$\boxed{\text{Cours sur l'intégrale de chemin}}$ (Grégory Moreau, LPT)

I) Introduction

A Notions quantiques

1. Evolution temporelle

"formalisme": variables classiques (p_x) $\longmapsto$ opérateurs quantiques ($-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} / \hat{P}_x$)

Point de vue de Schrödinger: $\boxed{\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle}$ (1) (éq. de Schr.)

ex Particule: $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{X})$

Solution: $|\psi(t)\rangle \overset{(2)}{=} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}}_{\hat{U}(t,t_0)}|\psi(t_0)\rangle$ $\{t \geq t_0\}$

$\hat{U}(t,t_0)$: "opérateur d'évolution temporelle" "$\hat{U}_0(t)$"

car $\boxed{\partial_t e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \partial_t\left(1 - \frac{i}{\hbar}Ht + \frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{\hbar^2}\right)H^2t^2 + \dots\right) = -\frac{i}{\hbar}H - \frac{1}{\hbar^2}H^2t + \dots = -\frac{i}{\hbar}H\left(1 - \frac{i}{\hbar}Ht + \dots\right) = -\frac{i}{\hbar}He^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}$

$\underbrace{\langle\psi_0|\hat{U}_0^\dagger(t)}_{\langle\psi(t)|}\overbrace{\hat{O}}^{\hat{O}(t)}\underbrace{\hat{U}_0(t)|\psi_0\rangle}_{|\psi(t)\rangle}$ $\longrightarrow$ Point de vue de Heisenberg: $\boxed{\hat{H}\hat{U}_0(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_0(t)}$ (3) $[(2)\to(1)]$ puisque $|\psi(t_0)\rangle \neq 0$ (état physique normé)

Explicite: $\tilde{U}_0(t) \overset{(4)}{=} \underbrace{\theta(t-t_0)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right\}}_{\text{"fonction de Green"}}$ avec $\theta(t-t_0)\begin{cases} =1, & t-t_0 \geq 0 \\ =0, & t-t_0 < 0\end{cases}$ "θ Heaviside"

Solution de: $\boxed{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\tilde{U}_0(t) = i\hbar\,\delta(t-t_0)}$ $[(4)\Rightarrow(3)]$ (distributions)

$i\hbar\,\theta(t-t_0)\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_0(t) + i\hbar\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\theta(t-t_0)}^{\delta(t-t_0)}\hat{U}_0(t) - \hat{H}\,\theta(t-t_0)\hat{U}_0(t) = i\hbar\,\delta(t-t_0)\underbrace{\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\overbrace{(t-t_0)}^{=0}}\right)}_{\hat{U}_0(t)}$ $\Rightarrow \begin{cases}(3), & t \geq t_0 \\ 0=0, & t < t_0\end{cases}$ ✓

2. Espace des moments (1D)

$\langle x|\overbrace{\hat{P}_x}^{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|p_x\rangle}|p_x\rangle \hat{=} \overbrace{\langle x|p_x|p_x\rangle}^{p_x\langle x|p_x\rangle} \Rightarrow \langle x|p_x\rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}p_x x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ ---> val. propres

convention pour T.F. (état non normalisé ⇒ superposition quant.)

$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \langle x|\underbrace{\int dp_x|p_x\rangle\langle p_x|}_{=1}\psi\rangle = \int dp_x\langle x|p_x\rangle\,\psi(p_x) \overset{p_x=\hbar k}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{ikx}\underbrace{\tilde{\psi}(k)}_{\sqrt{\hbar}\,\psi(\hbar k)} \equiv \text{T.F.}[\tilde{\psi}(k)]$

$|\psi(t)\rangle$; "fonction d'onde" ; B.O.N. ; "relation de fermeture"

$\tilde{\psi}(k) = \text{T.F.}^{-1}[\psi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\, e^{-ikx}\psi(x)$, avec $\text{T.F.}^{-1}[\sqrt{2\pi}\,\delta(x)] = 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\, e^{-ikx}\sqrt{2\pi}\,\delta(x)$

"transformées de Fourier" ⇓ (principe d'incertitude d'Heisenberg)

$\Rightarrow \boxed{\Delta\hat{X}.\Delta\hat{P}_x \geq \frac{\hbar}{2}} = \frac{1}{2}|\langle\underbrace{[\hat{X},\hat{P}_x]}_{=i\hbar}\rangle|$

où $\Delta\hat{O} \equiv \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}$ "écart type"

ex $\langle\hat{P}_x\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\hat{P}_x\underbrace{\int dp_x|p_x\rangle\langle p_x|}_{1}\psi\rangle = \int dp_x\, p_x|\psi(p_x)|^2$

3. Etats propres de position

Motivation: construire les états propres (de position) de l'observable de position à tout instant.
⇑ Exercice I 1

Considérons l'état quantique : $|x\,t\rangle \hat{=} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\underbrace{|x\rangle}_{\text{état propre à } t_0 \text{ de } \hat{X}(t_0)\,/\,\text{ex de } \hat{X}(0)\equiv\hat{X}}$ $\neq$ $|x(t)\rangle = \overbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}}^{\hat{U}_0(t)}\overbrace{|x(t_0)\rangle}^{|x\rangle(!)}$: solution de l'équation de Schrödinger

(sans dépendance temporelle) (val. pr. x)

$$\underbrace{\hat{X}(t)|x\,t\rangle}_{\text{idem}} = \overbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}}^{U_0^+(t)}\overbrace{\hat{X}_0}^{\hat{X}(t_0)}\overbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}}^{U_0(t)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|x\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\hat{X}_0|x\rangle = x\,|x\,t\rangle$$

"si même t_0 ($\Rightarrow t \geq t_0$)"

"Relation de Baker-Campbell-Hausdorff pour $[\hat{H},\hat{H}]=0$" $\Big]\; e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)+\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} = \mathbb{1}$

$\hat{X}_0|x\rangle = x|x\rangle$; valeur propre constante !

$\Rightarrow$ $|x\,t\rangle$ état propre de $\hat{X}(t)$, $\forall t$! (maths) "via l'état" t_0
$|x(t)\rangle$ état physique $\forall t$ & état propre à $t = t_0$

$\hookrightarrow$ à $t = t_0$, $\hat{X}(t_0)|x\,t_0\rangle = x|x\,t_0\rangle \Leftrightarrow \hat{X}(t_0)|x\rangle = x|x\rangle$ ✓

Propriétés: $\boxed{\langle x\,t|x'\,t\rangle \hat{=} \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|x'\rangle = \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')}$ selon l'orthonormalisation pour une base continue
(∃ au moins 1 B.O.N. de vecteurs propres d'un op. hermitique) à $t = t_0$

$$\boxed{\int dx\,|x\,t\rangle\langle x\,t| \hat{=} \int dx\; e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\underbrace{|x\rangle\langle x|}_{=\mathbb{1}\ (\text{B.O.N.})}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} = \mathbb{1}}$$ — pour un temps "t" donné

"intégration sur valeurs propres !"

4. Propagateurs de Feynman

$$\boxed{\langle \underbrace{x\,t}_{\text{final}}|\underbrace{x'\,t'}_{\text{initial}}\rangle \hat{=} \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t_0)}|x'\rangle \overset{1.(2)}{\hat{=}} \langle x|\underbrace{\hat{U}(t,t')|x'\rangle}_{|x(t)\rangle} \hat{=} K(t,x;t',x')}$$

phys. ; "même origine t_0"

formalisme quantique : projection au même temps $t \geq t'$ ✓

$\Rightarrow$ probabilité d'être en x à t étant en x' au temps t' [$t-t_0$: $m\hat{X}$] (pour le système) : amplitude

$$1.(2) \Rightarrow \psi(x,t) \hat{=} \langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|\hat{U}(t,t')|\psi(t')\rangle = \langle x|\hat{U}(t,t')\overbrace{\int dx'\,|x'\rangle\langle x'|}^{\mathbb{1}}\psi(t')\rangle \hat{=} \int dx'\,K(t,x;t',x')\,\psi(x',t')$$

état propre @ t (sens dans le formalisme : fonction d'onde) ; pris @

$$\parallel\!\!\parallel$$
$$\int dx'\,\langle x\,t|x'\,t'\rangle\langle x'|\psi(t')\rangle$$

somme continue des amplitudes de probabilité qui contribuent ✓

Un cas simple ... $\psi(x,t) = \int dx'\,K(t,x;t',x')\left[\frac{\delta(x_0-x')}{\mathcal{N}}\psi(x',t')\right]$. "$\psi(x',t')$ pris en x_0 ($[\mathcal{N}] = L^{-1}$)"

$$= \frac{K(t,x;t',x_0)\,\psi(x_0,t')}{\mathcal{N}}$$ "transition de fonctions d'onde"

soit : $\langle x|\psi(t)\rangle = \langle x\,t|x_0\,t'\rangle\langle x_0|\psi(t')\rangle \left(\frac{1}{\mathcal{N}}\right)$
probabilités : ✓

B Fonctionnelle (fin XIX$^{\text{ème}}$ siècle)

Définition : Application d'un espace vectoriel (de fonctions) vers son corps de scalaires (nombres réels multipliant les vecteurs). "loi externe"

Exemple pertinent :

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{R}}}{S[x]} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \underbrace{L^{1D}(x,\dot x)}_{S(x(t))} \quad \text{avec} \quad L^{1D}(x,\dot x) = \frac{1}{2} m \dot x^2(t) - V(x(t))$$

"dépend de la trajectoire" ; $S(x(t))$ "écriture générique" ; fonction de fonctions

espace vectoriel ; variable réelle ! "dépend de la valeur de la variable" ↳ en un point particulier (explicite)

Dérivation fonctionnelle :

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \overset{(1)}{=} \int dt' \frac{\delta S(x(t'))}{\delta x(t)} \quad \text{où} \quad \boxed{\frac{\delta S(x(t'))}{\delta x(t)} \triangleq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{S(x(t') + \epsilon\,\delta(t'-t)) - S(x(t'))}{\epsilon}}$$

Conséquence : cas $S(x(t')) = x(t')$

$$\frac{\delta x(t')}{\delta x(t)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\cancel{x(t')} + \cancel{\epsilon}\,\delta(t'-t) - \cancel{x(t')}}{\cancel{\epsilon}} = \delta(t'-t)$$

également pour $\frac{\delta S(x(t'))}{\delta x(t)}$

Propriétés : "linéarité"

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\left(S_1[x] + S_2[x]\right) = \frac{\delta S_1[x]}{\delta x(t)} + \frac{\delta S_2[x]}{\delta x(t)},$$

"associativité"

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\left(S_1[x]\, S_2[x]\right) = \frac{\delta S_1[x]}{\delta x(t)} S_2[x] + S_1[x] \frac{\delta S_2[x]}{\delta x(t)}$$

Expansion de Taylor :

$$S[x] = \int dt\, S(x(t))\Big|_{x(t)=0} + \frac{1}{1!}\int dt_2\, x(t_2) \underbrace{\frac{\delta S[x]}{\delta x(t_2)}\Big|_{x(t)=0}}_{\overset{(1)}{=} \int dt_1 \frac{\delta S(x(t_1))}{\delta x(t_2)}\big|_{x(t)=0}} + \frac{1}{2!}\int dt_2 \int dt_3\, x(t_2)\, x(t_3) \underbrace{\frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_2)\,\delta x(t_3)}\Big|_{x(t)=0}}_{\overset{(1)}{=} \int dt_1 \frac{\delta^2 S(x(t_1))}{\delta x(t_2)\,\delta x(t_3)}\big|_{x(t)=0}} + \dots$$

Analogie avec une fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0} (x - \underset{\substack{\shortparallel\\0}}{x_0})^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

↳ également pour $S(x(t))$

II Reformulation de la mécanique quantique

A Amplitude de probabilité de transition

1. Ordonner les opérateurs

Classique $\longmapsto$ Quantique

$H(x,p) \longmapsto \hat{H}(\hat{x},\hat{p})$: problème de l'ordre dans les produits d'opérateurs non-commutants

Ordre normal :
$$\begin{cases} px,\ xp \longmapsto \hat{p}\hat{x} \\ x^2p,\ xpx \longmapsto \hat{p}\hat{x}^2 \end{cases}$$

Ordre de Weyl :
$$\begin{cases} xp,\ px \longmapsto \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}) \\ x^2p,\ xpx \longmapsto \frac{1}{3}(\hat{p}\hat{x}^2+\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{x}^2\hat{p}) \end{cases}$$
"symétrisation satisfaisante en général"

Ordre normal

$$\langle x'|\hat{H}_{ON}|x\rangle = \langle x'|\overbrace{\int dp\,|p\rangle\langle p|}^{\mathbb{1}}\hat{H}_{ON}|x\rangle = \int dp\,\langle x'|p\rangle\langle p|x\rangle\, H(x,p)$$

valeurs propres

car ex $\hat{x}^2|x\rangle = \hat{x}\,x|x\rangle = x^2|x\rangle$

ex $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$

↳ $\langle p|\hat{p} = \langle p|p$ (*)

ex $\langle p|\hat{p}\hat{x}^2|x\rangle = px^2\langle p|x\rangle$

ex $\langle p|\hat{p}\hat{x}^2+\alpha\hat{x}|x\rangle = \langle p|\hat{p}\hat{x}^2|x\rangle + \langle p|\alpha\hat{x}|x\rangle$
$= px^2\langle p|x\rangle + \alpha x\langle p|x\rangle$
$= (px^2+\alpha x)\langle p|x\rangle$

$$\boxed{\langle x'|\hat{H}_{ON}|x\rangle = \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p(x'-x)\right\}H(x,p)}$$

I A 2.

Ordre de Weyl

Remarquons que,
$$(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})^N = \sum_{\substack{n+m=N\\(n,m\geq 0)}}\frac{N!}{n!\,m!}\alpha^n\beta^m(\hat{x}^n\hat{p}^m)_{OW}$$

cas $N=0$: $\mathbb{1}=\mathbb{1}$

cas $N=1$: $\alpha\hat{x}+\beta\hat{p} = \underbrace{\frac{1!}{0!\,1!}\alpha^0\beta^1\hat{x}^0\hat{p}^1}_{(n=0,\,m=1)} + \underbrace{\frac{1!}{1!\,0!}\alpha^1\beta^0\hat{x}^1\hat{p}^0}_{(n=1,\,m=0)}$

cas $N=2$: $\underbrace{(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})}_{\alpha^2\hat{x}^2+\alpha\beta\hat{x}\hat{p}+\alpha\beta\hat{p}\hat{x}+\beta^2\hat{p}^2} = \frac{2!}{0!\,2!}\beta^2\hat{p}^2 + \frac{2!}{2!\,0!}\alpha^2\hat{x}^2 + \frac{2!}{1!\,1!}\alpha\beta\underbrace{(\hat{x}\hat{p})_{OW}}_{\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})}$

↳ $e^{\alpha\hat{x}+\beta\hat{p}}$ "contient" toute puissance $(\hat{x}^n\hat{p}^m)_{OW}$: $\displaystyle\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})^N}{N!}$

Ré-exprimons cet opérateur exponentiel grâce à la formule de Baker–Campbell–Hausdorff [BCH],

$$e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}\, e^{\beta\hat{p}}\, e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}} = e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}\, e^{\beta\hat{p}+\alpha\frac{\hat{x}}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{[\beta\hat{p},\alpha\frac{\hat{x}}{2}]}_{=-\frac{\alpha\beta}{2}i\hbar\mathbb{1}}+\underbrace{c.l.([\hat{x}|\hat{p},\underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{\propto\mathbb{1}}])}_{=0}+\underbrace{c.l.([\hat{x}|\hat{p},\underbrace{[\hat{x}|\hat{p},[\hat{x},\hat{p}]]}_{=0}])}_{=0}+\dots} = e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}\, e^{\beta\hat{p}+\alpha\frac{\hat{x}}{2}-\alpha\beta\frac{i\hbar}{4}}$$

$$= \exp\Big\{\alpha\frac{\hat{x}}{2}+\beta\hat{p}+\alpha\frac{\hat{x}}{2}-\cancel{\alpha\beta\frac{i\hbar}{4}}+\frac{1}{2}\overbrace{[\alpha\frac{\hat{x}}{2},\beta\hat{p}+\cancel{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}-\cancel{\alpha\beta\frac{i\hbar}{4}}]}^{=\alpha\beta\frac{i\hbar}{2}}\Big\} = \boxed{e^{\alpha\hat{x}+\beta\hat{p}}}$$

Ce résultat permet de calculer :

$$\boxed{\langle x'|e^{\alpha\hat{x}+\beta\hat{p}}|x\rangle} = \langle x'|e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}\Big(\underbrace{\int dp\,|p\rangle_{(x)}\langle p|}_{=\mathbb{1}}\Big)e^{\beta\hat{p}}\,e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}|x\rangle = \int dp\,\underbrace{\langle x'|e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}|p\rangle}_{e^{\alpha\frac{x'}{2}}\langle x'|p\rangle}\underbrace{\langle p|e^{\beta\hat{p}}\,e^{\alpha\frac{\hat{x}}{2}}|x\rangle}_{e^{\beta p}e^{\alpha\frac{x}{2}}\langle p|x\rangle}$$

"prescription de point moyen". "voir exemples page C.4" I A 2.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{= \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\,\underbrace{\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}p(x'-x)\Big\}}_{\text{val. propres}}\,\underbrace{\exp\Big\{\alpha\overline{\frac{x+x'}{2}}+\beta p\Big\}}_{\text{val. propres}}}$$

$$\boxed{\langle x'|\hat{H}_{ow}|x\rangle = \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\,\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}p(x'-x)\Big\}\,H\Big(\frac{x+x'}{2},p\Big)}$$

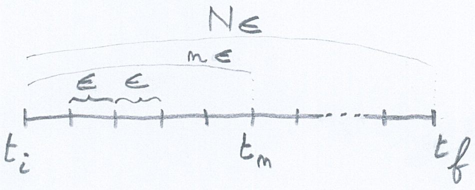
"valeurs propres"

$\hat{H}_{ow}(\hat{x},\hat{p})$ — pas d'ordonnancement $\Rightarrow$ forme classique (C.4)

puisque $\hat{H}_{ow}$ peut inclure de manière générique, dans ses termes, toute puissance $(\hat{x}^n\,\hat{p}^m)_{ow}$

(généralisation : puissances négatives)

B Discrétisation du temps



Pour la transition $\langle x_f t_f|x_i t_i\rangle$:
(calcul d'amplitude de probabilité)

$$\frac{t_f-t_i}{N} = \epsilon\,(>0) \iff \left.\begin{array}{l} t_f = t_i+N\epsilon = t_N \\ t_i+m\epsilon = t_m \\ t_i = t_i+0\epsilon = t_0 \end{array}\right\}$$

(m entier : $0\le m\le N$)

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \lim_{\substack{\epsilon\to 0 \\ (N\to\infty)}} \langle \underset{\substack{||| \\ x_N}}{x_f} \underset{\substack{||| \\ t_N}}{t_f} | \overbrace{\int dx_{N-1} | x_{N-1} t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} t_{N-1} |}^{=\mathbb{1}} \cdots \overbrace{\int dx_m | x_m t_m \rangle \langle x_m t_m |}^{\mathbb{1}} \cdots \overbrace{\int dx_1 | x_1 t_1 \rangle \langle x_1 t_1 |}^{\mathbb{1}} \underset{\substack{||| \\ x_0}}{x_i} \underset{\substack{||| \\ t_0}}{t_i} \rangle$$

Ⓘ$\boxed{A}$3.

"Revenir au temps continu"

"x_1 et $x_{m\neq 1}$ différentes variables sur un même intervalle de valeurs"

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int dx_{N-1} dx_{N-2} \cdots dx_2 dx_1 \langle x_N t_N | x_{N-1} t_{N-1} \rangle \cdots \underbrace{\langle x_m t_m | x_{m-1} t_{m-1} \rangle}_{A_m} \cdots \langle x_1 t_1 | x_0 t_0 \rangle$$

Ⓘ$\boxed{A}$3. "autre"

"état propre de $\hat{X}(t_0)$"

$$\text{Or } A_m \hat{=} \langle x_m | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_m - t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_{m-1}-t_0)} | x_{m-1} \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Formule BCH}}}{=} \langle x_m | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_m - t_0 - [t_{m-1}-t_0])} | x_{m-1} \rangle = \langle x_m | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon} | x_{m-1} \rangle$$

temps fixé ✓

"car $\exp\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon\}$ contient des puissances supérieures à $(\hat{X}^m \hat{P}^m)_{OW}$ d'après la page C.4"

C.5

forme classique

"valeurs propres"

$$A_m = \int \frac{dp_m}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} p_m (x_m - x_{m-1})\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H\left(\frac{x_m + x_{m-1}}{2}, p_m\right)\right\}$$

avec le choix de variable d'intégration "p_m" que l'on peut, de même, associer à "t_m" via un état propre "$|p_m t_m\rangle$".

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\left[p_N(x_N - x_{N-1}) - \epsilon H\left(\frac{x_N + x_{N-1}}{2}, p_N\right)\right]} \cdots \int \frac{dp_m}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\left[p_m(x_m - x_{m-1}) - \epsilon H\left(\frac{x_m + x_{m-1}}{2}, p_m\right)\right]}$$

$$\cdots \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\left[p_1(x_1 - x_0) - \epsilon H\left(\frac{x_1 + x_0}{2}, p_1\right)\right]}$$

"forme brute et mathématiquement explicite de l'intégrale de chemin (x_0, x_N) dans l'espace des phases"

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp\left\{ \sum_{m=1}^{N} \frac{i}{\hbar} \left[p_m (x_m - x_{m-1}) - \epsilon H\left(\frac{x_m + x_{m-1}}{2}, p_m\right) \right] \right\}$$

$$\boxed{\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \lim_{N\to\infty} \int dx_1 \ldots dx_{N-1} \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \ldots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} \exp\left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{m=1}^{N} \left[p_m \frac{x_m - x_{m-1}}{\epsilon} - H\left(\frac{x_m + x_{m-1}}{2}, p_m\right)\right]\right.}}$$

$$\lim_{t_m \to t_{m-1}} \frac{x(t_m) - x(t_{m-1})}{t_m - t_{m-1}} = \dot{x}(t_m) \Rightarrow \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i \atop t_0}^{t_f} dt \left(p(t)\, \dot{x}(t) - H(x,p) \right) \right\}$$

forme classique

"(toujours) valeurs propres"

3. Cas d'un système ponctuel (1D)

Mécanique classique

$$L(x(t), \dot{x}(t)) \overset{\text{TD2}}{=} \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)}^{p^2/2m}}_{T} - V(x(t)) \Rightarrow \pi \hat{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} = \overbrace{m\dot{x}(t)}^{p(t)}$$

"moment conjugué"

$$H(x(t), \dot{x}(t)) \hat{=} \pi\, \dot{x}(t) - L(x, \dot{x}(t)) = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)}^{p^2/2m}}_{T} + V(x(t))$$

"classe d'Hamiltoniens"

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \lim_{N\to\infty} \int dx_1 \ldots dx_{N-1} \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \ldots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \underbrace{\int dt\, L(x(t), \dot{x}(t))}_{S[x]} \right\}$$

"valeurs propres"

$S[x] \longrightarrow$ Fonctionnelle d'action de forme classique

Intégrons sur les moments, de manière générique, comme cela est possible ici,

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \lim_{N\to\infty \atop (\epsilon\to 0)} \int dx_1 \ldots dx_{N-1} \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \ldots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \underbrace{\int dt \left[p(t)\,\dot{x}(t) \overbrace{- \frac{p^2(t)}{2m} - V(x(t))}^{-H(x,p)\ \triangle!} \right]}_{\epsilon \sum_{m=1}^{N} \left[\underbrace{p_m \frac{x_m - x_{m-1}}{\epsilon} - \frac{p_m^2}{2m}}_{} - V\left(\frac{x_m + x_{m-1}}{2}\right) \right]} \right\}$$

$$-\frac{1}{2m}\left(p_m - m\frac{(x_m - x_{m-1})}{\epsilon}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(m\frac{(x_m - x_{m-1})}{\epsilon}\right)^2$$

OR, $\displaystyle\int \frac{dp_m}{2\pi\hbar}\, e^{\underbrace{-\frac{i\epsilon}{2m\hbar}}_{-\frac{i}{2\sigma^2}}\left(p_m - \frac{m}{\epsilon}(x_m - x_{m-1})\right)^2} = \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{i}} = \frac{\sqrt{-i}}{\sqrt{2\pi}\,\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar}{\epsilon}} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{1/2}$, d'où (N fois),

généralisation d'intégrale de gaussienne imaginaire (TD3)

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\epsilon\to 0)}} \underbrace{\int dx_1 \ldots dx_{N-1}}_{\mathcal{D}x} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{N/2} \underbrace{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\epsilon\sum_{m=1}^{N}\left[-V\left(\frac{x_m + x_{m-1}}{2}\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{x_m - x_{m-1}}{\epsilon}\right)^2\right]\right\}}_{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\,\left[-V(x(t)) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)\right] \equiv \frac{i}{\hbar}S[x]}$$

$\lim \longrightarrow \mathcal{E} \longleftarrow \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{N/2}$

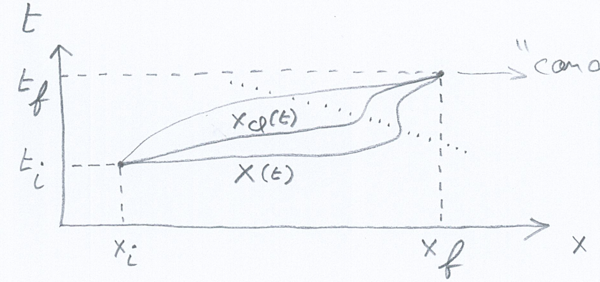
(forme classique de L ; x toujours valeur propre)

{en fait, vrai ∀ H, L !}

$$\boxed{\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \mathcal{E}\int \mathcal{D}x\; e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}}$$

"…chemin"

"Intégrale de…"



"conditions initiales/finales données"

B Discussion

1. Intérêts

* Aspect calculatoire : l'expression de l'amplitude impliquant l'intégrale de chemin ne fait pas intervenir d'opérateurs quantiques.

* Aspect conceptuel : compréhension du rôle de "l'action" en Mécanique Quantique (la mécanique analytique comme vision globale des physiques classique & quantique).

Physique Classique : Minimisation de l'action $\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = 0$ $\Rightarrow$ Détermination du chemin unique $x_{cl}(t)$

éq. Euler-Lagrange

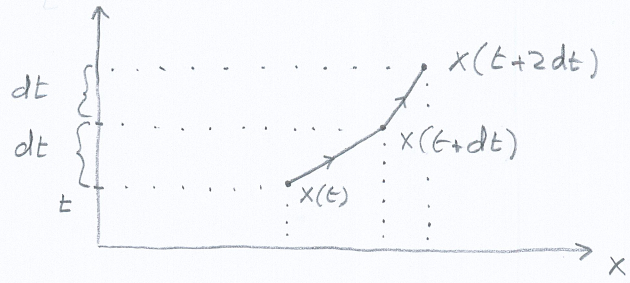
Physique quantique : $\mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}$ $\equiv$ Amplitude de probabilité d'emprunter un chemin $x(t)$

nouveau !

2. Interprétation

$$\underbrace{\mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}}_{} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x(t),\dot{x}(t),t)}\,\mathcal{D}x$$

"amplitude de proba. de passer de $x(t_i)$ à $x(t_f)$"



$$\sim \dots \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}L(t)dt}}\,\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}L(t+dt)dt}}\dots\left(\mathcal{D}x^{1/N}\right)^N$$

... "amplitude de probabilité de passer de $x(t)$ à $x(t+dt)$" $\times$ "amplitude de probabilité de passer de $x(t+dt)$ à $x(t+2dt)$" ...

$$\hookrightarrow \langle x_f t_f | x_i t_i\rangle \sim \dots + \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}\mathcal{D}x}_{} + e^{\frac{i}{\hbar}S[x+dx]}\mathcal{D}x + \dots$$

"amplitude de probabilité d'emprunter le chemin $x(t)$"

} SOMME DES AMPLITUDES DE PROBABILITÉ ✓

3. Limite classique

Formalisme quantique basé sur la mécanique classique

- forme du Hamiltonien classique en M.Q.
- rôle du Lagrangien classique en M.Q.
- $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle \equiv$ valeur classique de O

Limite classique de la mécanique quantique | $S \gg \hbar \; (\to 0)$

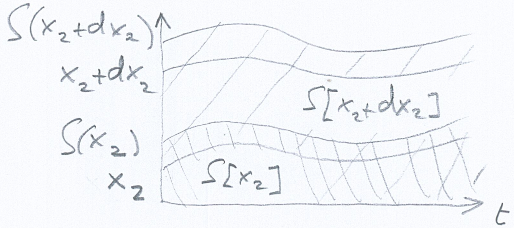
Pour un chemin $|x_2(t)| = |x_{cl}(t) + \Delta x_{cl}(t)| \gg |x_{cl}(t)|$,

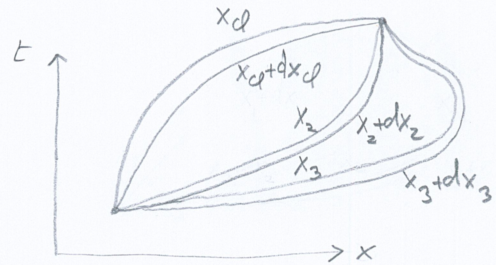
$$\left|x_2\left(1+\frac{dx_2}{x_2}\right)\right| = |x_2 + dx_2|$$

"même si faible ... ... important"

$$S[x_2] \neq S[x_2+dx_2]$$

"significativement"





(argumentaire heuristique générique)

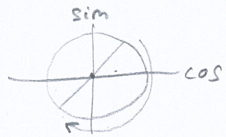
$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \sim \ldots + \underbrace{\mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]} + \mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}+dx_{cl}]}}_{\sim 2\mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}} + \ldots + \underbrace{\mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_2]} + \mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_2+dx_2]}}_{} + \ldots + \underbrace{\mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_3]} + \mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_3+dx_3]}}_{} + \ldots$$

$$\sim 2\,\mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]} \neq$$

car, $S[x_{cl}(1+\underbrace{\frac{dx_{cl}}{x_{cl}}}_{\text{faible}})] \sim S[x_{cl}]$

pour, $\dfrac{\delta S[x_{cl}]}{\delta x(t)} = 0$ "stationnarité"

phénomène de compensation des phases : fluctuations rapides



VRai car, $\dfrac{S[x_2(1+dx_2)]}{\hbar} >> 1$ en particulier

Donc les chemins proches du chemin classique contribuent de manière dominante à l'amplitude car ils ne subissent pas un phénomène d'annulation entre eux (dans la limite classique) ~ interférences destructives.

Analogie avec la théorie de la décohérence en M.Q. : au niveau macroscopique, les nombreuses interactions (sub)atomiques, entre le système et son environnement, font tendre vers zéro la probabilité d'avoir des états quantiques superposés : limite classique (interactions ~ mesures).

Généralisation à 3D : $\langle \vec{R}_f t_f | \vec{R}_i t_i \rangle = \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \langle y_f t_f | y_i t_i \rangle \langle z_f t_f | z_i t_i \rangle$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\epsilon\to 0)}} \int \mathcal{D}x\, \mathcal{D}y\, \mathcal{D}z \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon}\right)^{\frac{3}{2}N} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \underbrace{\int dt \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{R}}^2(t) - V(\vec{R}(t))\right]}_{S[x,y,z]} \right\}$$

ϵ_{3D}

$\dot{\vec{R}}^2 = \|\dot{\vec{R}}\|^2$

$V(\vec{R}(t))$ "généralisation" $V(x(t)) + V(y(t)) + V(z(t))$

Remarque (C.8) : compensation de phases induit des faibles amplitudes pour transitions telles que $|x_n| >> |x_{n-1}|$

C Dimensions & Normalisations

1. Dimensions

B.O.N.

$$(C.2)\quad \int dx\, |xt\rangle\langle xt| = \mathbb{1} \Rightarrow [|xt\rangle] = \left[\frac{1}{x}\right]^{1/2} = L^{-1/2} \left(= [|x\rangle] \right)$$

"différent pour un spectre discret"

$$\int dp\, |p\rangle\langle p| = \mathbb{1} \Rightarrow [|p\rangle] = \left[\frac{1}{p}\right]^{1/2}$$

DONC $[\langle x|p\rangle] = \left[\frac{1}{px}\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{\hbar}\right]^{1/2}$ ce qui est compatible avec l'expression de $\langle x|p_x\rangle$ en I A 2.

De même, on vérifie l'homogénéité de l'expression de l'intégrale de chemin (C.8),

$$[\mathcal{E}\,\mathcal{D}x] = \underbrace{[dx_1 \cdots dx_{N-1}]\frac{L}{L}}_{L^N \cdot L^{-1}} \cdot \left(\frac{M}{\underbrace{[E]T}_{\hbar}.\underbrace{T}_{\epsilon}}\right)^{N/2} = \frac{1}{L}\cdot\left(\underbrace{\frac{ML^2}{[E]T^2}}_{=1}\right)^{N/2} = \frac{1}{L} = \left(L^{-1/2}\right)^2 = [\langle xt|xt\rangle] \quad \checkmark$$

2. Normalisations

$$(C.2)\quad \langle xt|x't\rangle = \delta(x'-x)$$

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x'-x)$$

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p'-p)$$

"conditions d'orthonormalisation" <= Formalisme proba. (opérateurs hermitiques)

(dim.) $\sqrt{\hbar}$ $\quad 1/\sqrt{2\pi}$

T.F. $\left(\tilde{\varphi}(k)\right) = \varphi(x)$ motive... (C.1)

$$\langle x|p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}p_x x}$$

C.6 $\Rightarrow$ Normalisation correcte pour $\langle x_f t_f | x_i t_i\rangle$ (en C.8)

(voir TD 6 : discussion sur la probabilité)

(II) Interactions fondamentales & graphes de Feynman

A Introduction

Motivation : application de l'intégrale de chemin au calcul d'amplitude de probabilité pour des réactions entre particules élémentaires (Physique des hautes énergies : $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} \gtrsim \hbar$)

Réactions : – interaction entre une particule et un champ (cas de la diffusion de Rutherford)
– diffusion entre particules élémentaires [mention du cas relativiste]

Méthode : théorie des perturbations

B Interaction d'une particule avec un champ (associé à $V(x)$) $\to$ 1D

"une définition de l'exponentielle imaginaire"

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \underset{(C.8)}{\simeq} \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\epsilon\to 0)}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon}\right)^{N/2} \int dx_1 \ldots dx_{N-1}\; \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)\right\} \left[1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\, V(x(t)) - \frac{1}{2\hbar^2}\left(\int dt\, V(x(t))\right)^2 + \ldots\right]$$

pour $\frac{\int dt\, V}{\hbar} \ll 1$

$$\simeq \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(0)} + \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(1)} + \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(2)} + \ldots$$

" SÉRIE DE BORN "

cas libre (TD5)

discrétisation (C.8) : de $\underset{x_i}{x_0}$ à $\underset{x_f}{x_N}$

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(1)} = \lim_{\substack{m\to\infty \\ (\epsilon\to 0)}} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{m+1}{2}} \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{k=1}^{m} \epsilon \int dx_1 \ldots dx_m\; \exp\left\{\sum_{j=0}^{m} \frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_{j+1} - x_j)^2\right\} V(x_k)$$

$N = m+1$

ou $\frac{x_k + x_{k-1}}{2}$

$[2\pi\hbar = h]$

discrétisation (C.8) : somme de x_1 à x_{N-1} (associé à t_{N-1})

(C.5/6) $\epsilon\to 0$ $\hookrightarrow \underset{x_i}{x_0}$ $\epsilon\to 0$ $\hookrightarrow \underset{x_f}{x_N}$ $\epsilon\to 0$ $\hookrightarrow t_N$

$$\boxed{\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(1)} \equiv \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\epsilon\to 0)}} \sum_{k=1}^{n} \epsilon \int dx_k \left\{ \left(\frac{m}{i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{n-k+1}{2}} \int dx_{k+1} \ldots dx_{\underset{N-1}{n}} \exp\left\{ \sum_{j=k}^{n} \frac{im}{2\hbar\epsilon} (x_{j+1}-x_j)^2 \right\} \right\}}$$

"introduction d'une séparation en k de la somme sur j (pour chaque terme de la somme sur k) n'affectant pas l'amplitude"

$\lim \ldots \langle x_f t_f | x_k t_k \rangle^{(0)}$

"$x_{n+1} \equiv x_N \equiv x_f$ pas intégré"

$$\cdot V(x_k) \left\{ \left(\frac{m}{i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{k}{2}} \int dx_1 \ldots dx_{k-1} \exp\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{im}{2\hbar\epsilon} (x_{j+1}-x_j)^2 \right\} \right\}$$

$\lim_{(\epsilon\to 0)\, k\to\infty} \ldots \langle x_k t_k | x_i t_i \rangle^{(0)}$

"$x_i \equiv x_0$ non intégré"

"Renommer x_k en x"

$$\equiv -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \langle x_f t_f | x t \rangle^{(0)} V(x(t)) \langle x t | x_i t_i \rangle^{(0)}$$

à $t_{k=1} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} t_0 \equiv t_i$

$t_{k=n} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} t_N \equiv t_f$

"passage au temps continu à nouveau"

"correction au 1er ordre au propagateur libre (C.2) de Feynman"

$$\boxed{\equiv -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \langle x_f t_f | x t \rangle^{(0)} V(x(t)) \langle x t | x_i t_i \rangle^{(0)}}$$

"car $\langle x_f t_f | x t \rangle^{(0)} = 0$ pour $t > t_f$

et $\langle x t | x_i t_i \rangle^{(0)} = 0$ pour $t_i > t$ — pris nul (non défini)"

puisque $\underset{t_0}{t_i} < t_{(k)} < \underset{t_N}{t_f}$

"possibly $V(x(t), t)$ si non-relativiste"

De même, on montre qu'à l'ordre suivant,

$$\boxed{\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int dt_1 \int dt_2 \int dx_1 \int dx_2 \, \langle x_f t_f | x_2 t_2 \rangle^{(0)} V(x_2(t_2)) \langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle^{(0)} V(x_1(t_1)) \langle x_1 t_1 | x_i t_i \rangle^{(0)}}$$

(C.13)

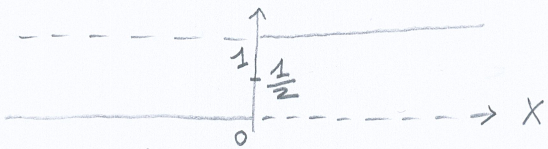
Remarque: plus de facteur "$\frac{1}{2}$" dans $\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(2)}$ alors que présent dans le développement (C.12) car,

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\int dt\, V(x(t))\right)^2} = \frac{1}{2}\iint V(x(t))\, V(x(t'))\, dt\, dt' = \frac{1}{2}\iint V(x(t))\, V(x(t'))\, \theta(t-t')\, dt\, dt'$$

$$+\frac{1}{2}\iint V(x(t))\, V(x(t'))\, \theta(t'-t)\, dt\, dt'$$

$$\theta(-x) = \begin{cases} 1 & -x>0 \\ \frac{1}{2} & -x=0 \\ 0 & -x<0 \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$



"fonction de Heaviside"

$\forall x$, $\theta(-x)+\theta(x)=1$

" commutent car $x(t) \equiv$ val. propre"
(C.8)
.12

$$= \frac{1}{2}\iint V(x(t))\, V(x(t'))\, \theta(t-t')\, dt\, dt' + \text{IDEM}\{\text{avec } t \leftrightarrow t'\}$$

"Renommer"

① calcul (C.12-13)

② $V(x(t_2)) \langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle^{(0)} V(x(t_1))$

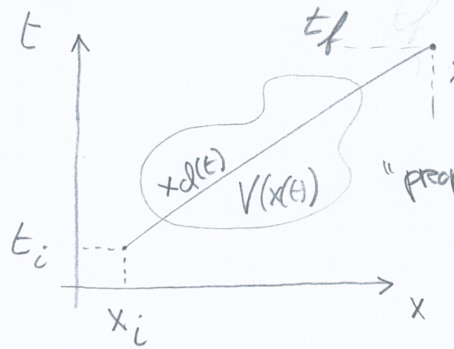
C Interprétation physique (⇒ permet prédiction de l'expression de l'amplitude!)

L'intégrale de chemin conduit à une interprétation graphique des interactions au niveau fondamental: les graphes de Feynman. Il s'agit d'une description quantique:

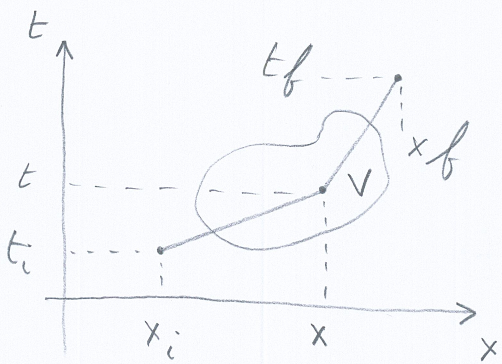
Règles

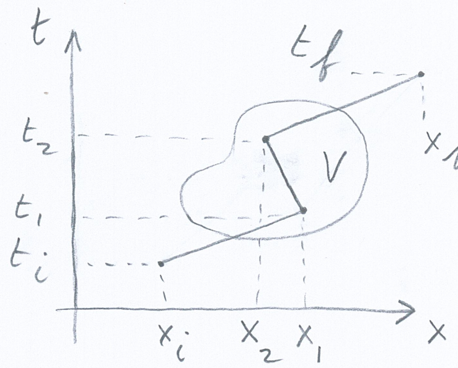
⚠

non-Relativiste: $V(x(t),t) \equiv V(t)$



"propagateur libre"





Interaction ⇕ "Transformation" de particules (systèmes ponctuels: C.7)

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(0)} + \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(1)} + \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(2)} + \ldots$$

$\boxed{L(x(t), \dot{x}(t), t)} \ni V(\overset{(\cdot)}{x}(t), t)$

C.7 : $L = T - V$ "Phys. Classique"

1ère quantification — { canonique / intégrale de chemin

$\hat{H}(\hat{P}_i, \hat{X}_i, \ldots) \in \mathcal{H}_{p,x} \otimes \mathcal{H}_{spin}$

"Mécanique Quantique"

extension relativiste (nouvelles variables analytiques)

(interprét.)

$\boxed{L(\phi(x^\mu), \partial_\nu \phi(x^\mu), \cancel{x^\mu})} \ni V((\partial_\mu)\phi(x^\nu), \cancel{x^\mu})$ [s=0]

ex Ψ

$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* ; -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} ; -ig A^\mu \phi \partial_\mu \phi^*$ $\psi(x^\mu)$ [s=½] ; $A^\mu(x^\nu)$ [s=1]

2ème quantification — { canonique / intégrale de chemin / ⋮

$\mathcal{H}_m \ni \hat{H}(\hat{\phi}, \ldots)$, $\hat{\phi} = \int \frac{d^3p}{((2\pi)^3 2E_p)^{1/2}} \left(\hat{a}\, e^{-ip^\mu x_\mu} + \hat{a}^+ e^{+ip^\mu x_\mu}\right)$ $\langle x^\mu | p_\mu \rangle = \phi$

$\otimes$ (produit tensoriel) Espace de Fock

"Théorie Quantique des Champs"

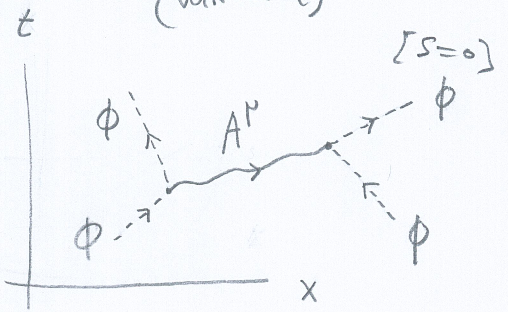
"matière/rayonnement"

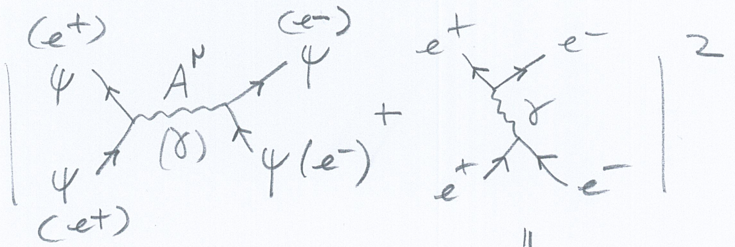
(voir C.14)

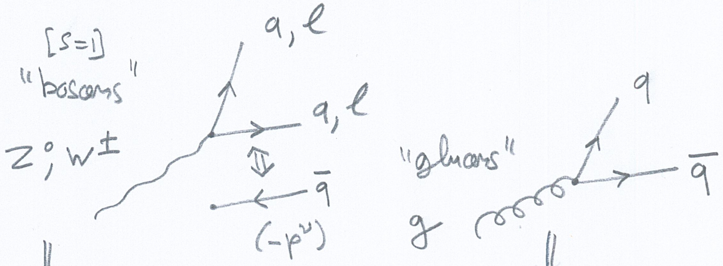
Description quantique des interactions relativiste

Interaction ≡ "échange"

"fermions/quarks & leptons" [s=½] ($\times$ 3 générations : ex ν_e, ν_μ, ν_τ)







$\Downarrow$ $\quad A_\mu \in L$ $\quad$ $\Downarrow$ $W_\mu^a \tau_a \in L(\otimes \mathcal{H}^{(*)}_{interne})$ $\quad$ $\Downarrow$ $G_\mu^a \Lambda_a \in L(\otimes \mathcal{H}_{i}$

conservation (de charge) → $A_\mu \in L$

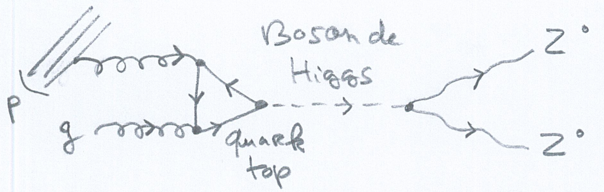
THM | NOETHER

symétrie (du Lagrangien) → $U(1)_Y$

$\Downarrow$ "TH des groupes" $\quad$ $\Downarrow$ "2^2-1 générateurs" $\quad$ $\Downarrow$ "3^2-1 gén."

$U(1)_Y \otimes SU(2)_L \otimes SU(3)_{couleur}$

"Groupe du Modèle Standard de la physique des particules élémentaires"



CERN (2012) Nobel (2013)

Boson de Brout-Englert-Higgs à l'origine des masses ! → Mécanisme brisure spontanée symétrie électrofaible