stabilisateur $S(x)$ est-il un sous-groupe invariant ?

[**Corrigé** : en général non, puisqu'on sait qu'un sous-groupe invariant est égal à tous ses conjugués : si $S(x)$ était invariant, il serait égal à tous les stabilisateurs $S(y)$ des points $y$ de $O(x)$. En effet, si $y \in O(x)$, $\exists g \in G$ tel que $g^{-1}\, S(x)\, g = S(y)$. Or $g^{-1}\, S(x)\, g = S(x)$ ce qui conduit à $S(x) = S(y)$. Dans le cas de SO(3), par exemple, ceci est clairement absurde ...]

## 2 Le chemin le plus court d'un point à un autre...

Dans le plan de coordonnées $x$, $y$, on considère deux points $A$ et $B$. On souhaite montrer que le chemin qui minimise la longueur parcourue entre ces deux points est la ligne droite.

1. Justifier le fait de considérer l'action

$$S = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, y')\, dx \tag{5}$$

avec $L(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ pour résoudre ce problème.

[**Corrigé** : Il suffit d'écrire que $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx$ et donc que la longueur totale, qui joue le rôle d'action, est donnée par $S = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ .]

2. Montrer que le long du chemin suivi, $y(x)$ doit satisfaire l'équation

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \tag{6}$$

où $c$ est une constante.

[**Corrigé** : L'équation d'Euler-Lagrange donne immédiatement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

puisque $L$ est indépendant de $y$, et donc

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c\,.$$

]

3. En déduire la solution du problème.

[**Corrigé** : On tire immédiatement que $y'^2 = c^2(1+y'^2)$ soit $y'$ constante, *i.e.* $y = ax + b$, qui est bien l'équation d'une droite.]