Fonctions spéciales

I. Conduction de la chaleur

Lorsque les échanges de chaleur sont insuffisants entre une surface solide et un fluide, on peut les augmenter en placant des ailettes sur la surface solide.
Dans tout ce qui suit, on ne s'interesse qu'à des regimes stationnaires, i.e. la température ne depend pas du temps.
On assimile le solide à un milieu homogène et isotrope, de conductivité thermique constante λ >0.

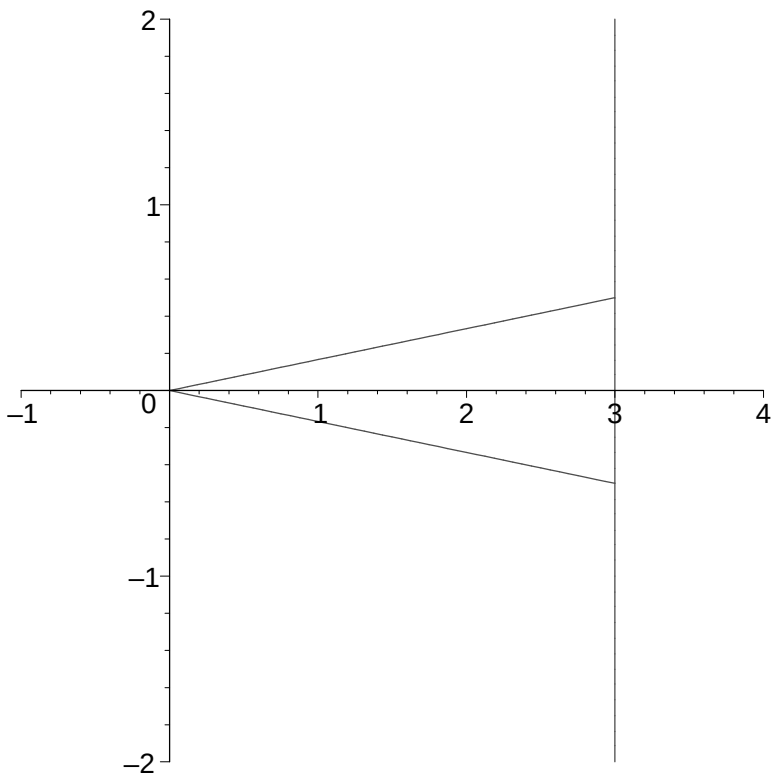
I.1 Ailette triangulaire

On considère une paroi solide en x=L (le solide étant situé en x>L) à la température θ_0, sur laquelle a été rapportée une ailette infinie dans la direction y, et de section limitée par les deux segments

$z=\frac{e\,x}{2\,L}$ et $z=-\frac{e\,x}{2\,L}$ pour 0<x<L.

Tracer le profil de l'ailette pour L=3 et e=1.

```
> plot({[x,x/6,x=0..3],[x,-x/6,x=0..3],[3,z,z=-2..2]},-1..
  4,-2..2,color=red);
```



Si L>>e, on peut en première approximation considérer que la température dans l'ailette ne dépend que de x.
L'équation de la chaleur dans le solide s'écrit alors

$\left(\frac{d^2}{dx^2}\theta(x)\right)+\frac{1\left(\frac{d}{dx}\theta(x)\right)}{x}-\frac{2\,h\,L\,\theta(x)}{\lambda\,e\,x}=0$, où h>0 est le coefficient d'échange entre le solide et le fluide.
Résoudre l'équation pour trouver le champ de température. On précisera pour maple le signe des paramètres. Quelles fonctions la solution fait-elle intervenir? On utilisera la condition aux limites sur la paroi solide pour déterminer l'une des constantes d'intégration.

```
> ode1:=diff(theta(x),`$`(x,2))+1/x*diff(theta(x),x)-2*h*L
  *theta(x)/(lambda*e*x)=0;
```

$$ode1 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\theta(x)\right)+\frac{\frac{d}{dx}\theta(x)}{x}-\frac{2\,h\,L\,\theta(x)}{\lambda\,e\,x}=0$$

```
> assume(h>0,lambda>0,e>0,L>0);temp:=dsolve({ode1,theta(L)
  =theta[0]},theta(x));
```

$$temp := \theta(x) = \frac{\left(-_C2\ \mathrm{BesselK}\left(0, \frac{2\,L\sim\sqrt{2}\sqrt{h\sim}}{\sqrt{e\sim}\sqrt{\lambda\sim}}\right)+\theta_0\right)\mathrm{BesselI}\left(0, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{h\sim}\sqrt{L\sim}\sqrt{x}}{\sqrt{e\sim}\sqrt{\lambda\sim}}\right)}{\mathrm{BesselI}\left(0, \frac{2\,L\sim\sqrt{2}\sqrt{h\sim}}{\sqrt{e\sim}\sqrt{\lambda\sim}}\right)} + _C2\ \mathrm{BesselK}\left(0, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{h\sim}\sqrt{L\sim}\sqrt{x}}{\sqrt{e\sim}\sqrt{\lambda\sim}}\right)$$

La solution fait intervenir BesselI, fonction de Bessel modifiée de 1ère espèce, et BesselK, fonction de Bessel modifiée de 2ème espèce. Remarquer que si on omet de préciser le signe des paramètres, la solution fera intervenir d'autres fonctions de Bessel, mais avec des racines de nombres négatifs...

Chercher la limite de la solution en x=0. En déduire la valeur de la 2e constante d'intégration.

```
> limit(temp,x=0);
```

$$\theta(0) = \mathrm{signum}(_C2)\,\infty$$

La fonction de Bessel modifiée de 2ème espèce diverge en x=0. La solution physique correspond donc au cas C2=0.

Faire un plot de la solution en indiquant l'unité utilisée sur les axes, en prenant comme valeurs L=5cm, e=0.5cm, λ=1 $\frac{W}{m\,K}$,h=10 $\frac{W}{m^2\,K}$, et$\theta_0 = 60$ *degres Celsius.*

Imprimer la figure dans un fichier postscript.

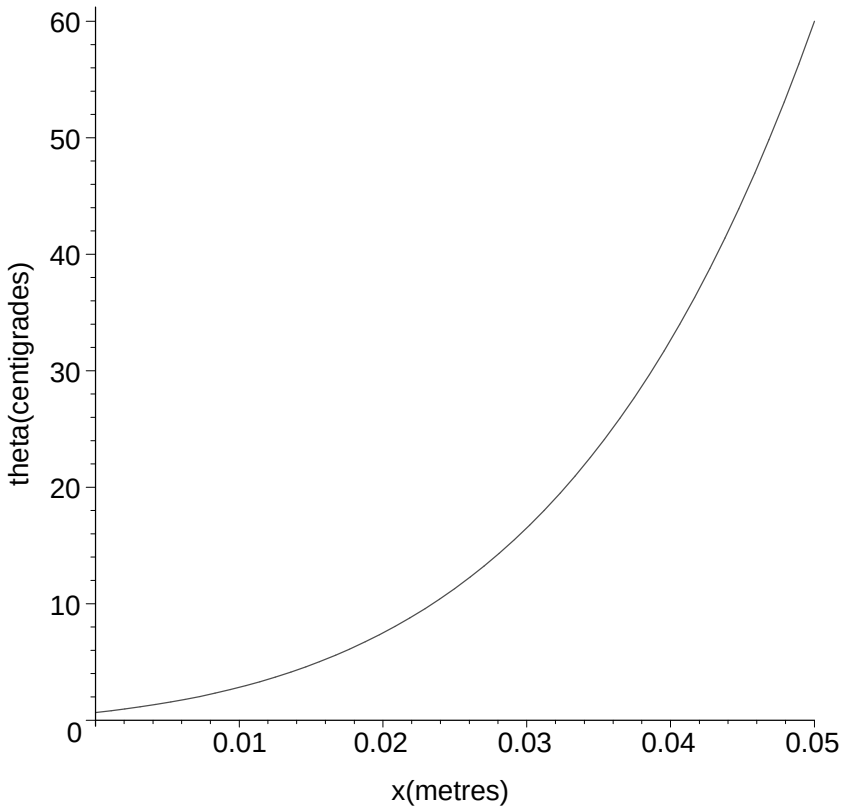
```
> resp:=subs(_C2=0,rhs(temp));
```

$$resp := \frac{\theta_0 \,\mathrm{BesselI}\left(0, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{h\sim}\sqrt{L\sim}\sqrt{x}}{\sqrt{e\sim}\sqrt{\lambda\sim}}\right)}{\mathrm{BesselI}\left(0, \frac{2\,L\sim\sqrt{2}\sqrt{h\sim}}{\sqrt{e\sim}\sqrt{\lambda\sim}}\right)}$$

```
> TPlot:=subs(L=0.05,e=0.005,lambda=1.0,h=10.0,theta[0]=60
  .0,resp);
```

$$TPlot := \frac{60.0\ \mathrm{BesselI}(0,\ 19.99999999\sqrt{2}\sqrt{x})}{\mathrm{BesselI}(0,\ 4.472135954\sqrt{2})}$$

```
> plot(TPlot,x=0..0.05,labels=["x(metres)","theta(centigra
  des)"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
```



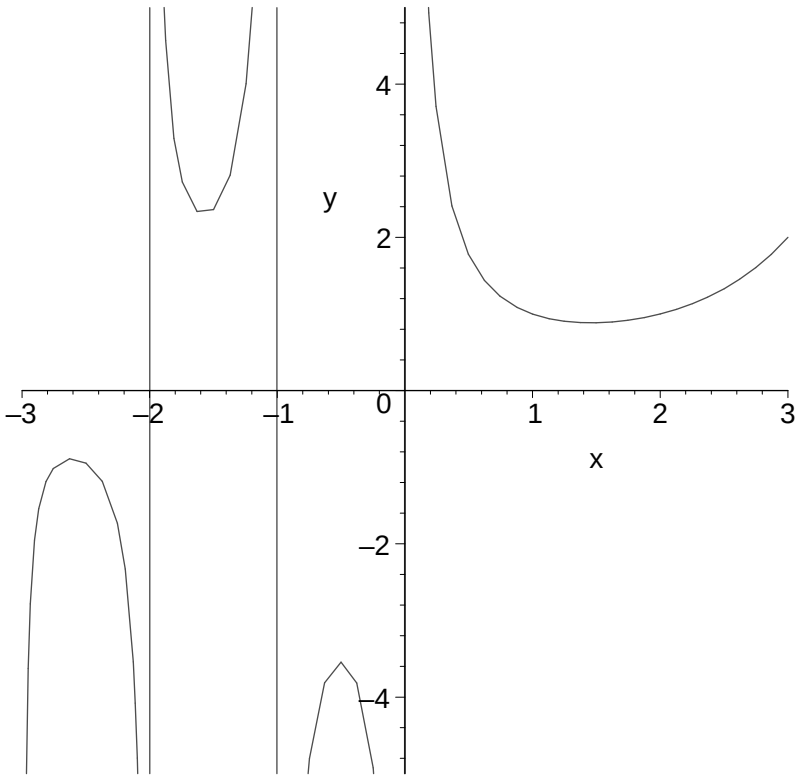

```
> plotsetup(ps,plotoutput="theta.ps");
> plot(TPlot,x=0..0.05,labels=["x(metres)","theta(centigra
  des)"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
> plotsetup(default);
```

II Propriétés simples des fonctions spéciales

Le but de cette partie est de se faire une idée du comportement de différentes fonctions spéciales. Pour chaque fonction ci-dessous, on choisira un intervalle pour x et y sur lequel on tracera la fonction, puis on donnera le comportement asymptotique au voisinage de x=0 et lorsque l'argument de x devient infini (si possible).
Etudier les fonctions GAMMA, Psi, les fonctions de Bessel de première espèce et de seconde espèce pour des arguments entiers de 0 à 3, et les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce pour les mêmes arguments entiers.

Fonction GAMMA

```
> plot(GAMMA(x),x=-3..3,y=-5..5);
```




```
> series(GAMMA(x),x);
```

$$x^{-1} - \gamma + \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma^2}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{\pi^2\gamma}{12} - \frac{\gamma^3}{6}\right)x^2 + \left(\frac{\pi^4}{160} + \frac{1}{3}\zeta(3)\gamma + \frac{\pi^2\gamma^2}{24} + \frac{\gamma^4}{24}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{5}\zeta(5) - \frac{\pi^4\gamma}{160} - \frac{1}{36}\zeta(3)\pi^2 - \frac{1}{6}\zeta(3)\gamma^2 - \frac{\pi^2\gamma^3}{72} - \frac{\gamma^5}{120}\right)x^4 + \left(\frac{61\,\pi^6}{120960} + \frac{1}{5}\zeta(5)\gamma + \frac{\pi^4\gamma^2}{320} + \frac{1}{18}\zeta(3)^2 + \frac{1}{36}\zeta(3)\pi^2\gamma + \frac{1}{18}\zeta(3)\gamma^3 + \frac{\pi^2\gamma^4}{288} + \frac{\gamma^6}{720}\right)x^5 + O(x^6)$$

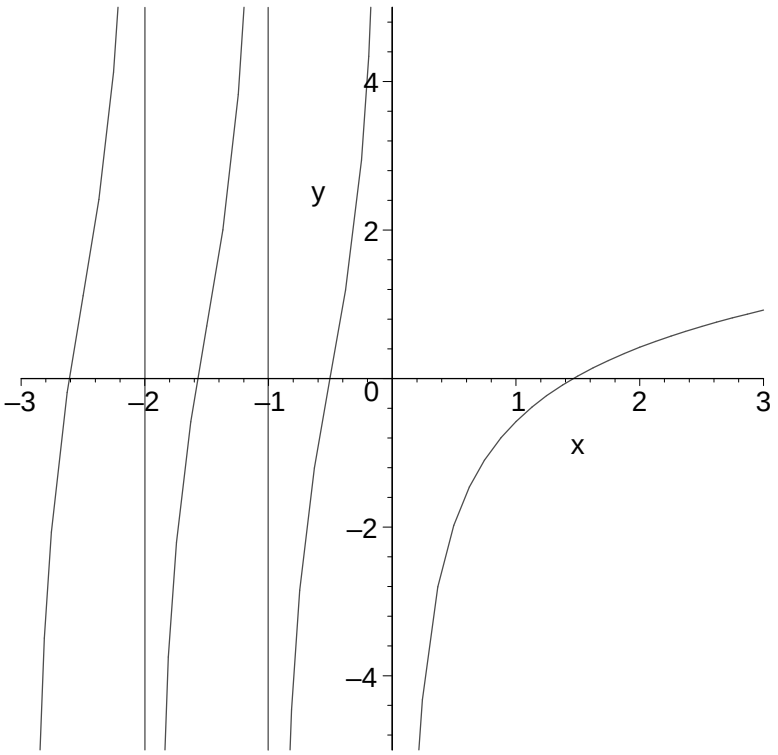
```
> series(GAMMA(x),x=infinity);
```

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{12} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}}{288} - \frac{139\sqrt{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(7/2)}}{51840} - \frac{571\sqrt{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(9/2)}}{2488320} + \frac{163879\sqrt{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(11/2)}}{209018880} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(13/2)}\right)\right) \Big/ \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{x}\right.$$

$$\mathbf{e}^{x}\Big)$$

Fonction Psi

```
> plot(Psi(x),x=-3..3,y=-5..5);
```




```
> series(Psi(x),x);
```

$$-x^{-1}-\gamma+\frac{\pi^2}{6}x-\zeta(3)x^2+\frac{\pi^4}{90}x^3-\zeta(5)x^4+\frac{\pi^6}{945}x^5+O(x^6)$$

```
> series(Psi(x),x=infinity);
```

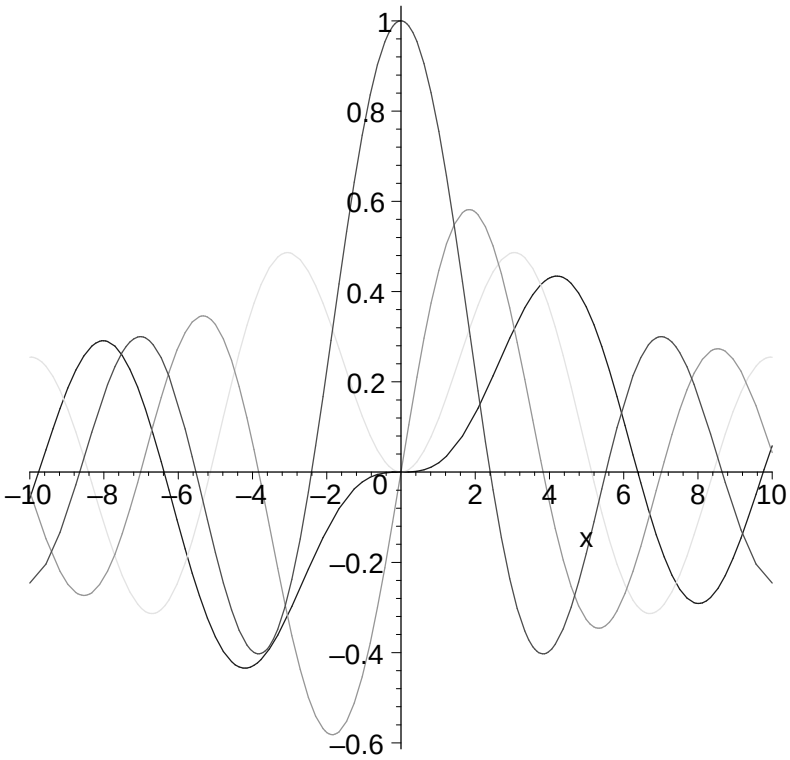
$$\ln(x)-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

```
> asympt(Psi(x),x);
```

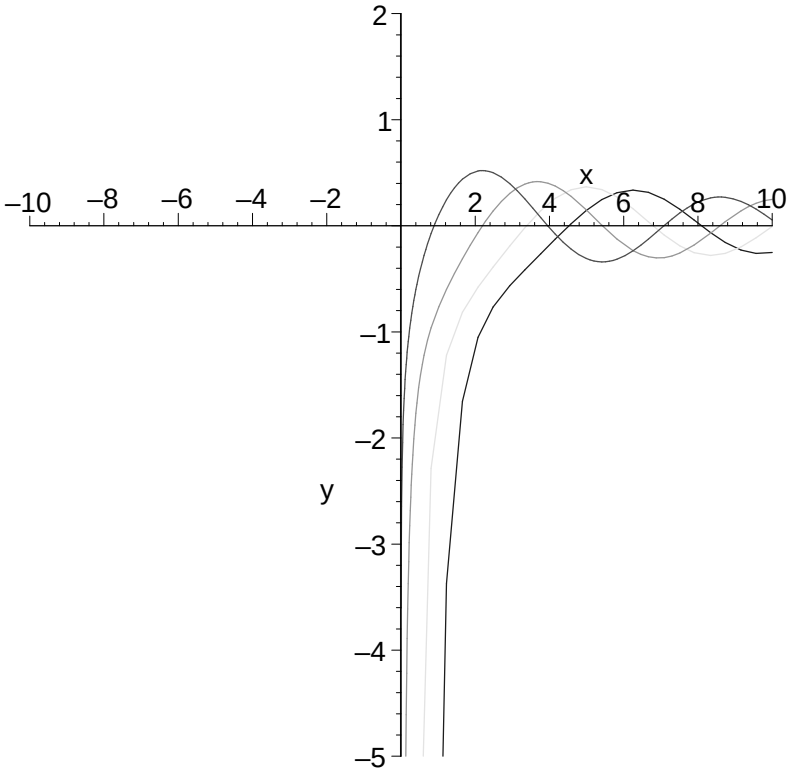
$$\ln(x)-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

Fonctions de Bessel de 1ere et 2eme espece

```
> plot([seq(BesselJ(i,x),i=0..3)],x=-10..10);
```




```
> plot([seq(BesselY(i,x),i=0..3)],x=-10..10,y=-5..2);
```




```
> evalf(BesselY(0,-1));
```

$$0.08825696422 + 1.530395373\,I$$

```
> seq(series(BesselJ(i,x),x),i=0..3);
```

$$1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4+O(x^6),\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{384}x^5+O(x^6),\ \frac{1}{8}x^2-\frac{1}{96}x^4+O(x^6),$$

$$\frac{1}{48}x^3-\frac{1}{768}x^5+O(x^6)$$

```
> seq(series(BesselJ(i,x),x=infinity,2),i=0..3);
```

$$\frac{\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}\,\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{8}\frac{\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{15}{8}\frac{\sqrt{2}\,\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{35}{8}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right)$$

```
> seq(series(BesselY(i,x),x,2),i=0..3);
```

$$\left(\frac{2\,(-\ln(2)+\ln(x))}{\pi}+\frac{2\,\gamma}{\pi}\right)+O(x^2),\ -\frac{2}{\pi}x^{-1}+\left(\frac{-\ln(2)+\ln(x)}{\pi}-\frac{-2\,\gamma+1}{2\,\pi}\right)x+O(x^3),$$

$$-\frac{4}{\pi}x^{-2}+O(x^0),\ -\frac{16}{\pi}x^{-3}+O(x^{-1})$$

```
> seq(series(BesselY(i,x),x=infinity,2),i=0..3);
```

$$-\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

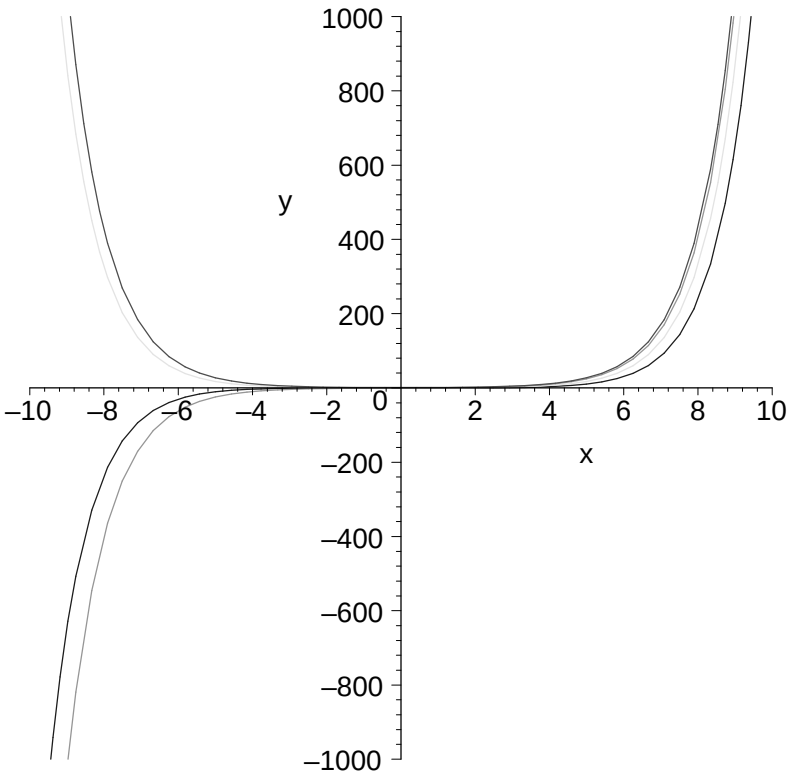
$$-\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{3}{8}\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{15}{8}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

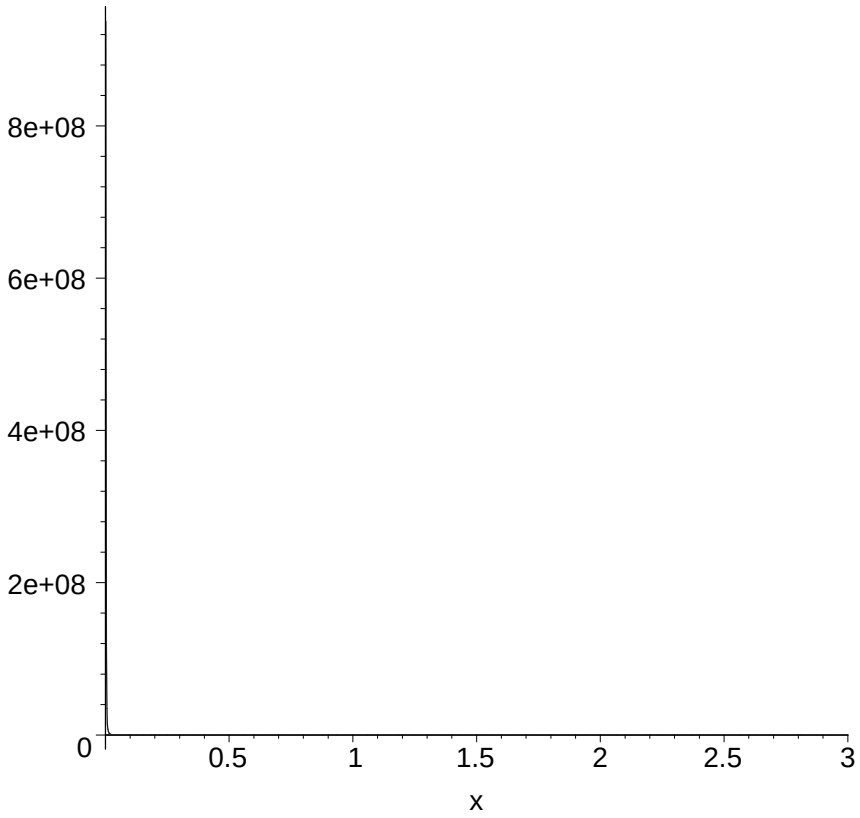
$$\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}+\frac{35}{8}\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right)$$

Fonctions de Bessel modifiées de 1ere et 2eme espece

```
> plot([seq(BesselI(i,x),i=0..3)],x=-10..10,y=-1000..1000)
  ;
```




```
> plot([seq(BesselK(i,x),i=0..3)],x=0..3);
```




```
> evalf(BesselK(0,0));
Error, (in BesselK) numeric exception: division by zero
```

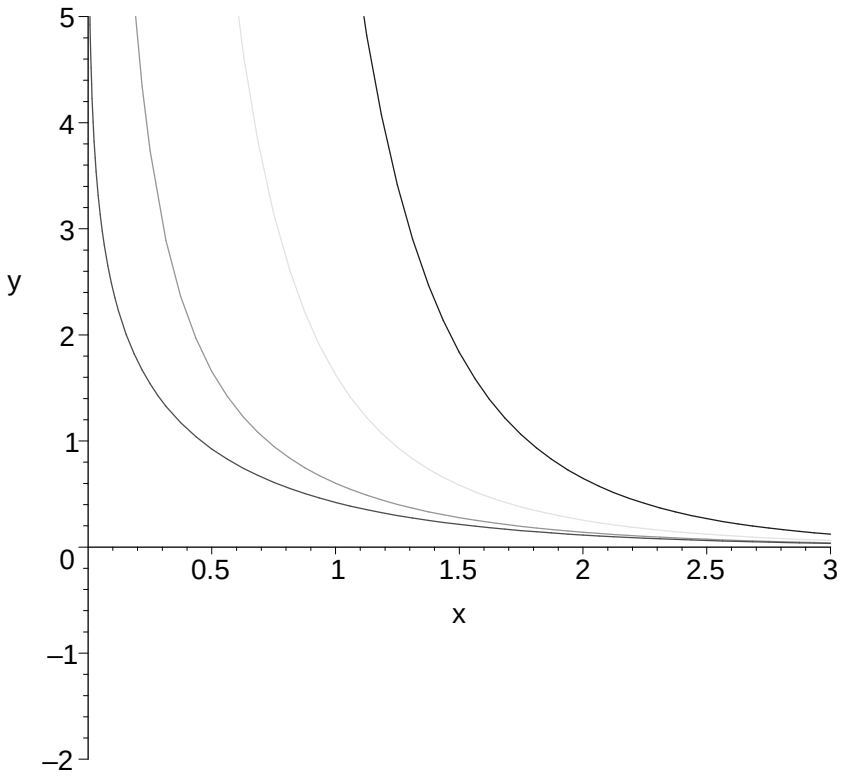
```
> limit(BesselK(0,x),x=0, right);
```

$$\infty$$

```
> limit(BesselK(0,x),x=0, left);
```

$$\infty$$

```
> plot([seq(BesselK(i,x),i=0..3)],x=0..3,y=-2..5);
```




```
> evalf(BesselK(0,-1));
```

$$0.4210244382 - 3.977463261\,I$$

```
> seq(series(BesselI(i,x),x,4),i=0..3);
```

$$1+\frac{1}{4}x^2+O(x^4),\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{16}x^3+O(x^4),\ \frac{1}{8}x^2+O(x^4),\ \frac{1}{48}x^3+O(x^4)$$

```
> seq(series(BesselI(i,x),x=infinity,2),i=0..3);
```

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,e^x\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{16}\frac{\sqrt{2}\,e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,e^x\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{3}{16}\frac{\sqrt{2}\,e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,e^x\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{15}{16}\frac{\sqrt{2}\,e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,e^x\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{35}{16}\frac{\sqrt{2}\,e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}}{\sqrt{\pi}}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right)$$

```
> seq(series(BesselK(i,x),x,2),i=0..3);
```

$$(\ln(2)-\ln(x)-\gamma)+O(x^2),\ x^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{4}\right)x+O(x^3),\ 2\,x^{-2}+O(x^0),$$

$$8\,x^{-3}+O(x^{-1})$$

```
> seq(series(BesselK(i,x),x=infinity,2),i=0..3);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\sqrt{\frac{1}{x}}-\frac{1}{16}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{3}{16}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{15}{16}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right),$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{35}{16}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-x)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)}\right)$$