Université Pierre et Marie Curie

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Contrôle continu

jeudi 23 février 2017

Dans tout le problème, on notera e l'élément neutre, et on utilisera des notations multiplicatives pour les groupes, sauf mention explicite.

Rappels sur les groupes finis usuels (1) :
On note C_n (ou Z_n) le groupe cyclique d'ordre n, isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On note S_n le groupe symétrique de degré n, contenant les $n!$ permutations de n objets.
On note A_n le groupe alterné de degré n, contenant les $n!/2$ permutations paires de n objets.
On note D_{2n} le groupe diédral d'ordre $2n$ (groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à n côtés).

1 Le groupe A_n pour n petit

1. Décrire le groupe A_2.

Corrigé :
Il est constitué de l'élément neutre, puisque c'est la seule permutation paire de 2 éléments.

---

2. Montrer que A_3 et C_3 sont isomorphes.

Corrigé :
Il suffit de considérer un 3-cycle. On a vu en cours qu'un $k-$cycle de décompose en produit de $k-1$ transpositions. En particulier un 3-cycle se décompose en un produit de 2 transpositions : $(1,2,3) = (1,3)(1,2)$, $(1,3,2) = (1,2)(1,3)$ et bien sûr l'identité, ce qui donne la correspondance.

2 Tables de Cayley

Pour un groupe G d'éléments $\{e, a, b, c, \cdots\}$ et de loi de groupe $\star$, on rappelle qu'une table de Cayley est de la forme

$\star$	e	a	b	c	$\cdots$
e					
a			$\#$		
b					
c					
$\vdots$					

où à titre d'exemple $\#$ représente le résultat de $a \star b$.

On notera qu'une telle table peut être écrire également pour un semi-groupe, i.e. un groupe pour lequel l'axiome d'associativité n'est pas vérifié.

1. Justifier le fait que dans une table de Cayley, dans chaque ligne et dans chaque colonne, les éléments du groupe apparaissent une et une seule fois.

Corrigé :
Si $x \star y = x \star z$ avec $y \neq z$ alors en multipliant à gauche par l'inverse de x, on en déduit immédiatement $y = z$ d'où la contradiction.

---

2. Justifier le fait que dans une table de Cayley, l'élément neutre e apparaît de façon symétrique par rapport à la diagonale.

Corrigé :
Supposons que les deux éléments x et y sont inverses l'un de l'autre. Alors $x \star y = e$ conduit par multiplication à droite par x à $x \star y \star x = x$. En multipliant à gauche par l'inverse de x on en déduit donc que $y \star x = e$.

Dans la suite, on appellera *squelette de l'identité* la disposition de l'identité e dans la table de Cayley du groupe.

3. Que peut-on dire d'un groupe dont la table de Cayley est symétrique par rapport à la diagonale ?

Corrigé :

C'est un groupe abélien.

---

4. Ecrire la table de Cayley du groupe **additif** $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Corrigé :

$\star$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

---

5. Ecrire la table de Cayley du groupe **additif** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (donc constitué de l'ensemble des couples (a, b) avec a et b dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, muni de la loi de groupe $(a, b)+(c, d) = (a+b, c+d)$. On listera les éléments dans l'ordre lexicographique.

Corrigé :

⋆	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(0,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

6. Ecrire la table de Cayley du groupe **additif** $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Corrigé :

⋆	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

7. Ecrire la table de Cayley du groupe **additif** $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Corrigé :

⋆	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Dans toute la suite, sauf indication contraire, lorsque l'on écrira les tables de Cayley du groupe, par convention on listera les éléments de sorte qu'après l'identité viennent les éléments qui sont leur propre inverse, puis par paires les éléments qui sont inverses l'un de l'autre.

3 Classification des groupes d'ordre 1 à 6

1. Groupes d'ordre 1.

a. A isomorphisme près, combien y-a-t-il de groupes d'ordre 1 ?

Corrigé :

Un seul, constitué de l'élément neutre.

b. Les identifier dans la liste (1) ci-dessus.

Corrigé :

Il s'agit de $C_1 \simeq S_1 \simeq A_2$.

2. Groupes d'ordre 2.

a. A isomorphisme près, combien y-a-t-il de groupes d'ordre 2 ?

Corrigé :

Un seul, constitué de l'élément neutre et d'un élément a d'ordre 2, donc tel que $a^2 = e$.

b. Les identifier dans la liste (1) ci-dessus.

Corrigé :

Il s'agit de $C_2 \simeq S_2 \simeq D_2$.

---

3. Soit un groupe d'ordre 3. On note e, a, b ses éléments.

a. Construire les tables de Cayley possibles pour ce groupe.

Corrigé :

On ne peut avoir a et b qui soient leur propre inverses, car alors le fait que e, a et b n'apparaissent chacun qu'une seule fois dans la ligne a impose que $ab = b$ ce qui est interdit par le fait que b apparaît déjà dans la colonne b. Une seule table est donc possible :

$\star$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

---

b. A isomorphisme près, en déduire le nombre de groupe d'ordre 3.

Corrigé :

Un seul, puisqu'il y a une seule table de Cayley possible.

---

c. Les identifier dans la liste (1).

Corrigé :

Il s'agit de $C_3 \simeq A_3$.

---

d. Pour chacun des éléments du groupe, préciser son ordre, et commenter.

Corrigé :

e est d'ordre 1, et d'après la table de Cayley, a et b sont d'ordre 3. Ces ordres divisent bien l'ordre du groupe, en accord avec le théorème de Lagrange.

---

e. Les groupes d'ordre 3 sont-ils cycliques ? Si oui, donner un générateur de ce groupe.

Corrigé :

C'est immédiat du fait que l'ordre du groupe est le nombre premier 3. Donc les éléments autres que e (notés a ou b) sont des générateurs de ce groupe cyclique.

---

4. Soit un groupe d'ordre 4. On note e, a, b, c ses éléments.

a. Construire les tables de Cayley possibles pour ce groupe.

Corrigé :

Il y a deux tables de Cayley possibles. En effet, soit les éléments a, b et c sont tous d'ordre 2, soit un seul l'est, et dans chacun des deux cas cette seule information contraint toute la table. Ceci conduit aux deux tables suivantes :

- si a, b et c sont tous d'ordre 2 :

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Il est facile de voir, en comparant cette table à celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que ce groupe lui est isomorphe. Le dictionnaire est

$$e \leftrightarrow (0,0)$$

$$a \leftrightarrow (0,1)$$

$$b \leftrightarrow (1,0)$$

$$c \leftrightarrow (1,1)$$

- si a est d'ordre 2, et b et c sont inverses l'un de l'autre :

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

Il est facile de voir, en comparant cette table à celle de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, que ce groupe lui est isomorphe. Le dictionnaire est

$$\begin{aligned} e &\leftrightarrow 0 \\ a &\leftrightarrow 2 \\ b &\leftrightarrow 1 \\ c &\leftrightarrow 3\,. \end{aligned}$$

---

b. Déterminer la table de Cayley du groupe de Klein D_4, groupe des isométries à deux dimensions laissant globalement invariant un segment, et conclure.

Corrigé :

Un segment de droite, polygone régulier à deux côtés (d'où la terminologie D_4), est laissé invariant par la rotation d'angle π de centre le milieu du segment, et par les deux symétries par rapport au segment et par rapport à sa médiatrice. Ces trois transformations sont involutives, et il est alors immédiat que la table de Cayley de D_4 est identique à celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit parce que l'on a vu que cette contrainte suffit à fixer toute la table, ou soit par inspection directe des produits d'isométries. Donc $D_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

---

c. Identifier les groupes correspondants dans la liste (1).

Corrigé :

Il s'agit de $D_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et de $C_4 \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

---

5. On s'intéresse maintenant aux groupes d'ordre 5.
a. En utilisant le théorème de Lagrange, montrer qu'à isomorphisme près, un seul squelette de l'identité e est possible dans la table de Cayley du groupe.

Corrigé :
L'ordre de chacun des éléments du groupe devant diviser l'ordre du groupe, on en déduit que tous les éléments en dehors de e sont d'ordre 5, puisque l'ordre du groupe est le nombre premier 5. Les éléments sont donc inverses l'un de l'autre par paire, par exemple sans perte de généralité a et b d'une part, et c et d d'autre part, les e étant donc en dehors de la diagonale.

---

b. Justifier alors en détail qu'une seule table de Cayley peut-être construite.

Corrigé :
Sans perte de généralité, puisque les deux paires jouent un rôle équivalent, on est conduit soit à $a^2 = b$, soit à $a^2 = c$.
Le premier choix $a^2 = b$ mène à une contradiction :

$\star$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e		
b	b	e	a		
c	c	d			e
d	d	c		e	

conduit à une impossibilité sur la colonne b.

Le second choix $a^2 = c$ conduit à la table :

$\star$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	e	d	b
b	b	e	d	a	c
c	c	d	a	b	e
d	d	b	c	e	a

---

c. En déduire qu'un seul groupe d'ordre 5 existe, à isomorphisme près.

Corrigé :

Il est facile de vérifier sur cette table que chaque élément est d'ordre 5. Le groupe est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, comme on le vérifie explicitement en comparant des tables de Cayley, avec le dictionnaire :

$$\begin{array}{ccc} e & \leftrightarrow & 0 \\ a & \leftrightarrow & 1 \\ b & \leftrightarrow & 4 \\ c & \leftrightarrow & 2 \\ d & \leftrightarrow & 3\,. \end{array}$$

---

d. Sans utiliser la table de Cayley, pourquoi le résultat précédent est-il immédiat ?

Corrigé :

C'est un théorème du cours : tout groupe monogène fini d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Or 5 étant premier, c'est le cas du groupe considéré en prenant n'importe quel élément du groupe, excepté e, comme générateur.

6. (bonus) On considère finalement un groupe d'ordre 6.

a. Quels sont les ordres possibles pour les éléments du groupe ?

Corrigé :

1,2, 3 ou 6.

---

b. Montrer que le cas où tous les ordres sont égaux à 2 est impossible, par inspection de la table de Cayley déduite du squelette de l'identité correspondant.

Corrigé :

Sans perte de généralité, on peut choisir $ab = c$, qui conduit à $b = ac$ et $a = cb$. On a alors $ad = f$ et $af = d$.

De proche en proche on parvient à la table de Cayley suivante :

$\star$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	c	b	f	d
b	b	c	e	a		
c	c		a	e		
d	d			f	e	a
f	f			d	a	e

ce qui conduit à une impossibilité de compléter la colonne b.

---

c. Considérer à présent le cas où tous les éléments sont d'ordre 2, en dehors de e et de d et f. Déterminer la seule table de Cayley (à isomorphisme près) compatible avec un tel squelette de l'identité.

Corrigé :

Sans perte de généralité, deux choix sont possibles : soit $ab = c$, soit $ab = d$ (d et f jouent le même rôle).
Dans le premier cas $ab = c$, ceci conduit de proche à la table de Cayley suivante :

$\star$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	c	b	f	d
b	b		e	a		
c	c			e		
d	d			f		e
f	f			d	e	

ce qui conduit à une impossibilité de remplir la colonne b.
Dans le second cas $ab = d$, ceci conduit de proche à la table de Cayley suivante :

$\star$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

qui est donc la seule table possible.

---

d. Considérer à présent le cas où e et a sont leurs propre inverses, et (b, c) et (d, f) sont leur inverses deux à deux. Déterminer la seule table de Cayley (à isomorphisme près) compatible avec un tel squelette de l'identité.

Corrigé :

Sans perte de généralité, à nouveau deux choix sont possibles : soit $ab = c$, soit $ab = d$ (d et f jouent le même rôle).
Dans le premier cas $ab = c$, ceci conduit de proche à la table de Cayley suivante :

$\star$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	c	b	f	d
b	b		a	e		
c	c		e	a		
d	d		f		a	e
f	f		d		e	a

ce qui conduit à une impossibilité de remplir la colonne c.
Dans le second cas $ab = d$, ceci conduit de proche à la table de Cayley suivante :

$\star$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b			e		a
c	c		e		a	
d	d			a		e
f	f		a		e	

Deux choix sont alors possibles :
soit $cf = b$ qui conduit à la table

$\star$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	d	f	e	c	a
c	c	f	e	d	a	b
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

soit $cf = d$ qui conduit à la table

$\star$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	d	c	e	f	a
c	c	f	e	b	a	d
d	d	b	f	a	c	e
f	f	c	a	d	e	b

Les deux tables précédentes sont en fait isomorphes par la transformation (en notant avec un ' les éléments du second tableau)

$$\begin{aligned} b &\leftrightarrow f' \\ c &\leftrightarrow d' \,. \end{aligned}$$

---

e. Le groupe précédent est-il abélien ? En déduire à quel groupe d'ordre 6 de la liste (1) il doit être isomorphe, et préciser cet isomorphisme.

Corrigé :
La table de Cayley est symétrique, donc le groupe est abélien. Le groupe cherché doit donc être $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
On vérifie en effet facilement que ce groupe est bien isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ en partant par exemple de la première table de Cayley, et en utilisant l'isomorphisme ϕ défini par la contrainte $\phi(e) = 0$, le choix arbitraire $\phi(b) = 1$ et les relations d'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi(aa) = \phi(e) = 0 \quad \text{soit} \quad \phi(a) = 3 \,, \\ \phi(ab) = \phi(a) + \phi(b) = 3 + 1 = 4 = \phi(d) \,, \\ \phi(dd) = \phi(d) + \phi(d) = 4 + 4 \equiv 2 = \phi(f) \end{aligned}$$

et enfin $\phi(bd) = \phi(b) + \phi(d) = 1 + 4 = 5 = \phi(c)$, soit

$$\begin{array}{ccc} e & \leftrightarrow & 0 \\ a & \leftrightarrow & 3 \\ b & \leftrightarrow & 1 \\ c & \leftrightarrow & 5 \\ d & \leftrightarrow & 4 \\ f & \leftrightarrow & 2\,. \end{array}$$

---

f. Déterminer la table de Cayley du groupe de Klein D_6, groupe des isométries à deux dimensions laissant globalement un triangle équilatéral, et conclure quant au groupe construit à la question **c**. Est-il abélien ?

Corrigé :

Considérons un triangle équilatéral et notons s_1 la symétrie par rapport à la médiatrice d'un côté, et s_2 la symétrie par rapport à la médiatrice d'un côté adjacent par la droite. On a donc $s_1^2 = s_2^2 = 1$ et $s_1 s_2 = r$ avec $r = r_{\frac{2\pi}{3}}$.
Définissons l'isomorphisme ϕ entre le groupe G de la question **c** et D_6 par $\phi(e) = 1$, $\phi(a) = s_1$ et $\phi(b) = s_2$. Par morphisme,

$$\begin{aligned} \phi(d) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = s_1\, s_2 = r\,, \\ \phi(c) = \phi(da) = \phi(d)\phi(a) = r\, s_1\,, \\ \phi(f) = \phi(d^2) = \phi(d)\phi(d) = r^2\,, \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier par inspection qu'on a ainsi construit un isomorphisme entre les deux groupes. Les deux tables de Cayley sont identiques. La table de Cayley de D_6 s'obtient soit directement par composition des isométries, soit par l'isomorphisme, et s'écrit

$\star$	1	s_1	s_2	$r\,s_1$	r	r^2
1	1	s_1	s_2	$r\,s_1$	r	r^2
s_1	s_1	1	r	r^2	s_2	$r \quad s_1$
s_2	s_2	r^2	1	r	$r \quad s_1$	s_1
$r\,s_1$	$r\,s_1$	r	r^2	1	s_1	s_2
r	r	$r\,s_1$	s_1	s_2	r^2	1
r^2	r^2	s_2	$r\,s_1$	s_1	1	r

On notera que D_6 n'est pas abélien.
