



COMPORTEMENT DES ÉLECTRONS DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE DE 1013 GAUSS OU PLUS ET IMPLICATIONS ASTROPHYSIQUES

B. Jancovici

► **To cite this version:**

B. Jancovici. COMPORTEMENT DES ÉLECTRONS DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE DE 1013 GAUSS OU PLUS ET IMPLICATIONS ASTROPHYSIQUES. *Journal de Physique Colloques*, 1969, 30 (C3), pp.C3-14-C3-18. <10.1051/jphyscol:1969302>. <jpa-00213679>

HAL Id: jpa-00213679

<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00213679>

Submitted on 1 Jan 1969

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COMPOTEMENT DES ÉLECTRONS DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE DE 10^{13} GAUSS OU PLUS ET IMPLICATIONS ASTROPHYSIQUES

B. JANCOVICI

Faculté des Sciences d'Orsay

Résumé. — On passe en revue quelques travaux récents concernant les propriétés des électrons dans un champ magnétique uniforme statique intense (10^{13} gauss ou plus). Certains mécanismes astrophysiques pourraient donner naissance à de tels champs.

La connaissance des états quantiques d'un électron de Dirac dans le champ permet le calcul de l'équation d'état d'un gaz d'électrons dont on néglige les interactions. La pression est naturellement anisotrope. Pour un gaz dégénéré en champ fort, la pression perpendiculairement au champ peut s'annuler et le gaz se comporte comme un gaz à une dimension. L'aimantation du gaz a été calculée ; elle est toujours faible comparée au champ, et le gaz ne devient jamais ferromagnétique.

On discute diverses réactions entre particules, dues aux interactions électromagnétiques ou aux interactions faibles, en présence d'un champ magnétique.

On étudie comment la présence d'un moment magnétique anormal de l'électron modifie l'énergie de son état fondamental dans un champ magnétique. On réfute certains travaux en montrant que cette correction radiative à l'énergie demeure faible, même dans des champs très élevés.

Abstract. — A few recent studies of the properties of electrons in an intense uniform static magnetic field (10^{13} gauss or more) are reviewed. Some astrophysical mechanisms might produce such fields.

The knowledge of the quantum states of a Dirac electron in the field allows a calculation of the equation of state for an electron gas when the interactions are neglected. The pressure is, of course, anisotropic. For a degenerate gas in a strong field, the pressure normal to the field can vanish, and the gas behaves like a one-dimensional one. The magnetization of the gas has been computed ; it is always small compared to the field, and the gas never becomes ferromagnetic.

Various reactions between particles, caused either by the electromagnetic or by the weak interactions, in the presence of a magnetic field, are discussed.

A study is made of how the presence of an anomalous magnetic moment for the electron can shift the energy of its ground state in a magnetic field. Other papers are refuted, and it is shown that this radiative correction to the energy remains a small one, even in very high fields.

Cette communication est une revue de quelques travaux récents sur divers problèmes relatifs à des électrons soumis à des champs magnétiques énormes, qui peut-être existent ou ont existé dans certains objets célestes. Le champ est considéré comme uniforme et statique.

1. Existence possible de champs élevés. — Deux mécanismes, entre autres, pourraient donner naissance à des champs élevés.

a) **COMPRESSION AVEC CONSERVATION DU FLUX.** — Si on comprime un système de charges en mouvement, dans des conditions telles que le flux magnétique soit conservé, le champ variera comme L^{-2} , où L est une dimension linéaire du système. Un modèle simple de ce phénomène est fourni par une spire porteuse de

courant, dont on diminue les dimensions. D'après la loi de Lenz, le courant dans la spire augmente pour s'opposer à la diminution du flux Φ que la spire s'envoie à travers elle-même. Si la spire est un conducteur parfait, la force électromotrice de self-induction $-d\Phi/dt$ doit demeurer infinitésimale (sinon, elle engendrerait dans la spire un courant I infini) ; le flux Φ demeure donc constant au cours du temps.

Lors d'un effondrement gravitationnel, une contraction linéaire par un facteur 10^5 peut donc transformer un champ initial de 100 gauss en un champ de 10^{14} gauss. Inversement, la présence actuelle d'un champ estimé à 10^{-3} gauss dans la nébuleuse du Crabe pourrait impliquer que l'étoile dont l'explosion a formé cette nébuleuse portait un champ de l'ordre de 10^{13} gauss ; dans le même ordre d'idées, dans le

cadre d'une théorie d'un univers en expansion, on peut imaginer que les faibles champs magnétiques présents actuellement dans l'univers sont les restes d'un champ primordial énorme [1].

b) FERROMAGNÉTISME DES ÉTOILES A NEUTRONS. — Des champs magnétiques élevés existeraient dans la matière superdense des étoiles à neutrons, si les interactions entre neutrons rendaient cette matière ferromagnétique, comme l'ont suggéré certains auteurs [2, 3].

2. **Etats quantiques d'un électron de Dirac.** — Les niveaux d'énergie que prévoit la théorie de Dirac pour un électron dans un champ magnétique uniforme sont connus depuis longtemps [4] :

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{mc}\right)^2 + 2 \frac{H}{H_c} (n + r - 1)}.$$

m est la masse de l'électron, c la vitesse de la lumière, p_z la composante parallèle au champ de la quantité de mouvement de l'électron, H le champ.

$$H_c = m^2 c^3 / e\hbar = 4,414 \times 10^{13} \text{ gauss}$$

(e est la charge de l'électron, \hbar la constante de Planck divisée par 2π) est un champ caractéristique tel que l'énergie ($e\hbar/mc$) H_c de retournement du spin dans ce champ soit égale à mc^2 . Le nombre quantique orbital n est un entier positif ou nul ; le nombre quantique $r = 1, 2$ distingue les deux états de spin. L'énergie E est dégénérée $\Omega^{2/3} eH/2\pi\hbar c$ fois (Ω est le volume de normalisation).

Les fonctions d'onde sont étroitement apparentées à celles d'un oscillateur harmonique.

On notera que l'énergie de l'état fondamental d'un électron de Dirac reste mc^2 quel que soit le champ magnétique H . L'énergie $-(e\hbar/2mc)H$ qu'a le moment magnétique de spin lorsqu'il est parallèle au champ est exactement compensée par l'énergie de point zéro $(1/2)\hbar(eH/mc)$ du mouvement orbital cyclotron.

3. **Propriétés d'équilibre d'un gaz d'électrons** [5]. —

On obtient les propriétés d'équilibre d'un gaz d'électrons en appliquant les méthodes usuelles de la mécanique statistique. Il est commode de prendre pour variables indépendantes la température T et le potentiel chimique μ . La probabilité d'occupation d'un état quantique d'énergie E est donnée par le facteur de Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-\mu)/kT}},$$

où k est la constante de Boltzmann. On désigne par \sum une somme sur les états quantiques à une particule (c'est-à-dire une sommation sur les nombres quantiques n et r , une intégration sur la quantité de mouvement p_z , et une multiplication par le facteur de dégénérescence $\Omega^{2/3} eH/2\pi\hbar c$). Le nombre de particules est alors

$$N = \sum f(E)$$

et l'énergie du gaz est

$$U = \sum Ef(E).$$

En présence du champ H , pris comme axe des z , il n'y a pas de pression isotrope ; il faut considérer le tenseur des contraintes. Sa composante P_{zz} est la valeur moyenne du débit parallèlement à z de la composante p_z de quantité de mouvement ; ce débit est $p_z v_z$, où $v_z = p_z c^2/E$ est la composante z de la vitesse. On a donc

$$P_{zz} = \sum \frac{p_z^2 c^2}{E} f(E).$$

On trouve pour les autres composantes non nulles du tenseur des contraintes la valeur

$$P_{xx} = P_{yy} = \sum \frac{m^2 c^4 H}{EH_c} (n + r - 1) f(E).$$

La grande fonction de partition z est donnée par

$$\text{Log } z = \sum \text{Log} \left[\frac{1}{f(E)} \right].$$

L'aimantation \mathcal{M} du gaz, valeur moyenne de $-\partial\mathcal{H}/\partial H$, où \mathcal{H} est le hamiltonien, est

$$\mathcal{M} = kT \frac{\partial \log z}{\partial H}.$$

Nous décrivons plus spécialement ici le cas limite d'un gaz dégénéré (kT faible devant l'énergie de Fermi) et d'un champ fort ($H/H_c \gtrsim (p_{z\text{max}}/mc)^2$). Des ordres de grandeur typiques seront :

champ $H = H_c$;

densité $N \lesssim N_0 \equiv (mc/\hbar)^3/\pi^2 = 1,8 \times 10^{30}$ électrons/cm³ ;

température $kT \ll mc^2 = k \times 5,9 \times 10^9$ °K ; par exemple $T \sim 10^8 - 10^9$ °K.

Alors, pour $N < N_0/\sqrt{2}$, seuls les états $n = 0, r = 1$ sont occupés. L'énergie se réduit à $E = \sqrt{m^2 c^4 + p_z^2 c^2}$, et le gaz se comporte comme le gaz à une dimension cher aux théoriciens. On a $P_{xx} = P_{yy} = 0$: il n'y a pas de pression transverse. Si N dépasse la valeur

$N_0/\sqrt{2}$, une nouvelle classe d'états ($n = 1, r = 1$ et $n = 0, r = 2$) commence à se remplir. La figure 1

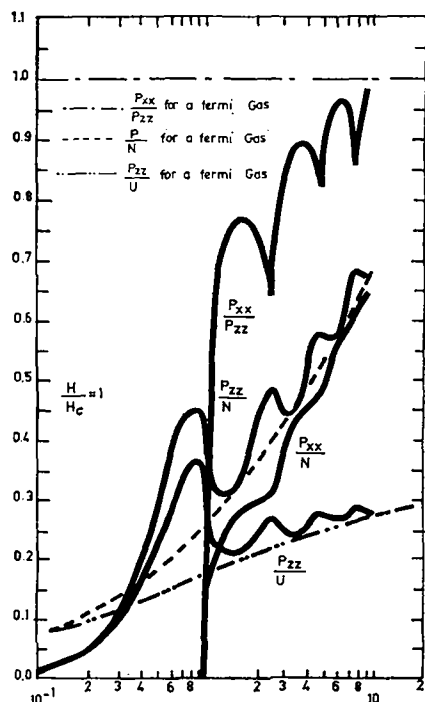


FIG. 1 (d'après [5]). — Diverses grandeurs d'un gaz d'électrons dégénéré, dans un champ H_c , en fonction de la densité (en unités $N_0/\sqrt{2}$). Les courbes pointillées (« Fermi gas ») correspondent au cas où il n'y a pas de champ.

représente diverses grandeurs en fonction de la densité. Il y a une singularité chaque fois qu'une nouvelle classe d'états est atteinte. On peut noter que dans certains intervalles de densité, $P_{zz}/N^{4/3}$ est une fonction décroissante de N , ce qui correspond à des états instables vis-à-vis d'un effondrement gravitationnel ; cependant, on ne peut pas discuter correctement cette instabilité éventuelle sans savoir comment le champ H lui-même est couplé à la densité.

La figure 2 décrit le comportement de l'aimantation. Le fait saillant est que, dans un champ H , l'aimantation \mathcal{M} ne dépasse jamais un ordre de grandeur de $10^{-3} H$ (on peut prévoir à priori, à partir d'arguments dimensionnels, que \mathcal{M}/H est d'ordre $e^2/\hbar c = 1/137$). Il en résulte que le seul champ $4\pi\mathcal{M}$ créé par l'aimantation elle-même ne suffit pas à maintenir cette aimantation en l'absence de champ extérieur : le gaz ne sera jamais ferromagnétique. Il faut toutefois noter que cette conclusion est basée sur un modèle d'électrons libres soumis à leur seul champ magnétique propre moyen.

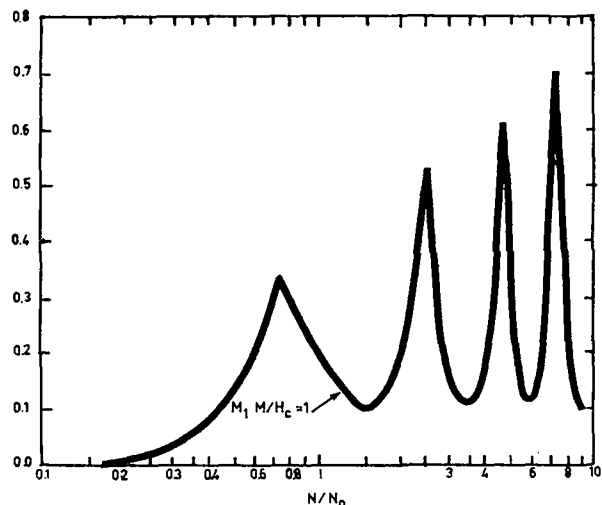


FIG. 2 (d'après [5]). — L'aimantation (en unités $(e^2/\hbar c) H_c/\pi^2$) en fonction de la densité (en unités N_0), pour un gaz d'électrons dégénéré, dans un champ H_c .

Erratum : Sur la figure, au lieu de $M_1 M/H_c = 1$, lire : $M, H/H_c = 1$.

4. Réactions diverses. — La présence d'un champ magnétique élevé peut jouer un rôle important en ce qui concerne diverses réactions entre particules élémentaires mettant en jeu des électrons.

a) PROCESSUS ÉLECTROMAGNÉTIQUES [6]. — Le bremsstrahlung $e \rightarrow e + \gamma$ est possible en dehors de toute collision. Le bremsstrahlung inverse $e + \gamma \rightarrow e$ rendra un gaz d'électrons très opaque aux photons. Enfin, la production de paires $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ est possible dans le vide.

b) DÉSINTÉGRATION β [7]. — Le taux de désintégration β des neutrons ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$) est modifié en présence d'un champ magnétique, parce que la fonction d'onde de l'électron émis est affectée. Le taux de désintégration augmente avec le champ, d'un facteur 1,1 pour un champ H_c , d'un facteur 2,3 pour un champ $3 H_c$. Ceci a des conséquences quant à l'explication du taux d'abondance de l'hélium dans l'univers. On admet souvent que la désintégration β a maintenu, à un certain stade de l'évolution de l'univers, un équilibre neutron-proton, jusqu'à ce que la température soit devenue assez basse pour que cet équilibre soit « gelé » ; la réaction $n + p \rightarrow$ deutérium aurait alors été à l'origine d'un cycle menant à l'hélium. En présence d'un champ magnétique intense, le taux de désintégration β accru maintient l'équilibre neutron-proton plus longtemps, le nombre de neutrons restant après le « gel » de l'équilibre est plus faible, et la quantité d'hélium

formée est réduite. Cette réduction va dans le sens voulu pour obtenir un accord avec l'expérience.

c) PRODUCTION DE PAIRES NEUTRINO-ANTI-NEUTRINO [8]. — Dans un champ magnétique, les lois de conservation de l'énergie-impulsion ne s'opposent plus à des réactions de « bremsstrahlung par interactions faibles » telles que $e \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$ ou $e \rightarrow \mu + \nu + \bar{\nu}$. Le taux de ces réactions demeure toutefois faible devant celui du bremsstrahlung ordinaire.

Citons aussi le processus $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ qui pourrait devenir appréciable à 10^{16} gauss [9].

5. Corrections radiatives d'un électron. — Jusqu'ici, nous avons considéré l'électron comme décrit par la théorie de Dirac, et donc porteur d'un moment magnétique égal à un magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar/2mc$.

En réalité, les corrections radiatives donnent à l'électron un moment magnétique « anormal » additionnel, qui, au premier ordre en $e^2/\hbar c$ vaut

$$(e^2/2\pi\hbar c)\mu_B \sim 1,2 \times 10^{-3}\mu_B.$$

Si on décrit l'effet de ce moment anormal, dans un champ magnétique uniforme H , en ajoutant au hamiltonien de Dirac le terme supplémentaire

$$(e^2/2\pi\hbar c)\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}$$

(où les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sont les matrices de Pauli), on sait calculer explicitement [10, 11] les niveaux d'énergie. En particulier, on trouve pour l'état fondamental de l'électron

$$E = \left| mc^2 - (e^2/2\pi\hbar c)\mu_B H \right| = mc^2 \left| 1 - (e^2/4\pi\hbar c)(H/H_c) \right|.$$

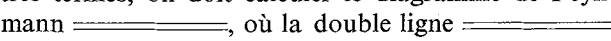
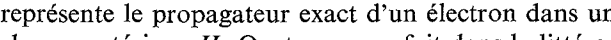
Cette énergie dépend maintenant du champ H , contrairement à ce qui se passait pour un électron de Dirac.

Certains auteurs [9, 11] ont pris au sérieux la formule ci-dessus pour la fantastique valeur du champ

$$H = (4\pi\hbar c/e^2)H_c = 7,6 \times 10^{16} \text{ gauss};$$

la formule dit alors que l'énergie de l'état fondamental s'annule, ce qui conduit à des conséquences extraordinaires : il serait possible par exemple de créer des paires électron-positron sans dépenser d'énergie. Toujours d'après la même formule, pour des valeurs de H encore plus élevées ($H \sim 10^{19}$ gauss), l'énergie d'un électron deviendrait considérable, et l'électron dans son état fondamental pourrait se désintégrer spontanément en un méson μ !

Nous avons évoqué ces travaux pour pouvoir les critiquer ici, car ils reposent à notre avis sur une extrapolation aux champs élevés totalement injustifiée. Dire que l'électron possède un moment magnétique anormal μ_a signifie seulement que les corrections

radiatives à son énergie sont $\mu_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}$ au premier ordre dans le champ H , c'est-à-dire que cette formule n'est valable que si le champ H peut être traité comme une perturbation. Si la condition $H/H_c \ll 1$ n'est pas satisfaite, on ne peut plus faire un développement par rapport à H . Par contre, il demeure permis de se limiter au premier ordre d'un développement par rapport à la constante de structure fine $e^2/\hbar c$. En d'autres termes, on doit calculer le diagramme de Feynman , où la double ligne  représente le propagateur exact d'un électron dans un champ extérieur H . On trouve en fait dans la littérature [12] une représentation intégrale de cette correction radiative à l'énergie de l'état fondamental d'un électron (on pose $L = H/H_c$) :

$$(e^2/4\pi\hbar c)mc^2 \int_0^1 dv \int \frac{dw}{w} \frac{w}{|w|} e^{ivw} \times \left[\frac{2iLw(v e^{2iLw} + 1)}{v e^{2iLw} + 2iLw(1-v) - v} - (1+v) \right].$$

Pour $H/H_c \ll 1$, cette correction radiative se réduit bien à $-(e^2/4\pi\hbar c)mc^2(H/H_c)$. Par contre, pour $H/H_c \gg 1$, le comportement asymptotique de la correction radiative, qu'on obtient par un calcul laborieux mais sans difficultés réelles, est de la forme

$$(e^2/4\pi\hbar c)mc^2 \{ [\text{Log}(2H/H_c) - C - 3/2]^2 + A \},$$

où $C = 0,577$ est la constante d'Euler, et où A est une constante numérique dont nous pouvons montrer qu'elle est comprise entre -6 et 7 . On voit donc que, même pour un champ H supérieur à H_c par plusieurs ordres de grandeur, la correction radiative demeure de l'ordre de $(e^2/\hbar c)mc^2$, et n'altère pas de manière appréciable l'énergie mc^2 d'un électron de Dirac.

Références

- [1] HOYLE (F.), dans « Onzième Conseil de l'Institut International Solvay » (Editions Stoops, Bruxelles, 1958).
- [2] BROWNELL (D. H.) et CALLAWAY (J.), *Nuovo Cimento*, 1969, **60** B, 169.
- [3] RUDERMAN (M.), Communication au présent colloque.
- [4] RABI (I.), *Zs. f. Phys.*, 1928, **49**, 507.
- [5] CANUTO (V.) et CHIU (H. Y.), *Phys. Rev.*, 1968, **173**, 1210, 1220, 1229.
- [6] ERBER (T.), *Rev. Mod. Phys.*, 1966, **38**, 626.
- [7] O'CONNELL (R. F.) et MATESE (J. J.), *Nature*, 1969, **222**, 649.
- [8] BAIER (V. N.) et KATKOV (V. M.), *Sov. Phys. Doklady*, 1967, **11**, 947.
- [9] CHIU (H. Y.), CANUTO (V.) et FASSIO-CANUTO (L.), *Phys. Rev.*, 1968, **176**, 1438.
- [10] TERNOV (I. M.), BAGROV (V. G.) et ZHUKOVSKII (V. Ch.), *Moscow Univ. Bull.*, 1966, **21**, 21.

- [11] O'CONNELL (R. F.), *Phys. Rev. Letters*, 1968, **21**, 397; *Phys. Letters*, 1968, **27 A**, 391.
[12] DEMEUR (M.), *Acad. Roy. Belgique, Classe des Sciences*, 1953, No, 1643.

DISCUSSION

BONDI. — It was not quite clear at the beginning when you spoke of the occurrence of high fields because, if the field strength goes like L^{-2} , it means that the current density goes like L^{-3} .

But in a material of given density there is of course

a maximum current : all the electrons go at the speed of light roughly speaking. And so there must be a minimum dimension ; if you do have these large fields and you do prescribe the density, then you show that these fields must extend over more than some area.

Can you give some figures for this ?

RUDERMAN. — This limitation actually is not a drastic one : the high field can exist even in a region as small as to have neutron star dimensions.