M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

Symétries en physique

Examen du 7 avril 2016

1 Représentation de dimension infinie d'un groupe

1. On considère une fonction $f(x)$ d'une variable réelle x, appelée « coordonnée ». Par changement de la coordonnée $x \mapsto x'$, on suppose que f se transforme selon $f \mapsto f'$, avec f' définie par

$$f'(x') = f(x)$$

(a) Justifier l'appellation « fonction scalaire »pour f

<u>Correction</u> **: C'est une fonction scalaire au sens où le changement de coordonnées n'est pas codé par un changement des composantes de f, et n'affecte que la variable x.**

(b) Si $x \mapsto x'$ est une variation infinitésimale : $x' = x + \epsilon(x)$, calculer la variation $\delta f(x) = f'(x) - f(x)$ au premier ordre en ϵ et montrer qu'elle s'exprime comme l'action d'un opérateur différentiel sur $f(x)$. On donnera l'expression explicite de δ .

<u>Correction</u> **: On écrit le développement de Taylor au premier ordre,** i.e.

$$\delta f(x) = f'(x) - f(x) = f(x - \epsilon(x)) - f(x) = -\epsilon(x)\,\frac{df}{dx}(x)\,,$$

et donc

$$\delta = -\epsilon(x)\,\frac{df}{dx}\,.$$

(c) 1er cas particulier $x' = x + \delta a$ où δa est une constante.

Donner l'interprétation géométrique de cette transformation, et la forme de δf . En déduire l'expression du générateur de cette transformation.

<u>Correction</u> : Cette transformation est une translation de coordonnée infinitésimale. D'après la question 1(a), avec ici $\boldsymbol{\epsilon(x) = \delta a}$, on tire

$$\boldsymbol{\delta = -\delta a \, \frac{df}{dx}} \, ,$$

qui est valable pour $\boldsymbol{\delta a}$ arbitraire. On en déduit donc l'expression du générateur de la transformation

$$\boldsymbol{\delta = -\frac{df}{dx} = -\nabla = -A} \, .$$

(d) 2ème cas particulier $x' = x(1 + \delta b)$ où δb est une constante.

Donner l'interprétation géométrique de cette transformation, et la forme de δf . En déduire l'expression du générateur de cette transformation.

<u>Correction</u> : Cette transformation est une dilatation infinitésimale $\boldsymbol{x' = \lambda \, x}$ avec $\boldsymbol{\lambda = 1 + \delta b}$. D'après la question 1(a), avec ici $\boldsymbol{\epsilon(x) = x \, \delta b}$, on tire

$$\boldsymbol{\delta = -\delta b \, x \, \frac{df}{dx}} \, ,$$

qui est valable pour $\boldsymbol{\delta b}$ arbitraire. On en déduit donc l'expression du générateur de la transformation

$$\boldsymbol{\delta = -x \, \frac{df}{dx} = -x\nabla = -B} \, .$$

(e) 3ème cas particulier $x' = x + x^2 \delta c$ où δb est une constante. Donner la forme de δf . En déduire l'expression du générateur de cette transformation

Une telle transformation, comme les précédentes, correspond géométriquement à un cas particulier de transformation dite conforme, qui préserve les angles.

Correction : D'après la question 1(a), avec ici $\boldsymbol{\epsilon(x) = x^2\,\delta c}$, on tire

$$\boldsymbol{\delta = -\delta c\, x^2\, \frac{df}{dx}\,,}$$

qui est valable pour $\boldsymbol{\delta c}$ arbitraire. On en déduit donc l'expression du générateur de la transformation

$$\boldsymbol{\delta = -x^2\,\frac{df}{dx} = -x^2\nabla = -C\,.}$$

---

2. On considère maintenant les trois opérateurs différentiels

$$A = \frac{d}{dx} \qquad (1)$$

$$B = x\frac{d}{dx} \qquad (2)$$

$$C = x^2\frac{d}{dx} \qquad (3)$$

(a) Calculer les relations de commutation de A, B, C. Il pourra être utile, bien que non indispensable, de faire agir ces opérateurs sur des fonctions scalaires arbitraires.

Correction :

$$\boldsymbol{\begin{aligned}
[A,B] &= \left[\frac{d}{dx}, x\frac{d}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\right] - x\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} = A\,,\\
[A,C] &= \left[\frac{d}{dx}, x^2\frac{d}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[x^2\frac{d}{dx}\right] - x^2\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = 2x\frac{d}{dx} = 2B\,,\\
[B,C] &= [x\frac{d}{dx}, x^2\frac{d}{dx}] = x\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{d}{dx}\right] - x^2\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\right]\\
&= 2x^2\frac{d}{dx} + x^3\frac{d^2}{dx^2} - x^2\frac{d}{dx} - x^3\frac{d^2}{dx^2} = x^2\frac{d}{dx} = C\,.
\end{aligned}}$$

En cas de doute, on pourra vérifier que l'on obtient les mêmes résultats par action explicite sur une fonction test.

(b) Les opérateurs A, B, C forment-ils une algèbre de Lie ?

<u>Correction</u> : Les relations de commutations ferment sur elles-même, donc la structure d'algèbre de Lie est immédiate (sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$).

(c) Ecrire les relations de commutations pour la $\mathbb{R}-$algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

<u>Correction</u> : Ces relations s'écrivent

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{i\sigma_1}\,, \boldsymbol{i\sigma_2}] &= -\boldsymbol{i\sigma_3}\,, \\ [\boldsymbol{i\sigma_1}\,, \boldsymbol{i\sigma_3}] &= +\boldsymbol{i\sigma_2}\,, \\ [\boldsymbol{i\sigma_2}\,, \boldsymbol{i\sigma_3}] &= -\boldsymbol{i\sigma_2}\,. \end{aligned}$$

(d) La $\mathbb{R}-$algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ engendrée par $A\,, B\,, C$ est-elle isomorphe à $\mathfrak{su}(2)$? Pourquoi (on pourra examiner les changement de base possibles sur le corps $\mathbb{R}$) ? Qu'en est-il de leurs extensions complexes ?

<u>Correction</u> : En posant $\boldsymbol{a} = \frac{A+C}{2}$, $\boldsymbol{b} = \frac{A-C}{2}$ et $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}$ on obtient les relations de commutation

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}] &= -\boldsymbol{c}\,, \\ [\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{c}] &= +\boldsymbol{b}\,, \\ [\boldsymbol{b}\,, \boldsymbol{c}] &= +\boldsymbol{a}\,. \end{aligned}$$

Le dernier signe (+) ne peut être modifié sur le corps $\mathbb{R}$, ce qui interdit tout isomorphisme entre les $\mathbb{R}-$algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{su}(2)$. En revanche ce signe (+) peut être changé en (-) en introduisant un facteur $\boldsymbol{i}$ devant $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$, ce qui

revient à considérer l'extension complexe de l'algèbre de Lie. On en déduit donc que les deux algèbres de Lie sont deux formes réelles distinctes de la même $\mathbb{C}-$algèbre de Lie.

(e) L'algèbre $\mathfrak{g}$ est-elle semi-simple ? Comment le voir ?

<u>Correction</u> : Pour déterminer la nature de l'algèbre de Lie, il faut étudier sa forme de Killing, ou encore le tenseur de Cartan-Killing $\boldsymbol{g}$ défini par ses éléments de matrice

$$\boldsymbol{g_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}{}^{\gamma}\, C_{\beta\gamma}{}^{\delta}\,.}$$

(f) Montrer que le tenseur de Cartan-Killing dans la base ordonnée $\{X_1 = A\,, X_2 = B\,, X_3 = C\}$ s'écrit

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{4}$$

et conclure quant à la semi-simplicité de l'algèbre.

<u>Correction</u> : On pose $\boldsymbol{X_1 = A}$, $\boldsymbol{X_2 = B}$ et$\boldsymbol{X_3 = C}$ et l'on déduit donc

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g_{11}} &= \boldsymbol{C_{1\delta}{}^{\gamma}\, C_{1\gamma}{}^{\delta} = C_{12}{}^{1}\, C_{11}{}^{2} + C_{13}{}^{2}\, C_{12}{}^{3} = 0\,,} \\
\boldsymbol{g_{12}} &= \boldsymbol{C_{1\delta}{}^{\gamma}\, C_{2\gamma}{}^{\delta} = C_{12}{}^{1}\, C_{21}{}^{2} + C_{13}{}^{2}\, C_{22}{}^{3} = 0\,,} \\
\boldsymbol{g_{13}} &= \boldsymbol{C_{1\delta}{}^{\gamma}\, C_{3\gamma}{}^{\delta} = C_{12}{}^{1}\, C_{31}{}^{2} + C_{13}{}^{2}\, C_{32}{}^{3} = -4\,,} \\
\boldsymbol{g_{22}} &= \boldsymbol{C_{2\delta}{}^{\gamma}\, C_{2\gamma}{}^{\delta} = C_{21}{}^{1}\, C_{21}{}^{1} + C_{23}{}^{3}\, C_{23}{}^{3} = (-1)(-1) + 1 \times 1 = 2\,,} \\
\boldsymbol{g_{23}} &= \boldsymbol{C_{2\delta}{}^{\gamma}\, C_{3\gamma}{}^{\delta} = C_{21}{}^{1}\, C_{31}{}^{1} + C_{23}{}^{3}\, C_{33}{}^{3} = 0\,,} \\
\boldsymbol{g_{33}} &= \boldsymbol{C_{3\delta}{}^{\gamma}\, C_{3\gamma}{}^{\delta} = C_{31}{}^{2}\, C_{32}{}^{1} + C_{32}{}^{3}\, C_{33}{}^{2} = 0\,,}
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat demandé. Le déterminant de g est égal à -32. Il est donc non-nul, ce qui montre que $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

(g) L'algèbre $\mathfrak{g}$ est-elle compacte ?

<u>Correction</u> : Le tenseur g a pour valeurs propres $\{4\,,-4\,,2\}$, ce qui démontre que la forme de Killing associée est non-définie négative. L'algèbre $\mathfrak{g}$ n'est donc pas compacte. Ceci n'est pas surprenant car $\mathfrak{g}$ est en fait isomorphe à $\mathfrak{so}(2,1)$.

(h) On note $g^{\alpha\beta}$ les éléments de matrice de l'inverse de g. Que vaut l'opérateur de Casimir $C_2 = g^{\alpha\beta} X_\alpha X\beta$? Vérifie-t-il la propriété attendue pour l'opérateur de Casimir ?

<u>Correction</u> : De l'expression de g on tire que

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{5}$$

d'où l'on déduit que

$$C_2 = g^{\alpha\beta} X_\alpha X\beta = -\frac{1}{4} X_1 X_3 + \frac{1}{2} X_2 X_2 - \frac{1}{4} X_3 X_1 = -\frac{1}{4} A\,C + \frac{1}{2} B^2 - \frac{1}{4} C\,A\,.$$

D'une part,

$$A\,C = \frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d}{dx}\right) = 2x\frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

et

$$C\,A = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = x^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

d'où l'on tire que

$$A\,C + C\,A = 2\left(\frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}\right)\,.$$

D'autre part,

$$B^2 = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) = x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}\,.$$

On en déduit donc finalement que

$$\boldsymbol{C_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}\right) = 0\,,}$$

qui évidemment commute avec les trois générateurs de l'algèbre, comme attendu.

(i) Que peut-on dire de cet opérateur de Casimir dans une représentation irréductible de l'algèbre ?

<u>Correction</u> : Dans une représentation irréductible, d'après le lemme de Schur, un opérateur qui commute avec tous les générateurs (ce qui est le cas de l'opérateur de Casimir d'après le cours) est multiple de l'identité, ce qui est trivialement le cas d'après la question précédente.

---

3. Reprendre la question 2 dans le cas où l'on remplace les opérateurs A,B,C par les opérateurs

$$A' = \frac{d}{dx} \tag{6}$$

$$B' = x\frac{d}{dx} - j \tag{7}$$

$$C' = x^2\frac{d}{dx} - 2j\,x \tag{8}$$

<u>Correction</u> : Partons de $\boldsymbol{A' = A}$, $\boldsymbol{B' = B - j}$ et $\boldsymbol{C' = C - 2j\,x}$. On en déduit donc que

$$\boldsymbol{\begin{aligned} [A, B'] &= \left[\frac{d}{dx}, B - j\right] = [A, B]\ , \\ [A, C'] &= \left[\frac{d}{dx}, C - 2j\,x\right] = [A, C] - 2j\left[\frac{d}{dx}, x\right] = 2(B - j) = 2B'\,, \\ [B', C'] &= [B, C] - 2j\,[B, x] = C - 2j\,x = C'\,, \end{aligned}}$$

ce qui montre que l'algèbre de Lie engendrée par $\boldsymbol{A', B', C'}$ est identique à celle engendrée par $\boldsymbol{A, B, C}$.

L'opérateur de Casimir s'écrit à présent

$$C_2 = -\frac{1}{4}\left[A'\,C' + C'\,A'\right] + \frac{1}{2}B'^2\,.$$

Or

$$A'C' = A\,C - 2j\frac{d}{dx}x = A\,C - 2j - 2jx\frac{d}{dx}$$

et

$$C'A' = AC - 2jx\frac{d}{dx}$$

d'où

$$A'C' + C'A' = 2B^2 - 2j - 4jx\frac{d}{dx}\,.$$

Enfin

$$B'^2 = (B-j)^2 = B^2 - 2jx\frac{d}{dx} + j^2$$

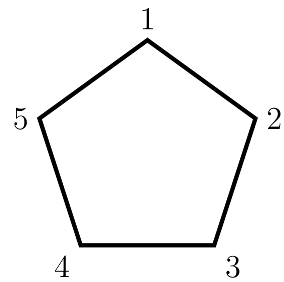
d'où finalement

$$C_2 = -\frac{1}{2}B^2 + \frac{j}{2} + jx\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}B^2 - jx\frac{d}{dx} + \frac{j^2}{2} = \frac{1}{2}j(j+1)\,.$$

Cet opérateur est un multiple de l'identité, comme attendu d'après le lemme de Schur.

2 Groupe du pentagone

On considère dans ce problème le groupe D_5, groupe de symétrie du pentagone régulier.



1. De quel groupe D_5 est-il un sous-groupe ?
2. Montrer que D_5 est un groupe d'ordre 10.
3. Montrer que le groupe est engendré par deux éléments, notés r et s, dont on donnera l'interprétation géométrique
4. Montrer que $(rs)^2 = 1$.
5. Obtenir les classes de conjugaison de D_5 et donner leur nombre d'éléments. Quelle condition doit vérifier le « rangement » des éléments du groupe en classes de conjugaison ?

On notera les classes de conjugaison par $\mathcal{C}_g$, où g est le représentant le plus « élémentaire » de la classe.

Correction :

- **D_5 est un sous-groupe de S_5, groupe des permutations de 5 sommets.**
- **D_5 contient un sous-groupe de rotations d'ordre 5, ainsi que 5 symétries axiales. Il est donc d'ordre 10.**
- **Les rotations sont de la forme $\{r^n, n = 0, \ldots, 4\}$ et les symétries axiales données par $\{r^n s, n = 0, \ldots, 4\}$.**
- **Calcul explicite avec permutations des sommets.**
- **Les classes de conjugaison sont**
  - **$\mathcal{C}_e = \{e\}$: un élément**
  - **$\mathcal{C}_r = \{r, r^4\}$: 2 éléments**
  - **$\mathcal{C}_{r^2} = \{r^2, r^3\}$: 2 éléments**
  - **$\mathcal{C}_s = \{s, rs, \ldots r^4 s\}$: 5 éléments**

On obtient bien une partition du groupe.

---

6. Donner le nombre k de représentations irréductibles inéquivalentes du groupe.
7. Calculer les dimensions n_ℓ associées à ces représentations irréductibles, notées $\mathcal{D}^{(1)}$,...,$\mathcal{D}^{(k)}$. On les classera par ordre croissant de leurs dimensions.
8. Quelle représentation irréductible est-on assuré de trouver pour tout groupe ? Quelle est sa dimension ? On la notera par la suite $\mathcal{D}^{(1)}$.

<u>**Correction**</u> **:**

- **Ce groupe fini contient 4 classes de conjugaison donc 4 représentations irréductibles inéquivalentes.**
- **On doit avoir $n_1^2 + \cdots + n_4^2 = 10$. On en déduit qu'il existe 2 représentations irréductibles de dimension 1 et 2 représentations irréductibles de dimension 2.**
- **La représentation triviale, $g \mapsto 1$, de dimension 1.**

Dans la suite du problème, nous allons construire la table de caractères de D_5, en utilisant principalement les relations d'orthonormalité satisfaites par les caractères.

	$\mathcal{C}_e$	$\mathcal{C}_r$	$\mathcal{C}_{r^2}$	$\mathcal{C}_s$
$\chi^{(1)}$				
$\chi^{(2)}$				
$\chi^{(3)}$				
$\chi^{(4)}$				

FIGURE 1 – Table de caractères de D_5 (à compléter).

9. Remplir immédiatement, sans calcul mais en justifiant, une ligne et une colonne de la table.
10. Soit une représentation irréductible $\mathcal{D}^{(\rho)}$ de dimension 1 du groupe D_5. Que peut-on dire des caractères associés à cette représentation ?
11. En déduire que $\chi^{(\rho)}(\mathcal{C}_r) \in \{-1, 1\}$ et que $\chi^{(\rho)}(\mathcal{C}_s) \in \{-1, 1\}$, en utilisant les propriétés du groupe D_5.

12. En utilisant la propriétés d'orthogonalité avec la représentation triviale, remplir la deuxième ligne de la table des caractères.

<u>Correction</u> :

- **La première ligne ne contient que des +1 (représentation triviale) et la première colonne contient les dimensions des représentations (trace de l'identité), soit $\mathbf{1, 1, 2, 2}$.**
- **Les caractères sont identifiés à la représentation de dimension 1 elle-même, et donc constituent une représentation du groupe.**
- **Comme $s^2 = 1$, on en déduit immédiatement que $\left(\chi^{(\rho)}(\mathcal{C}_s)\right)^2 = 1$ soit finalement que $\chi^{(\rho)}(\mathcal{C}_r) \in \{-1, 1\}$.**
- **On a également , comme $rr^{-1} = e$, $\chi^{(\rho)}(\mathcal{C}_r)^2 = 1$ car r et $r^4 = r^{-1}$ sont dans la même classe de conjugaison. Donc $\chi^{(\rho)}(\mathcal{C}_r) \in \{-1, 1\}$.**
- **Par orthogonalité entre les deux représentations de dimension 1, on obtient $1 + 2\chi^{(2)}(\mathcal{C}_r) + 2\chi^{(2)}(\mathcal{C}_{r^2}) + 5\chi^{(2)}(\mathcal{C}_s) = 0$.** [1]
- **La seule solution, comme les caractères valent tous ± 1, est $\chi^{(2)}(\mathcal{C}_r) = \chi^{(2)}(\mathcal{C}_{r^2}) = 1$ et $\chi^{(2)}(\mathcal{C}_s) = -1$.**

Il reste maintenant à obtenir les caractères des représentations de dimension 2.

9. Montrer que pour chacune des représentations restantes, $\chi(\mathcal{C}_s) = 0$.
10. Montrer finalement que les quatre cases restantes de la table se complètent avec $2\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et de $2\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
11. En déduire la table des caractères. On pourra vérifier que la relation de complétude est bien satisfaite.

<u>Correction</u> :

- **L'orthogonalité avec la représentation triviale donne $2 + 2\chi^{(3)}(\mathcal{C}_r) + 2\chi^{(3)}(\mathcal{C}_{r^2}) + 5\chi^{(3)}(\mathcal{C}_s) = 0$**

1. Remarque : la condition de normalisation donne $\mathbf{1 + 2\chi^{(2)}(\mathcal{C}_r)^2 + 2\chi^{(2)}(\mathcal{C}_{r^2})^2 + 5\chi^{(2)}(\mathcal{C}_s)^2 = 10}$, qui est trivialement satisfaite d'après la question précédente.

- L'orthogonalité avec la représentation $D^{(2)}$ donne $2+2\chi^{(3)}(\mathcal{C}_r)+2\chi^{(3)}(\mathcal{C}_{r^2})-5\chi^{(3)}(\mathcal{C}_s)=0$ d'où $\chi^{(3)}(\mathcal{C}_s)=0$. Valable aussi pour $D^{(4)}$.
- Il reste donc, pour chacune de ces deux représentations, $\chi(\mathcal{C}_r)+\chi(\mathcal{C}_{r^2})=-1$.
- De plus, la condition de normalisation donne $\chi(\mathcal{C}_r)^2+\chi(\mathcal{C}_{r^2})^2=3$.
- Les solutions de ces deux équations sont $(\chi(\mathcal{C}_r)=2\cos(2\pi/5),\chi(\mathcal{C}_{r^2})=2\cos(4\pi/5))$ et $(\chi(\mathcal{C}_r)=2\cos(4\pi/5),\chi(\mathcal{C}_{r^2})=2\cos(2\pi/5))$. Chacune des deux solutions correspond à l'une des représentations irréductibles de dimension 2.

Correction : La table complète de caractères est

	$\mathcal{C}_e$	$\mathcal{C}_r$	$\mathcal{C}_{r^2}$	$\mathcal{C}_s$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	$2\cos\frac{2\pi}{5}$	$2\cos\frac{4\pi}{5}$	0
$\chi^{(4)}$	2	$2\cos\frac{4\pi}{5}$	$2\cos\frac{2\pi}{5}$	0

Relations de complétude :

- entre $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_r$:

$$\begin{aligned}&\chi^{(1)}(\mathcal{C}_e)\chi^{(1)}(\mathcal{C}_r)+\chi^{(2)}(\mathcal{C}_e)\chi^{(2)}(\mathcal{C}_r)+\chi^{(3)}(\mathcal{C}_e)\chi^{(3)}(\mathcal{C}_r)+\chi^{(4)}(\mathcal{C}_e)\chi^{(4)}(\mathcal{C}_r)\\&=1+1+4\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos\frac{4\pi}{5}=0\end{aligned}$$

- entre $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_{r^2}$: idem
- entre $\mathcal{C}_\rho$ et $\mathcal{C}_s$: 1-1=0
- entre $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_{r^2}$:

$$\begin{aligned}&\chi^{(1)}(\mathcal{C}_r)\chi^{(1)}(\mathcal{C}_{r^2})+\chi^{(2)}(\mathcal{C}_r)\chi^{(2)}(\mathcal{C}_{r^2})+\chi^{(3)}(\mathcal{C}_r)\chi^{(3)}(\mathcal{C}_{r^2})+\chi^{(4)}(\mathcal{C}_r)\chi^{(4)}(\mathcal{C}_{r^2})\\&=1+1+4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}+4\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=0\end{aligned}$$

- entre $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_s$: 1-1=0
- entre $\mathcal{C}_{r^2}$ et $\mathcal{C}_s$: idem.
