

PROBLÈME DE MÉCANIQUE QUANTIQUE

Oscillateur harmonique perturbé

On considère une particule de masse m soumise au Hamiltonien à une dimension suivant:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

où p est l'opérateur impulsion et x l'opérateur position.

1. Donner l'expression des niveaux d'énergie E_n ainsi que leur dégénérescence.
2. Le commutateur $[a, a^\dagger]$ est égal à l'identité (a et a^\dagger sont définis dans les rappels). On définit l'opérateur $N = a^\dagger a$. Calculer les commutateurs $[N, a]$ et $[N, a^\dagger]$.
3. On ajoute maintenant à H_0 une perturbation anharmonique qui s'écrit: $W = \mu x^3$.
 - (a) Montrer que l'on a: $W = \mu x_0^3 [a^3 + a^{\dagger 3} + 3Na^\dagger + 3(N+1)a]$.
 - (b) Calculer $N|n\rangle$, $Na|n\rangle$, $Na^\dagger|n\rangle$, $a^3|n\rangle$ et $a^{\dagger 3}|n\rangle$, où $|n\rangle$ est l'état propre de H_0 associé à E_n . En déduire $\langle m|W|n\rangle$.
 - (c) Calculer la correction $\Delta^1 E_n$ de l'énergie E_n , au premier ordre.
 - (d) Calculer la correction $\Delta^2 E_n$ de l'énergie E_n , au second ordre. Dépend-t-elle de n ? Discuter le signe de $\Delta^2 E_n$.
 - (e) Calculer la correction $\Delta^1 |n\rangle$ d'un état d'énergie E_n , au premier ordre.
 - (f) Finalement, comment la perturbation W modifie-t-elle l'état et l'énergie de la particule?
 - (g) Calculer l'écart $E_{n+1} - E_n$ entre deux énergies successives. Comparer le résultat obtenu avec la valeur obtenue sans perturbation W .

Rappels

On définit les opérateurs d'annihilation et de création, respectivement a et a^\dagger , par:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}x + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}x - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}p.$$

Inversement, on a:

$$x = x_0(a + a^\dagger), \quad p = -ip_0(a - a^\dagger)$$

avec

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{m\omega_0\hbar}{2}}.$$

Les opérateurs a et a^\dagger vérifient:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$