PROBLÈME DE MÉCANIQUE QUANTIQUE

Le chat de Schrödinger

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le principe de superposition d'états quantiques est essentiel notamment pour rendre compte des phénomènes d'interférence. Néanmoins, appliqué à des objets macroscopiques, ce principe conduit à des situations paradoxales dans lesquelles un système peut se trouver dans une superposition d'états antinomiques. Le plus célèbre exemple étant *le chat de Schrödinger* dans une superposition d'un état "chat vivant" et d'un état "chat mort". Le but de ce problème est de montrer que de telles superpositions d'états macroscopiques différents ne sont pas détectables en pratique: elles sont extrêmement fragiles et un couplage, même faible, du système avec l'environnement extérieur suffit à rendre inobservables ces superpositions quantiques.
Pour montrer cela, nous allons d'abord étudier des états particuliers de l'oscillateur harmonique, les états quasi-classiques, qui seront ensuite utilisés pour construire un état de type 'chat de Schrödinger'.

Considérons donc un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de pulsation ω. L'hamiltonien s'écrit,

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2. \tag{1}$$

Les états propres de $\hat{H}$ sont notés $|\mathrm{n}>$ et ont pour valeurs propres: $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On introduit les observables position et impulsion non dimensionnées, respectivement, $\hat{x} = \hat{X}\sqrt{m\omega/\hbar}$ et $\hat{p} = \hat{P}/\sqrt{m\hbar\omega}$, ainsi que les opérateurs:

$$\hat{a} = \frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}. \tag{2}$$

Enfin, l'état

$$|\alpha> = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\mathrm{n}> \tag{3}$$

est appelé état quasi-classique ou état cohérent (α étant un nombre complexe). Par définition $0! = 1$.

I) OSCILLATEUR HARMONIQUE

1) Les états propres d'énergie

a] Rappeler ce que vaut le commutateur $[\hat{X}, \hat{P}]$. Calculer ensuite $[\hat{x}, \hat{p}]$ et enfin $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.
b] Montrer que l'opérateur $\hat{x}$, dans l'espace des fonctions d'onde de variable sans dimension p, est donné par $i\partial/\partial p$ (représentation impulsion). Montrer aussi que l'opérateur $\hat{p}$ est $-i\partial/\partial x$ en représentation position.
c] Evaluer le commutateur $[\hat{N}, \hat{a}]$ à l'aide de $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.
d] En déduire (en faisant agir $[\hat{N}, \hat{a}]$ sur un état $|\mathrm{n}>$) que l'état $\hat{a}|\mathrm{n}>$ est vecteur propre de $\hat{N}$ et donner la valeur propre associée. On rappelle que $\hat{N}|\mathrm{n}> = n|\mathrm{n}>$.
e] Déduire de la question précédente que

$$\hat{a}|\mathrm{n}> = \mu|\mathrm{n}-1>, \tag{4}$$

puis calculer μ (à une phase complexe près, que l'on prendra nulle dans la suite) en invoquant la normalisation du ket $|\mathrm{n}-1>$.
f] A partir des égalités de Eq.(2) et Eq.(4) [pour $n = 0$], trouver l'équation différentielle que vérifie la fonction d'onde du mode fondamental $\psi_0(x) = <\mathrm{x}|0>$. On utilisera pour cela les résultats du I-1)b]. Puis, résoudre cette équation sans chercher à normer la solution.
g] Même question pour $\psi_0(p) = <\mathrm{p}|0>$.

2) Les états quasi-classiques

a] Montrer que l'état quasi-classique $|\alpha>$ est état propre de l'opérateur $\hat{a}$, de valeur propre α.
b] Montrer que cet état $|\alpha>$ est normé.
c] Donner $\hat{H}$ en fonction de $\hat{N}$. Calculer, en fonction de $\hbar$, ω et α, la valeur moyenne de l'énergie dans un état $|\alpha>$.
d] Calculer la valeur moyenne de l'observable $\hat{X}$ (en l'exprimant en fonction de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$) toujours dans l'état $|\alpha>$.
e] Même question pour $\hat{P}$.
f] Calculer l'écart–type ΔX, uniquement en fonction de $\hbar$, m et ω, en utilisant le commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.
g] De même, calculer l'écart–type ΔP.
h] Que vaut le produit $\Delta X \Delta P$. Commenter ce résultat.
i] A partir de l'égalité Eq.(2) et de $\hat{a}|\alpha> = \alpha|\alpha>$, déterminer l'équation que vérifie la fonction d'onde $\psi_\alpha(x) = <\mathrm{x}|\alpha>$. Utiliser les résultats du I-1)b].
Puis, montrer que la solution de cette équation peut se mettre sous la forme gaussienne:

$$\psi_\alpha(x) = A\, e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2}$$

où A est une constante indépendante de x, que l'on ne cherchera pas à calculer. En revanche, préciser ce qu'est x_0.

j] Même question pour $\psi_\alpha(p) = < \mathrm{p}|\alpha >$.
k] On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, l'oscillateur est dans un état quasi-classique $|\psi(0) >= |\alpha_0 >$ avec $\alpha_0 = \rho e^{i\phi}$ (ρ et ϕ sont des nombres réels positifs).
Montrer qu'à un instant ultérieur t, l'oscillateur est dans un état quasi-classique que l'on peut écrire $|\psi(\mathrm{t}) >= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}/2}|\alpha(\mathrm{t}) >$. Donner $\alpha(\mathrm{t})$ en fonction de ρ, ϕ, ω et t.
l] A l'aide de I-2)d] et I-2)e], évaluer les valeurs moyennes $< \psi(\mathrm{t})|\hat{\mathrm{X}}|\psi(\mathrm{t}) >$ et $< \psi(\mathrm{t})|\hat{\mathrm{P}}|\psi(\mathrm{t}) >$. En rapprochant ce résultat de ceux des questions I-2)f] et I-2)g], donner l'ordre de grandeur typique des deux rapports

$$\Delta X/ < \psi(\mathrm{t})|\hat{\mathrm{X}}|\psi(\mathrm{t}) >, \quad \Delta P/ < \psi(\mathrm{t})|\hat{\mathrm{P}}|\psi(\mathrm{t}) >$$

et justifier l'appellation 'quasi-classique' pour $|\alpha(t)| \gg 1$.

II) ETUDE D'UNE SUPERPOSITION D'ÉTATS

1) Un état de type 'chat de Schrödinger'

Pendant l'intervalle de temps $[0, t_1]$, on introduit le potentiel $\hat{W}$:

$$\hat{H}_1 = \hat{H} + \hat{W}, \quad \hat{W} = \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2$$

avec $g \gg \omega$ et $\omega^{-1} \gg t_1$. On va donc prendre simplement $\hat{W}$ comme hamiltonien pendant l'intervalle $[0, t_1]$: $\hat{H}_1 \simeq \hat{W}$. Cela revient à négliger complètement l'effet de $\hat{H}$ sur l'évolution temporelle (qui n'est alors dictée que par $\hat{W}$). A l'instant $t = 0$, le système est dans un état quasi-classique $|\psi(0) >= |\alpha >$.

a] Montrer que les états $|\mathrm{n} >$ sont états propres de $\hat{W}$, de valeurs propres $\hbar g n^2$. On rappelle que $\hat{a}|\mathrm{n} > = \sqrt{n}|\mathrm{n}-1 >$ et $\hat{a}^\dagger|\mathrm{n} > = \sqrt{n+1}|\mathrm{n}+1 >$.
b] En déduire le développement sur la base $\{|\mathrm{n} >\}$ de l'état $|\psi(\mathrm{t}) >$ du système pour $t \in [0, t_1]$ (donc pour $\hat{H}_1 = \hat{W}$). On partira du développement dans Eq.(3) pour $t = 0$.
c] Comment se simplifie $|\psi(\mathrm{t}_1) >$ dans les deux cas particuliers: $t_1 = 2\pi/g$ et $t_1 = \pi/g$. Calculer au préalable $e^{-i2\pi n^2}$ et exprimer $e^{-i\pi n^2}$ en fonction de $(-1)^n$.
d] On choisit à présent $t_1 = \pi/2g$. Montrer que l'on peut écrire,

$$|\psi(\mathrm{t}_1) > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\pi/4}|\alpha > + e^{i\pi/4}| - \alpha >\right). \tag{5}$$

Pour cela, calculer $e^{-i\pi n^2/2}$ en discutant la parité de n, puis en déduire une expression de $e^{-i\pi n^2/2}$ en fonction de $(-1)^n$ et $e^{\pm i\pi/4}$.
e] Jusqu'à la fin de cette Section II-1), on suppose que α est imaginaire pur: $\alpha = i\rho$ (ρ réel positif). Décrire alors qualitativement l'état physique de Eq.(5). Pour cela, commenter les position et vitesse classiques dans l'état $|\alpha >$ puis $| - \alpha >$, sachant que $< \alpha|\hat{\mathrm{X}}|\alpha > = < -\alpha|\hat{\mathrm{X}}| - \alpha > = 0$, $< \alpha|\hat{\mathrm{P}}|\alpha > = +\sqrt{2m\hbar\omega}\rho$ et $< -\alpha|\hat{\mathrm{P}}| - \alpha > = -\sqrt{2m\hbar\omega}\rho$ dans ce cas $\alpha = i\rho$.
f] D'après la question précédente, dans le cas $|\alpha| \gg 1$, pourquoi peut-on considérer que cet

état de Eq.(5) est une réalisation concrète d'un état de type 'chat de Schrödinger' évoqué dans l'introduction générale ?
g] Etudions maintenant les propriétés de cette superposition dans Eq.(5) pour une situation *macroscopique* $|\alpha| \gg 1$.
Pour un système quantique préparé [1] dans l'état de Eq.(5), donner les distributions de probabilité non normalisées pour la position et l'impulsion ($|<\mathrm{x}|\psi(\mathrm{t}_1)>|^2$ et $|<\mathrm{p}|\psi(\mathrm{t}_1)>|^2$) sachant que $<\mathrm{p}|\pm\alpha> \propto e^{-\frac{1}{2}(p\mp\sqrt{2}\rho)^2}$ et $<\mathrm{x}|\pm\alpha> \propto e^{-\frac{1}{2}(x\mp i\sqrt{2}\rho)^2}$.
Dans le cas de $|<\mathrm{p}|\psi(\mathrm{t}_1)>|^2$, on donnera la distribution sous forme d'une somme de deux courbes gaussiennes.
h] Tracer l'allure des deux distributions de la question précédente en fonction de x et p. Spécifier les positions des maxima.
Pouvait-on s'attendre à ces positions de maxima ? S'appuyer sur II-1)e].

2) Fragilité de la superposition quantique

En réalité, il faut tenir compte du couplage de l'oscillateur, étudié jusqu'ici, avec son environnement extérieur afin d'estimer le temps pendant lequel la superposition quantique de Eq.(5) peut être différenciée d'un simple "mélange statistique", comme un ensemble de chats qui pour une moitié sont morts et l'autre vivants. Un tel mélange statistique est caractérisé par une loi de probabilité de mesure qui est simplement proportionnelle à la somme des distributions de probabilité associées aux différents états du mélange (les états mort et vivant).

L'oscillateur étant initialement dans un état quasi-classique $|\alpha_0>$ et l'environnement dans un état $|\chi_\mathrm{e}(0)>$, le vecteur d'état initial du système global [oscillateur + environnement] est le produit tensoriel des kets des deux sous-systèmes:

$$|\Phi(0)> = |\alpha_0> \otimes |\chi_\mathrm{e}(0)>.$$

Le couplage avec l'environnement est aussi responsable de l'amortissement de l'oscillateur. A un instant ultérieur, le vecteur d'état du système total devient,

$$|\Phi(\mathrm{t})> = |\alpha_1(\mathrm{t})> \otimes |\chi_\mathrm{e}(\mathrm{t})>,$$

avec $\alpha_1(t) = \alpha(t)e^{-\gamma t}$ où $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$ correspond à l'état de l'oscillateur en l'absence d'amortissement et γ (nombre réel positif) est le taux de cet amortissement.

a] Donner la valeur moyenne de l'énergie de l'oscillateur

$$E(t) = \hbar\omega(|\alpha_1(t)|^2 + 1/2)$$

en fonction de $\hbar$, ω, α_0 et γ. En déduire l'état de l'oscillateur après un temps $t \gg \gamma^{-1}$.
b] Pour $2\gamma t \ll 1$, quelle est la variation d'énergie de l'oscillateur $\Delta E = E(t) - E(0)$ au premier ordre ? En déduire, par conservation de l'énergie totale, l'énergie acquise par l'environnement (au

[1] L'idée de préparation d'un état de type 'chat', comme considéré ici, est tirée de: B. Yurke et D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 13.

bout d'un temps similaire).
c] On considère maintenant un état initial global de type 'chat de Schrödinger':

$$|\Phi(0)>=\frac{1}{\sqrt{2}}\bigg(e^{-i\pi/4}|\alpha_0>+e^{i\pi/4}|-\alpha_0>\bigg)\otimes|\chi_{\rm e}(0)>. \tag{6}$$

Soit, à un instant t ultérieur,

$$|\Phi({\rm t})>=\frac{1}{\sqrt{2}}\bigg(e^{-i\pi/4}|\alpha_1(t)>\otimes|\chi_{\rm e}^+({\rm t})>+e^{i\pi/4}|-\alpha_1(t)>\otimes|\chi_{\rm e}^-({\rm t})>\bigg), \tag{7}$$

$|\chi_{\rm e}^+({\rm t})>$ et $|\chi_{\rm e}^-({\rm t})>$ étant deux états normés *a priori* différents (mais non orthogonaux) de l'environnement.
La distinction entre 'superposition quantique' et 'mélange statistique' peut se faire à partir des résultats sur la mesure des positions de l'oscillateur. La densité de probabilité correspondant à l'état de Eq.(7) est, au temps t,

$$P(x)=\frac{1}{2}\bigg(|\psi_{\alpha_1}(x)|^2+|\psi_{-\alpha_1}(x)|^2\bigg)+\mathcal{R}e\bigg[i\,\psi^\star_{\alpha_1}(x)\,\psi_{-\alpha_1}(x)\,\eta\bigg], \tag{8}$$

en posant $\eta=<\chi_{\rm e}^+({\rm t})|\chi_{\rm e}^-({\rm t})>$ avec $0\leqslant\eta\leqslant 1$ (on suppose η réel).
Un critère observationnel pour différencier expérimentalement la superposition quantique d'un mélange statistique est $\eta\gtrsim 1/10$. Justifier qualitativement cette condition. Commenter les cas extrêmes $\eta=0$ et $\eta=1$.
d] Dans un modèle très simplifié, l'environnement est constitué d'un second oscillateur de mêmes masse et pulsation. Supposons alors que les états de ce nouvel oscillateur sont des états quasi-classiques: $|\chi_{\rm e}^\pm({\rm t})>=|\pm\beta({\rm t})>$.
A partir du développement dans Eq.(3), exprimer η en fonction de $\beta(t)$ uniquement. Comment s'écrit alors la condition de la question précédente sur $|\beta(t)|$?
e] Donner l'énergie moyenne $E'(t)$ pour l'oscillateur associé à l'environnement en fonction de $\hbar\omega$ et $\beta(t)$, en supposant que $E'(t)$ est de la même forme que $E(t)$ (*c.f.* II-2)a]).
f] L'oscillateur associé à l'environnement est initialement dans son état fondamental: donner son énergie moyenne initiale $E'(t=0)=E_{n'=0}$ et en déduire sa variation d'énergie $\Delta E'=E'(t)-E'(0)$.
g] A partir de quelle variation typique $\Delta E'$ la distinction entre superposition quantique et mélange statistique devient difficile, d'après II-2)d]. On donnera le résultat en unités de *quantum* d'énergie.
h] En identifiant l'énergie acquise par l'environnement (obtenue en II-2)b]) à la variation $\Delta E'$ (question II-2)f]), exprimer $|\beta(t)|$ en fonction de α_0 et γ.

Application Numérique: prenons pour l'oscillateur étudié un pendule suspendu sous vide – frottements minimisés, c'est-à-dire faible couplage avec l'environnement [= second oscillateur] – de constante de temps d'amortissement $(2\gamma)^{-1}$ égale à une année. Estimer le temps (en secondes) pendant lequel un état de type 'chat de Schrödinger' est observable, à partir de la condition obtenue en II-2)d] et de l'expression pour $|\beta(t)|$ de la question ci-dessus. On fera l'hypothèse réaliste $\alpha_0\simeq 5\;10^9$. Commenter la valeur ainsi trouvée.