PROBLÈME DE MÉCANIQUE QUANTIQUE

Neutrinos massifs

Ce problème unique est divisé en 3 parties indépendantes (A,B et C) mais l'introduction concerne toutes les parties.

INTRODUCTION

Récemment, plusieurs expériences ont mis en évidence le caractère massif de la particule élémentaire appelée neutrino, notée ν. En mécanique quantique, on peut traiter le neutrino comme un système dont les 2 états possibles, dits de saveur, sont ν_e (neutrino-électron) et ν_μ (neutrino-muon). L'évolution temporelle permet de passer d'un état à l'autre, ce qui est appelé "oscillation de neutrino". Par exemple, les neutrinos solaires produits dans l'état ν_e oscillent en ν_μ.
Afin de traiter l'oscillation du neutrino, considérons un espace de Hilbert à 2 dimensions et introduisons les opérateurs de saveur-électron S_e et de saveur-muon S_μ. Deux états propres orthonormés de ces opérateurs sont notés $|\nu_e\rangle$ et $|\nu_\mu\rangle$. Dans la base $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle\}$, les représentations matricielles de S_e, S_μ et les vecteurs $|\nu_e\rangle$, $|\nu_\mu\rangle$ s'écrivent,

$$S_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La dynamique d'un neutrino libre est régie par l'hamiltonien H_ν, dont la représentation matricielle dans la base $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle\}$ est:

$$H_\nu = \begin{pmatrix} \alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta & (\beta-\alpha)\sin\theta\,\cos\theta \\ (\beta-\alpha)\sin\theta\,\cos\theta & \beta\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

où α, β sont des nombres réels positifs tels que $\alpha \neq \beta$ et θ est appelé 'angle de mélange'. Une base orthonormée de vecteurs propres de H_ν est $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$ avec,

$$|\nu_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad |\nu_2\rangle = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

On associe la valeur propre E_1 à $|\nu_1\rangle$, et E_2 à $|\nu_2\rangle$.

[A] LES SAVEURS:

I) Etude Préliminaire: Evolution de la Valeur Moyenne

1. Donnez l'équation de Schrödinger dépendant du temps satisfaite par le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$.

2. Prendre le conjugué hermitique de l'équation obtenue à la question 1.

3. Quelle est l'expression de la valeur moyenne $\langle \mathcal{O} \rangle$ d'une observable $\mathcal{O}$ pour un système dans l'état normé $|\psi(t)\rangle$?

4. En déduire la relation suivante,

$$\frac{d}{dt}\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [\mathcal{O}, H] \rangle + \langle \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \rangle. \tag{4}$$

II) Base de Saveurs

1. Quelles sont les valeurs propres de S_e et S_μ correspondant aux vecteurs propres $|\nu_e\rangle$ et $|\nu_\mu\rangle$?

2. S_e et S_μ sont-elles des observables ? Sont-elles des constantes du mouvement ?

3. Déterminez les valeurs propres E_1 et E_2 de H_ν (en résolvant l'équation caractéristique) et les relations que doivent satisfaire les composantes des vecteurs propres de H_ν.

4. Considérons un neutrino solaire qui est produit dans l'état $|\psi\rangle = |\nu_e\rangle$.
4.1 On mesure d'abord S_e: quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? (on justifiera la validité des formules de probabilité utilisées et on vérifiera que les probabilités obtenues sont bien normalisées)
4.2 On mesure ensuite H_ν: quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

5. Même question qu'en 4, mais en mesurant d'abord H_ν puis S_e.

6. Trouvez-vous les mêmes probabilités aux questions 4 et 5 ? Cette différence/similitude était-elle prévisible ?

III) Décomposition de l'Hamiltonien

Les énergies E_1 et E_2 d'un neutrino libre d'impulsion p sont données par $E_1^2 = p^2c^2 + m_1^2c^4$ et $E_2^2 = p^2c^2 + m_2^2c^4$, où c est la vitesse de la lumière et $m_{1,2}$ les masses au repos.

1. L'énergie de masse d'un neutrino, $m_{1,2}c^2$, étant typiquement petite par rapport à pc, donnez l'approximation de E_1 et E_2, en développant au premier ordre en $m_{1,2}c^2/pc$.

2. Exprimez H_ν en fonction de E_1, E_2 et θ. Puis déduisez de la question 1 l'expression de la partie diagonale H_0 [dépendant de pc exclusivement] et de la partie H_m [dépendant de $m_{1,2}$ et θ] qui sont telles que $H_\nu = H_0 + H_m$.

3. $\{H_0\}$ forme-t-il, à lui seul, un Ensemble Complet d'Observables qui Commutent (E.C.O.C.) ?

4. L'ensemble $\{H_0, S_e\}$ constitue-t-il un E.C.O.C. ? Justifier.

[B] LES OSCILLATIONS:

I) Evolution Temporelle

On considère un neutrino solaire créé au temps $t = 0$ dans l'état $|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle$ qu'on laisse évoluer jusqu'au temps t sans effectuer aucune mesure.

1. Exprimez $|\psi(t)\rangle$ en fonction de E_1, E_2 et des kets $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$. Puis en fonction des kets $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle$.
1.1 A quoi est équivalent $|\psi(t)\rangle$ dans le cas limite $E_1 = E_2$? Déduisez-en la première condition d'oscillation entre les différents états du neutrino.
1.2 Donnez $|\psi(t)\rangle$ dans la limite où $\theta = 0$? Déduisez-en la seconde condition d'oscillation.

2. Le système est dans l'état $|\psi(t)\rangle$ obtenu à la question 1 (avec $\theta \neq 0$ et $E_1 \neq E_2$, conditions d'oscillation). Calculez, en fonction de $\Delta E = E_2 - E_1$, les probabilités $P_0(t)$ et $P_1(t)$ d'obtenir respectivement les valeurs 0 et 1 lors d'une mesure de S_e. Assurez-vous ensuite que la somme $P_0(t) + P_1(t)$ est bien égale à la valeur attendue pour tout temps t.

3. Quel est l'état $|\psi(t)\rangle$ du neutrino juste après qu'une mesure de S_e ait donné la valeur 0 ?

4. Exprimez $P_0(t)$ en fonction de $\sin^2(2\theta)$ et $\sin^2(t\Delta E/2\hbar)$ [1]. Retrouvez les 2 conditions d'oscillation déjà obtenues aux questions 1.1 et 1.2. Tracez *soigneusement* l'allure de la courbe $P_0(t)$.

5. Calculez, de deux manières différentes, la valeur moyenne $\langle S_e\rangle(0)$ quand le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle$. Faites-en de même pour la valeur moyenne $\langle S_e\rangle(t)$ correspondant à l'état $|\psi(t)\rangle$. Obtenez-vous des valeurs identiques de $\langle S_e\rangle(0)$ et $\langle S_e\rangle(t)$ (pour tout t) ? Expliquez cela en vous servant de la relation (4) de la Partie [A].

II) Applications Numériques

1. La vitesse d'un neutrino est égale à celle de la lumière (c) à une bonne approximation. Quelle est donc la plus petite valeur de la distance ℓ à laquelle le nombre de neutrinos détectés dans l'état ν_μ est maximum ? On donnera un ordre de grandeur, sachant que l'énergie cinétique typique d'un neutrino produit dans le soleil est $pc \approx 10$ MeV ($= 10^7$ eV). D'autre part, on a $\Delta E = c^4 \Delta m^2 / 2pc$ et les expériences de neutrinos solaires indiquent que cette différence de masse (au carré) est

[1] On donne: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

$c^4\Delta m^2 \approx 10^{-5}$ eV^2 [2].

2. Dans les expériences terrestres, l'énergie d'un neutrino est plutôt $pc \approx 10$ GeV ($= 10^{10}$ eV) et la distance parcourue est $\ell \sim 1$ km. Les détecteurs sont sensibles à une baisse de $\sim 1\%$ du nombre de ν_e créés initialement. Quelle valeur limite de $c^4\Delta m^2$ est donc mesurable dans ces expériences ? On se limitera encore une fois à une estimation en prenant $\theta \approx \pi/4$. La limite calculée est-elle une limite inférieure ou supérieure ?

[C] LES TRANSFORMATIONS:

I) Mélange Maximum

On prend, **dans toute cette partie I**, $\theta = \pi/4$ qui est proche de la mesure expérimentale.

1. Toute transformation est associée à un opérateur T. Si $|\psi\rangle$ est normé et $|\psi'\rangle$ est son transformé par T, alors $|\langle\nu_e|\psi\rangle|^2 = |\langle\nu_e'|\psi'\rangle|^2$.
En déduire la propriété que T doit satisfaire. Est-ce que l'opérateur suivant (toujours donné dans la base $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle\}$) la satisfait ?

$$T = \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2. La transformée d'une observable $\mathcal{O}$ vaut: $\mathcal{O}' = T\mathcal{O}T^\dagger$. Comment s'écrit la condition d'invariance ? H_ν est-il invariant par la transformation (5) ?

3. Que deviennent les états propres de H_ν après transformation selon (5) ? Ce résultat était-il prévisible ?

4. Déduire $\frac{d}{dt}\langle T\rangle$ de la relation (4), dans la Partie [A], et de la question 2.

II) Changement de Base

1. Ecrire la matrice unitaire $C(\theta)$ de changement de base reliant la base $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$ à $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle\}$.

2. On considère le groupe continu de transformations associé à cet opérateur $C(\theta)$. A quoi correspond ce groupe ?

3. Une transformation infinitésimale s'écrit: $C(\delta\theta) = \mathbf{1} - i\,\delta\theta\, G$, au premier ordre en $\delta\theta$. Que vaut le générateur G ? Vérifiez qu'il est bien auto-adjoint.

4. Que vaut $C^{-1}(\theta)$?

[2] On rappelle que $c \simeq 3\ 10^8\ m\ s^{-1}$, $\hbar \simeq 10^{-34}\ J\ s$ et 1 eV$\simeq 10^{-19}\ J$.

III) [FACULTATIF] Modèle Réaliste à 3 Saveurs

En fait, le neutrino peut même être dans un troisième état de saveur $|\nu_\tau\rangle$. Un hamiltonien réaliste est donné, dans la base $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle\}$, par

$$H_\nu^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta & (\beta-\alpha)\sin\theta\,\cos\theta \\ 0 & (\beta-\alpha)\sin\theta\,\cos\theta & \beta\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Supposons que le neutrino est dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_e\rangle + \frac{1}{2}|\nu_\mu\rangle + \frac{1}{2}|\nu_\tau\rangle$. On effectue une mesure de $H_\nu^{(3)}$:

1. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

2. Quels sont les états après la mesure ?

3. Dans un modèle quelconque, la matrice de changement de base reliant $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle\}$ et $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle\}$ peut se paramétriser comme suit,

$$C^{(3)}(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}) = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{7}$$

avec $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ et $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$. Exprimez cette matrice en fonction des sous-matrices 2×2 que sont $C(\theta_{23})$, $C(\theta_{12})$ et de θ_{13}. Interprétez les angles θ_{ij}.