Université Pierre et Marie Curie

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Contrôle continu

jeudi 7 mars 2019

1 Crochets de Poisson

On considère un système possédant s degrés de liberté, caractérisé par les coordonnées généralisées q_i, $i \in \{1, \cdots, s\}$. La dynamique du système est régie par un hamiltonien H, les équations du mouvement du système s'écrivant dans les couples de variables (coordonnées, impulsions généralisées) (q_i, p_i) selon :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \, . \tag{1}$$

On définit le crochet de Poisson de deux fonctions f et g agissant sur l'espace R^{2s} par

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \ . \tag{2}$$

1. Intégrales premières du mouvement

a) Montrer que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \ . \tag{3}$$

b) En déduire qu'une condition pour que f soit intégrale première du mouvement, *i.e.* qu'elle soit une constante du temps, est que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \, . \tag{4}$$

c) Quelle équation doit satisfaire f dans le cas où elle ne dépend pas explicitement du temps ?

2. Montrer que l'ensemble des fonctions $f(p, q)$ différentiable sur l'espace R^{2s} muni de l'opérateur crochet de Poisson définit une algèbre de Lie de dimension infinie.

3. f et g étant des fonctions quelconques de q, p, t, établir les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\{f, constante\} &= 0\,, &(5)\\
\{fg, h\} &= f\{g,h\} + g\{f,h\}\,, &(6)\\
\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}\,. &(7)
\end{aligned}
$$

4. On souhaite exprimer les relations dynamiques satisfaites par les coordonnées q_i et les impulsions p_i du système à l'aide des crochets de Poisson.

a) Pour une fonction f quelconque, établir les relations suivantes :

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\,, \tag{8}$$

$$\{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}\,. \tag{9}$$

b) Montrer alors que :

$$
\begin{aligned}
\{q_i, q_j\} &= 0\,, &(10)\\
\{p_i, p_j\} &= 0\,, &(11)\\
\{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}\,. &(12)
\end{aligned}
$$

c) Etablir les relations :

$$
\begin{aligned}
\dot{q} \equiv \frac{dq_i}{dt} &= \{q_i, H\}\,, &(13)\\
\dot{p} \equiv \frac{dp_i}{dt} &= \{p_i, H\}\,. &(14)
\end{aligned}
$$

5. Théorème de Poisson

Montrer que si f et g sont des intégrales premières, alors $\{f, g\}$ est aussi une intégrale première. On distinguera les cas où f et g ne dépendent pas explicitement du temps du cas où ils en dépendent. On pourra utiliser la propriété (6) ainsi que l'identité de Jacobi satisfaite par le crochet de Poisson.

6. Moment cinétique et crochets de Poisson

a) Calculer les crochets de Poisson formés à partir des composantes du moment cinétique et de l'impulsion.

b) Calculer les crochets de Poisson formés à partir des composantes du moment cinétique.

c) Montrer que le crochet de Poisson d'une fonction scalaire des coordonnées et des impulsions avec les composantes du moment cinétique est nul.

d) Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire. On souhaite montrer que

$$\{\vec{f}, \vec{L}.\vec{n}\} = \vec{n} \wedge \vec{f} \,, \tag{15}$$

où $\vec{f}$ est une fonction vectorielle des coordonnées et des impulsions. Il sera utile de décomposer la fonction $\vec{f}$ dans la base formée des fonctions vectorielles $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{r} \wedge \vec{p}$, sous la forme

$$\vec{f} = \varphi_1\, \vec{r} + \varphi_2\, \vec{p} + \varphi_3\, \vec{r} \wedge \vec{p}.$$

d1) Montrer que

$$\{\vec{f}, L_z\} = \varphi_1 \frac{\partial L_z}{\partial \vec{p}} - \varphi_2 \frac{\partial L_z}{\partial \vec{r}} + \varphi_3\, \vec{r} \wedge \{\vec{p}, L_z\} - \varphi_3\, \vec{p} \wedge \{\vec{r}, L_z\} \,.$$

d2) Montrer alors le résultat demandé.

2 Traitement classique du problème de Kepler

Considérons le problème classique de Kepler, pour lequel, en coordonnées relatives, l'hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r} \tag{16}$$

où μ est la masse de la particule réduite. k est une quantité positive ($k = Z\, e^2$ pour l'atome d'hydrogène).

Rappel : Pour une ellipse, en notant M l'un des deux foyers, P le périhélie (point de la trajectoire le plus proche de M) et A l'aphélie (point de la trajectoire le plus éloigné de M), le demi-grand axe $a = PA/2$ et le demi-petit axe b sont reliés à l'excentricité par $e = (a^2 - b^2)^{1/2}/a$, et la distance focale du centre géométrique O de l'ellipse au foyer M vérifie $f = ae$.

1. Montrer que le vecteur de Runge-Lenz $\vec{M} = \vec{v} \times \vec{L} - k\frac{\vec{r}}{r}$ est une constante du mouvement.

2. En déduire, par intégration des équations du mouvement, que l'état lié est une ellipse. On pourra partir de l'expression de $\vec{M} \cdot \vec{r}$.

3. Montrer que $\vec{L}^2 = \mu k a(1 - e^2)$ et que $\vec{M}$ est dirigé suivant le demi-grand axe, pointant de M vers P, de norme ke.

4. Montrer que $E = -\frac{k}{2a}$. Montrer que $\vec{L} \cdot \vec{M} = 0$ et que $\vec{M}^2 = 2E\frac{\vec{L}^2}{\mu} + k^2$.

5. Etablir les relations suivantes :

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}\, L_k\,, \tag{17}$$

$$\{L_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}\, M_k\,, \tag{18}$$

$$\{M_i, M_j\} = -\frac{2H}{\mu}\epsilon_{ijk}\, L_k\,, \tag{19}$$

$$\{H, L_i\} = \{H, M_i\} = 0\,. \tag{20}$$

6. Comment se transforme le vecteur de Runge-Lenz sous l'action du groupe des rotations ? On pourra utiliser la relation (15).

7. On suppose l'énergie E fixée. Dans les deux cas $E > 0$ et $E < 0$, identifier les algèbres de Lie réelles engendrées par l'espace vectoriel de base $\vec{L}$ et $\vec{M}$ muni du crochet de Poisson. Il sera commode d'introduire $\vec{M}' = \sqrt{\frac{\pm\mu}{2E}}\,\vec{M}$.