SORBONNE UNIVERSITÉ – MASTER DE PHYSIQUE ET APPLICATIONS

SYMÉTRIES EN PHYSIQUE – CONTRÔLE CONTINU

JEUDI 11 JUIN 2020

Durée 1h30. Documents autorisés.

Règles graphiques pour $SU(N)$

Dans ce problème, nous allons introduire un langage graphique adapté au calcul de différents facteurs de groupe apparaissant dans les théories des champs de Yang-Mills construites sur un groupe de jauge $SU(N)$. Ces techniques s'appliquent en particulier à QCD, pour laquelle, bien que $N_c = 3$, il se trouve être utile de considérer l'extension au cas de $SU(N)$ afin d'obtenir des développements topologiques systématiques en régime non-perturbatif, comme proposé par Gerard 't Hooft en 1974.

Dans l'ensemble du problème, on utilisera la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

1 Générateurs

On développe un élément de $SU(N)$ au voisinage de l'identité sous la forme

$$U = 1 + i\alpha^a t^a + O(\alpha^2) .$$

1. Quel est le nombre de matrices t^a ?

> **Solution**
> D'après le cours, le groupe $SU(N)$ étant de dimension $N^2 - 1$, il y a donc $N^2 - 1$ matrices t^a.

2. Quelles sont les propriétés des matrices t^a ?

> **Solution**
> Par utilisation de la propriété de définition $UU^\dagger = 1$ on tire immédiatement l'hermiticité de t^a. D'autre part, sur $SU(N)$ on impose en plus que $\det U = 1$ d'où d'après le cours $\mathrm{Tr}\, t^a = 0$.

3. Considérons une représentation de dimension d de $\mathfrak{su}(N)$. Les propriétés de la question précédente restent-elles valables ?

> **Solution**
> Les propriétés d'hermiticité et de trace nulle sont valables dans toute représentation.

Les générateurs vérifient des relations de commutation de la forme

$$[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c . \tag{1}$$

On considère à présent une représentation arbitraire D définie par ses générateurs $T^a = D(t^a)$.

4. Que peut-on dire des relations de commutation (1) dans cette nouvelle représentation ?

> **Solution**
> Par morphisme on tire immédiatement le fait que ces relations de commutation ne dépendent pas de la représentation considérée.

5. On note N la représentation de définition t^a et $\bar{N}$ sa contragrédiente. Est-elle distincte de sa représentation conjuguée ?

> **Solution**
> Les représentations conjuguées et contragrédientes sont identiques puisque le groupe $SU(N)$ est unitaire : on a vu cette propriété en cours pour les représentations unitaires d'un groupe, et bien sûr toute représentation d'un groupe unitaire est unitaire par morphisme.

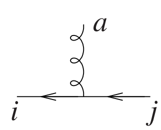
6. La position des indices (haut ou bas) dans la relation (1) est-elle importante ?

> **Solution**
> Non car d'après le cours, comme $SU(N)$ est compact et simple (donc semi-simple), la position des indices importe peu.

7. Quelles sont les propriétés de symétrie sur les indices de f_{abc} ?

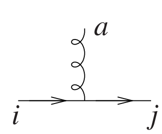
> **Solution**
> Les constantes de structure f_{abc} sont complètement antisymétriques sur les trois indices a,b,c.

Une représentation graphique des générateurs t^a_{ij} dans la représentation fondamentale N est donnée par



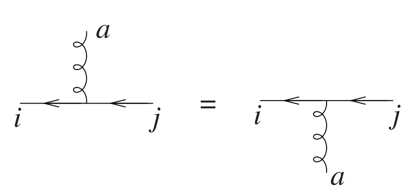
$$\equiv \quad t^a_{ij}\,. \tag{2}$$

Sa complexe conjuguée est notée $\bar{N}$. Les lignes portent des flèches qui permettent de distinguer ces deux représentations N et $\bar{N}$ qui ne sont pas équivalentes pour $N \geqslant 3$.
Une représentation graphique des générateurs $(t^a)^*_{ij}$ est donnée par



$$\equiv \quad (t^a)^*_{ij}\,. \tag{3}$$

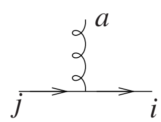
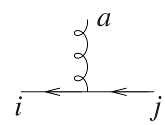
8. Justifier que l'on puisse écrire la règle graphique



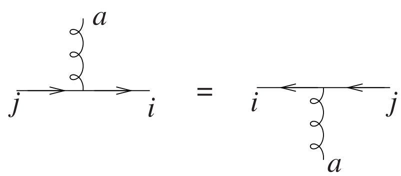
(4)

Solution

Comme t^a est hermitien,

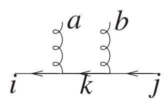
$(t^a)^\dagger_{ij}$ =  = t^a_{ij} = 

Bien sûr, par une rotation de π, on peut aussi écrire



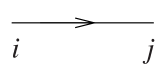
d'où le résultat cherché en combinant les deux égalités.

Avec ces règles graphiques, on peut à présent écrire le produit de deux générateurs sous la forme

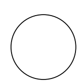
 $\equiv \quad (t^a t^b)_{ij} = t^a_{ik} t^b_{kj}\,,$ (5)

la correspondance entre la représentation graphique et la relation algébrique correspondante s'établissant de la façon suivante : remonter le flux des flèches revient à suivre l'écriture de la formule algébrique suivant son sens d'écriture de la gauche vers la droite.

De façon naturelle, un symbole de Kronecker est une simple flèche :

 $\equiv \; \delta_{ij}\,.$ (6)

Une boucle correspond à une contraction d'un symbole de Kronecker, soit

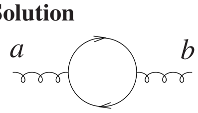
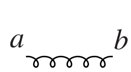
 $= N\,.$

Les générateurs sont normalisés conventionnellement de la façon suivante :

$$\mathrm{Tr}\,(t^a\,t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}\,. \tag{7}$$

9. Traduire graphiquement cette relation de normalisation.

Solution

 $= \frac{1}{2}$  .

10. Démontrer l'identité de Fierz

$$t^a_{ij}\,t^a_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i\ell}\,\delta_{jk} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}\right)\,. \tag{8}$$

Il sera utile de décomposer une matrice hermitienne $N \times N$ arbitraire A dans la base des matrices $\{I, t^a\}$, et d'identifier les coefficients de cette décomposition.

Solution
Les matrices I et t^a ($a = 1, \cdots, N^2 - 1$) forment une base pour les matrices hermitiennes $N \times N$. Pour une matrice hermitienne arbitraire A, on peut écrire

$$A = c^0 I + c^a t^a \,.$$

En utilisant la relation de normalisation (7), on obtient l'expression des coefficients apparaissant dans la décomposition ci-dessus sous la forme

$$c^0 = \frac{\mathrm{Tr} A}{N} \quad \text{et} \quad c^a = 2\,\mathrm{Tr}[t^a A] \,.$$

Cela conduit à écrire la décomposition sous la forme, en se focalisant sur le coefficient ij,

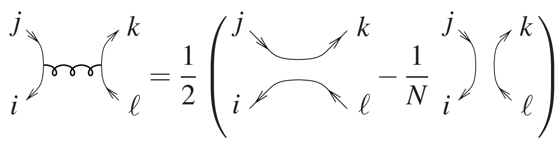
$$\frac{\mathrm{Tr} A}{N} \delta_{ij} + 2\, t^a_{k\ell} A_{\ell k} t^a_{ij} = A_{ij}$$

i.e., pour chaque $A_{\ell k}$,

$$A_{\ell k} \left[\frac{1}{N} \delta_{k\ell}\, \delta_{ij} + 2\, t^a_{ij} t^a_{k\ell} - \delta_{i\ell}\, \delta_{jk} \right] = 0$$

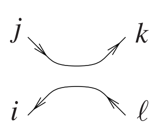
ce qui achève la preuve après avoir identifié les coefficients de $A_{\ell k}$.

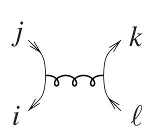
11. Montrer que cette identité se lit graphiquement :


(9)

Solution
Ce résultat est évident d'après la question précédente.

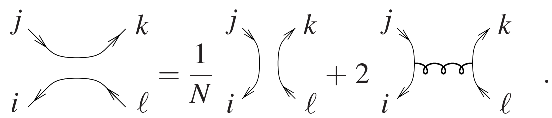
12. De la décomposition de l'identité agissant dans l'espace produit tensoriel $N \otimes \bar{N}$, trouvez les règles graphiques pour les projecteurs singulet et adjoint. On montrera que

$P_1 \propto$  (10)

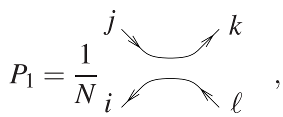
$P_{\mathrm{Ad}} \propto$  (11)

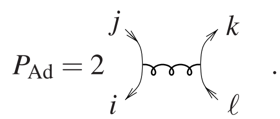
et l'on précisera les constantes de proportionnalité.

Solution
La décomposition de l'identité agissant dans l'espace produit tensoriel $N \otimes \bar{N}$ est



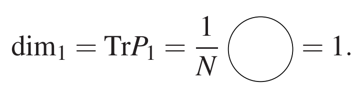
Nous avons donc

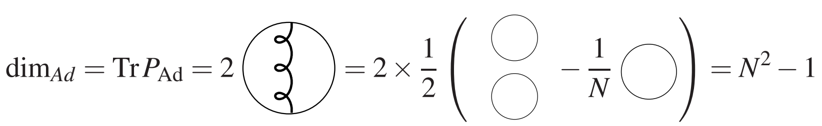




13. Vérifier que ces projecteurs donnent les valeurs appropriées pour la dimension des représentations singulet et adjointes.

Solution





2 Quelques applications

2.1 Facteurs de couleur dans la représentation fondamentale

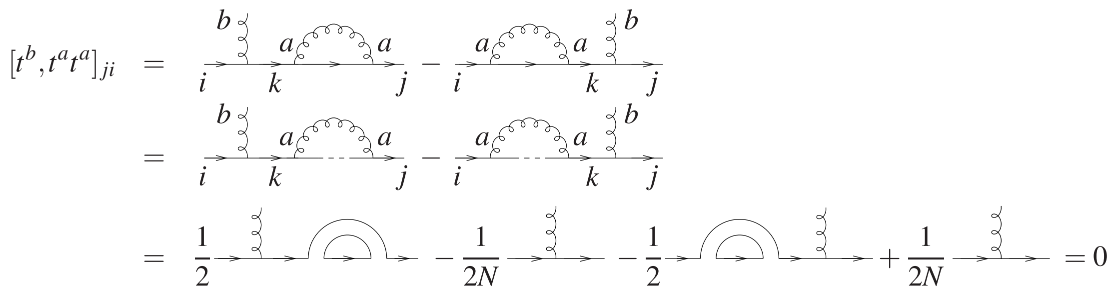
Considérons maintenant quelques facteurs de couleur typiques, que l'on rencontre classiquement en physique des particules.

14. Vérifier algébriquement puis graphiquement que $t^a t^a$ est un Casimir, c'est-à-dire qu'il commute avec l'ensemble des générateurs de $SU(N)$.

Solution

$$\begin{aligned}
[t^b, t^a t^a] &= t^b t^a t^a - t^a t^a t^b = -[t^a, t^b] t^a - t^a [t^a, t^b] \\
&= -i t^c t^a f_{abc} - i t^a t^c f_{abc} = -i(t^a t^c + t^c t^a) f_{abc} = 0
\end{aligned}$$

par contraction d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique en ac.
Graphiquement, ceci se traduit, en considérant un élément de matrice ji, soit $[t^b, t^a t^a]_{ji}$, par



15. Montrer que $(t^a t^a)_{ij} = C_F \, \delta_{ij}$ et établir que

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}. \tag{12}$$

Solution
Ce résultat est attendu : $t^a t^a$ est un Casimir pour $SU(N)$, Ainsi, selon le lemme de Schur, il devrait s'agir d'un multiple de l'identité. Afin d'obtenir ce facteur multiplicatif C_F, il suffit de calculer la trace de $t^a t^a$, qui est égal à $C_F \, N$ (car $\mathrm{Tr} I = N$). Comme $\mathrm{Tr}(t^a t^a) = \frac{1}{2}\delta^{aa} = \frac{N^2-1}{2}$ (nombre de générateurs = $N^2 - 1$), donc $C_F = \frac{N^2-1}{2N}$.

16. Obtenir le même résultat en utilisant l'identité de Fierz

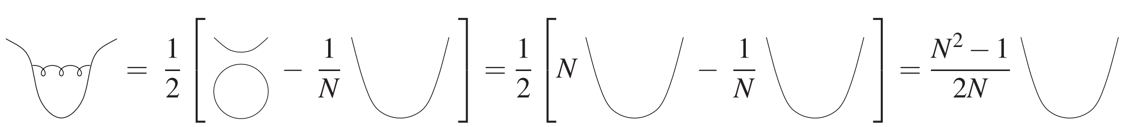
a. Algébriquement.

Solution

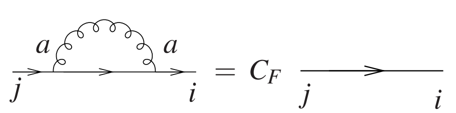
$$(t^a t^a)_{ij} = t^a_{ik} t^a_{k\ell} = \sum_k \frac{1}{2}\left(\delta_{ij}\delta_{kk} - \frac{1}{N}\delta_{ik}\,\delta_{kj}\right) = \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right)\delta_{ij} = \frac{N^2-1}{2N}\delta_{ij}.$$

b. Graphiquement.

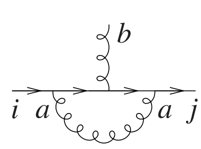
Solution

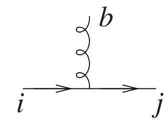


donc

$(t^a t^a)_{ij} = \dfrac{N^2-1}{2N}\,\delta_{ij} \equiv C_F \, \delta_{ij}$ i.e. 

17. Démontrer algébriquement puis graphiquement que

$$\left(t^a t^b t^a\right)_{ij} = -\frac{1}{2N} t^b_{ij} \qquad \text{i.e.}$$ 

$= -\dfrac{1}{2N}$ 

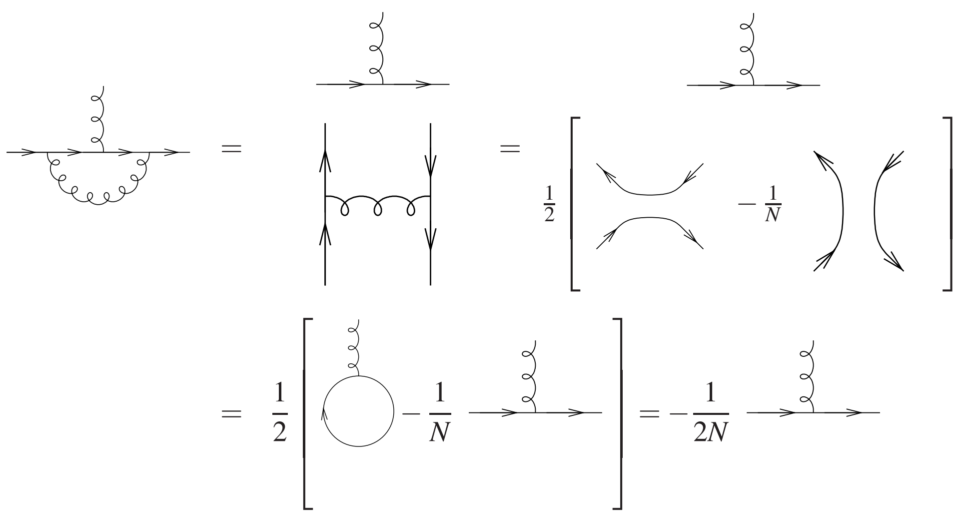
. (13)

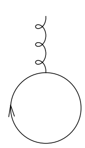
Solution

En utilisant l'identité de Fierz, on obtient

$$\left(t^a t^b t^a\right)_{ij} = t^a_{ij'} t^b_{j'k'} t^a_{k'j} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij}\,\delta_{j'k'} - \frac{1}{N}\delta_{ij'}\,\delta_{k'j}\right) t^b_{j'k'} = -\frac{1}{2N} t^b_{ij}$$

puisque $t^b_{j'j'} = 0$ (les générateurs sont de trace nulle).
Graphiquement, ceci s'écrit

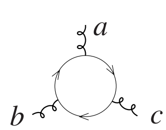


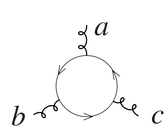
où nous avons utilisé le fait que  $= \mathrm{Tr}\, t^b = 0\,.$

2.2 Quelques facteurs de couleur dans la représentation adjointe

Une règle graphique peut également être donnée afin de calculer les facteurs de couleur impliquant la représentation adjointe. Cela exige de relier la représentation adjointe à la représentation fondamentale.

18. Montrer que

$$\frac{i}{2} f_{abc} =$$ 

$-$ 

. (14)

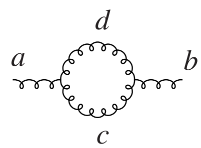
Solution

Cette relation graphique repose sur la relation

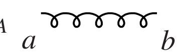
$$Tr([t^a, t^b]\, t^c) = \frac{i}{2} f_{abc}\,.$$

19. Démontrez l'identité suivante :

$$f^{acd}\, f^{bcd} = N\,\delta^{ab} \equiv C_A\,\delta^{ab} \qquad \text{i.e.}$$



$= -C_A$



. (15)

a. Algébriquement.

Solution

On peut écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Big([t^a\,,\,t^c]\,[t^b\,,\,t^c]\Big) &= \mathrm{Tr}\Big(i\,f^{acd}\,t^d\,i\,f^{bce}\,t^e\Big)\\ &= -f^{acd}\,f^{bce}\,\mathrm{Tr}(t^d\,t^e) = -\frac{1}{2}\,f^{acd}\,f^{bcd}\,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}f^{acd}\,f^{bcd} &= -2\,\mathrm{Tr}\Big([t^a\,,\,t^c]\,[t^b\,,\,t^c]\Big)\\ &= -2\,\mathrm{Tr}\Big(t^a\,t^c\,t^b\,t^c + t^c\,t^a\,t^c\,t^b - t^c\,t^a\,t^b\,t^c - t^a\,t^c\,t^c\,t^b\Big)\\ &= -2\,\mathrm{Tr}\Big(2\,t^a\,t^c\,t^b\,t^c - (t^a\,t^b + t^b\,t^a)\,t^c\,t^c\Big)\end{aligned}$$

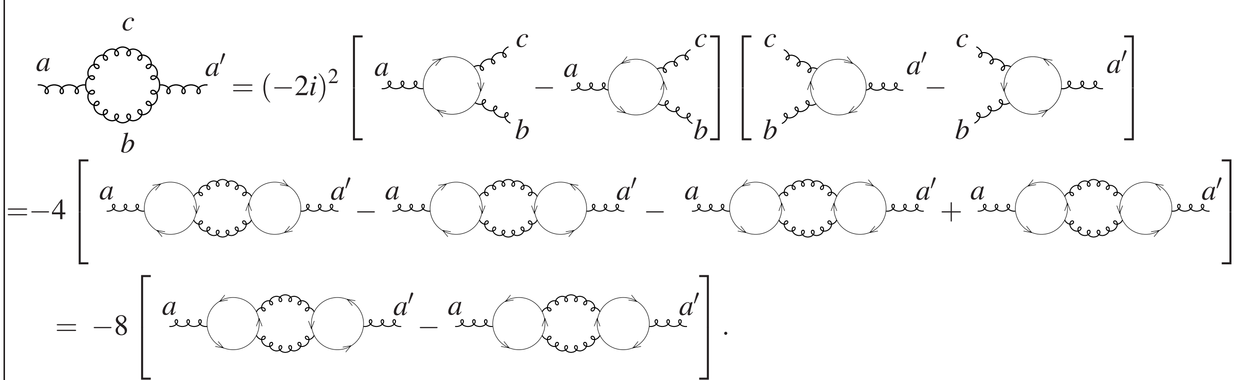
où nous avons utilisé l'invariance de la trace sous permutation cyclique, qui donne enfin, grâce à l'expression (12) de C_F et la relation (13), ainsi que les normalisations (7),

$$f^{acd}\,f^{bcd} = -2\,\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{N}\,t^a\,t^b - \frac{N^2-1}{2N}2\,t^a\,t^b\right) = 2N\,\mathrm{Tr}\,(t^a\,t^b) = N\,\delta^{ab}\,.$$

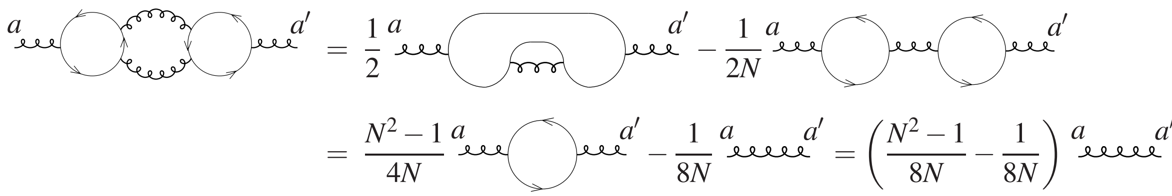
b. Graphiquement.

Solution

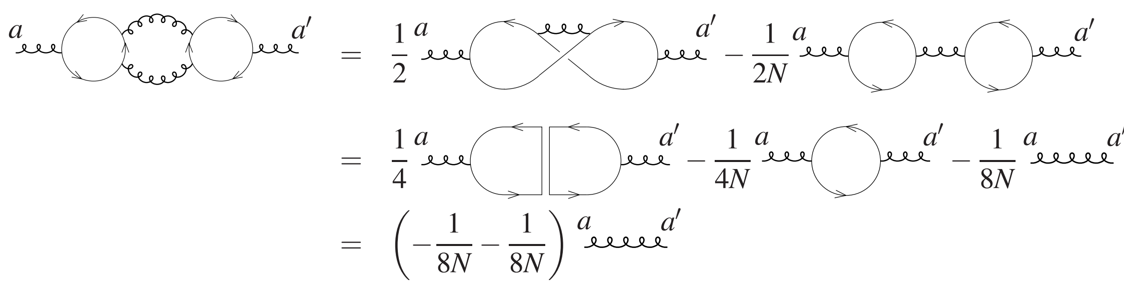
Partant de l'Eq. (14, on peut écrire



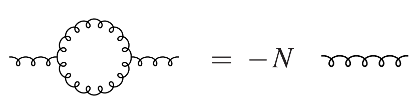
Chacun de ces termes peut désormais être évalué séparément en utilisant l'identité Fierz :



et



où nous avons utilisé le fait que les premiers termes du côté droit de la deuxième ligne de l'équation ci-dessus disparaissent puisque les générateurs sont sans trace. Ainsi, en insérant ces deux résultats dans l'expression graphique de $f^{acd}\,f^{bcd}$, on obtient finalement



(16)

q.e.d.