Calculs élémentaires

I Motivation : applications

1. Géographie : Quatre parcelles voisines constituent un champ rectangulaire d'une commune rurale : la Mairie doit calculer la superficie totale de ce champ en se basant sur les largeurs et longueurs des parcelles remontées par leur propriétaire (voir Figure 1). L'objectif est de choisir la méthode de calcul la plus simple afin d'optimiser le programme informatique à appliquer systématiquement pour chaque champ sur le territoire communal. Quelle est cette méthode ? Justifier soigneusement la réponse.

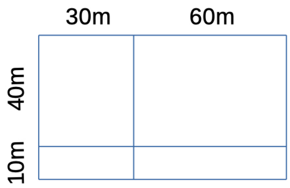

FIGURE 1 – Dimensions des 4 parcelles de terre voisines.

2. Généalogie : Un couple a deux enfants : un garçon et une fille (appelée génération $N = 1$). En supposant – pour une approche en moyenne – que ces deux enfants ont a leur tour chacun un garçon et une fille (génération $N = 2$), et ainsi de suite pour chacune des générations suivantes, combien y aura-t'il de filles et de garçons à la Nème génération ?
3. Micro-économie : Un capital de 20 000 € est placé sur un compte épargne et rapporte des intérêts selon un taux annuel de 2 %. Quel est le montant du compte après X années ?
4. Condition animale : En 2020, la population française était de $67,39$ millions de personnes. Or selon un sondage IFOP cette année-là, à peu près deux tiers des français sont favorables à une meilleure prise en compte du 'bien-être animal'. À combien de personnes cette estimation correspond-t-elle ?
5. Politique sociale : Selon les données publiées le 18 mars 2021 par l'Institut national de la statistique et des études économiques (INSEE), le taux de chômage s'élève à 8 % de la population active – qui compte $29,6$ millions de citoyens – en 2020 (en moyenne), soit $0,4$ point (de pourcentage) de moins qu'en 2019. Est-ce différent d'une diminution de $0,4$ % du taux de chômage ? Quel est donc le nombre de chômeurs en 2020 ?
6. Chimie : Concernant la manipulation de versement – une certaine quantité indiquée de la bouteille A vers la bouteille B – d'un liquide solvant (eau distillée) diluant des molécules d'acide chlorhydrique, comme décrit dans le schéma de gauche de la Figure 2, quelle est la concentration volumique des molécules d'acide chlorhydrique de la solution des bouteilles A et B après l'opération (par rapport à celle de A avant l'opération) ? Même question pour le schéma de droite.

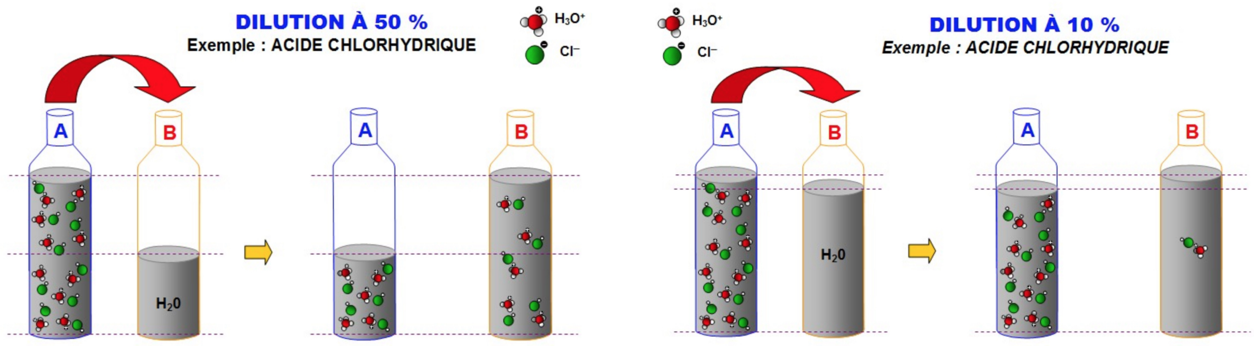

FIGURE 2 – 2 manipulations de solutions.

7. Macro-économie : L'équation à la base de la théorie quantitative de la monnaie exprime la conservation de la monnaie en circulation qui s'écrit dans une forme simplifiée,

$$M \times V = P_1 \times B_1 + P_2 \times B_2 \,, \tag{1}$$

où M est la variable de masse monétaire (quantité de monnaie produite), V la vitesse de circulation de la monnaie (soit le nombre moyen de fois qu'une unité de monnaie est utilisée par heure), P_i [avec $i = 1, 2$] le prix moyen par bien et B_i le nombre de biens vendus sur le marché par heure ($B_1 + B_2$ est relié au $P.I.B.$ à l'échelle nationale) pour des biens de catégorie i. Que vaut la quantité $M \times V - P_1 \times B_1$? Justifier explicitement la manipulation d'égalité effectuée pour arriver à la conclusion. Exprimer B_2 en fonction des autres quantités impliquées dans la Formule (1) [toujours en justifiant chaque étape]. Considérant un marché économique clos, par exemple sur une petite île où $M = 60\,000$ €, $V = 3/h$, $P_1 = 12$ € (consommation alimentaire), $P_2 = 50$ € (consommation vestimentaire) [1] et $B_1 = 6200/h$, déterminer la quantité B_2.

II Rappels de cours

II.A Principales propriétés des puissances

Soient A, B, x, y quatre nombres réels ($A, B, x, y \in \mathbb{R}$). On a alors les propriétés suivantes :

$$A^x \times A^y = A^{x+y} \,;\; (A^x)^y = A^{x\,y} \,;\; (A \times B)^y = A^y \times B^y.$$

II.B Principales propriétés des fractions

Soient A, B, C, D quatre nombres réels ($A, B, C, D \in \mathbb{R}$). On a alors les propriétés suivantes, pour $B \neq 0$ et $D \neq 0$:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B} \,;\; \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \,.$$

1. Négligeant ici par simplicité les autres types de dépense, disons pour une période suffisamment brève.

II.C Égalités combinant puissances et fractions

Soient A, B, C, D, x quatre nombres réels ($A, B, C, D, x \in \mathbb{R}$). On a alors les égalités suivantes, pour $B \neq 0$ et $C \neq 0$:

$$\frac{A}{B^x} = A \times B^{-x} \,;\; \frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{A}{B} \times \left(\frac{C}{D}\right)^{-1} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} \,;\; \left(\frac{A}{B}\right)^x = \frac{A^x}{B^x}\,.$$

III Terminologie

1. Dans un exemple de somme formelle, indiquez ce que l'on appelle un *terme*.
2. Dans un exemple de produit formel, indiquez ce que l'on appelle un *facteur*.
3. Donner un exemple d'expression formelle satisfaisant la propriété suivante : le second terme de l'expression est constitué de deux facteurs que l'on note A et B.
4. Donner un exemple d'expression formelle satisfaisant la propriété suivante : le second facteur est constitué d'une somme de deux termes x et a.
5. En utilisant tout ce vocabulaire, définir l'action de *développer* puis celle de *factoriser* une expression.

IV Développements

1. Développer (le plus possible) les expressions suivantes :

$$A = (3x-1)(-2x^2+3) \;;\quad B = -x(ax^2+b)(-x+2b) \;;\quad C = ax^2 - (2ax+1)(x+b)\;.$$

2. On rappelle l'identité remarquable suivante, $(m+p)^2 = m^2 + 2mp + p^2$. Développer les expressions suivantes :

$$A = (2a+t)^2 \;;\quad B = (2z-b)^2 \;;\quad C = (-ay^2+2)^2\;.$$

3. Développer les expressions suivantes en commentant, si possible, les méthodes utilisées ou les résultats obtenus (vis-à-vis des identités remarquables) :

$$A = (x-2a)(x+2a) \;;\quad B = -3(t^2-1)(t+1) \;;\quad C = -2(y-a^2)(y+a+a^2)\;.$$

V Factorisations

1. Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 3(x^2+1) - 2(x^2+1)^2(x-1) \;;\quad B = 3ax^2 + 9ax + 36a^2\;.$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 16a^2 - 25 \;;\quad B = 9a^2 - 1 \;;\quad C = (t+7)^2 - 25\;.$$

3. Factoriser (le plus possible) les expressions suivantes :

$$A = 4x^2 + 12x + 9 \ ; \quad B = -4bx + 2b^2x^2 + 2 \ ; \quad C = 6bx + 3b^2x^2 + 3 \ .$$

4. Factoriser (le plus possible) les expressions suivantes :

$$A = x^2 - 1 - (x+1)^2 \ ; \quad B = 4x^2 - 16 - 2(x-1)(2x+4) \ ; \quad C = (z^2-9)(2a+8) - (z+3)^2(a+4) \ .$$

5. Mettre les expressions qui suivent sous la forme $[f(t)]^2 + C$ où C ne dépend pas de t :

$$A = t^2 + 2bt + 3b^2 + 1 \ ; \quad B = t^2 - 3at + 1 \ .$$

VI Puissances

1. Mettre les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance, c'est à dire sous la forme $\pm x^n$.

$$A = 3^2(-3)^3(-3)^4 \ ; \quad B = \frac{x^3(-x)^3}{x^2} \ ; \quad C = \frac{\sqrt{z}}{z^{-3}} z^{-1} z^3 \ .$$

2. Développer et ordonner les termes de l'expression suivante par puissance décroissante de x :

$$\mathcal{A} = bx^2x^3 - 2x^3(3x^2 + x) + 3x^2(4x^2 + 2) - x^3x^3 \ .$$

3. Factoriser cette expression par un facteur de la forme $a^p x^m$, tel que p et m soient le plus grand possible :

$$\mathcal{B} = (a^2x^3)^3 + 2a^3x^2(x+1) + (ax)^3(2ax + 3) \ .$$

VII Fractions

1. Donner une approximation au pourcent près des expressions suivantes,

$$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \ ; \quad B = \frac{22}{20} \ ; \quad C = \frac{155}{156} \ .$$

2. Mettre les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction irréductible.

$$A = \frac{\frac{3}{5} + 1}{-\frac{3}{2} - 7} \ ; \quad B = \frac{4 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x^2}} \ ; \quad C = \frac{\frac{1}{x-1} + x + 3}{x - 3 + \frac{1}{x+4}} \ .$$

3. Simplifier les expressions suivantes.

$$\mathcal{A} = \frac{B}{\left(\frac{B}{1+\frac{C}{D}}\right)} \ ; \quad \mathcal{B} = \frac{\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x+y}{xy}\right)} \ ; \quad \mathcal{C} = \frac{\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)}{\left(\frac{1}{t} + 1\right)} \ .$$

⋆⋆⋆