TD 28

⊙ pôle du propagateur (absent en Théorie Quantique des champs car $\Gamma \neq 0$) intervient dans une intégrale convergente, réel multi-

$$P \sim \Big| \underbrace{\int dx_f \, \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle^{(0)}}_{} \Big|^2 \quad (\text{TD}6)$$

(TD25)

$$\sim \int d^3 p_f \int d^3 p_i \; e^{\text{"}px\text{"}} \; \underbrace{S^{(0)}(\vec{p}_f, t_f, \vec{p}_i, t_i)}_{}$$

(TD26)

$$\sim \int dE_f \int dE_i \; e^{\text{"}Et\text{"}} \; s^{(0)}(\vec{p}_f, E_f, \vec{p}_i, E_i)$$

" principe du propagateur libre de Feynman exprimé dans l'espace des (4-) moments "

$\boxed{p}$ Exprimer l'amplitude $\overbrace{\langle \overset{\circ}{p}_f(t_f) | p_i(t_f) \rangle^{(1)}}^{S^{(1)}_{1}}$ (exercice 1 / $\boxed{c}$ TD 19) à l'ordre 1 en $V(x)$ en fonction de l'amplitude $s^{(0)}(\vec{p}_f, E_f, \vec{p}_i, E_i)$ de la question $\boxed{ce}$ (TD27) que l'on explicitera (via TD 25/26).

$\boxed{j}$ $\boxed{m}$

1 $\boxed{c}$ /3D TD19

"ondes planes"

$$\overbrace{\langle \overset{\circ}{\vec{p}}_f(t_f) | \vec{p}_i(t_f) \rangle}^{S^{(1)}_{1}} = -\frac{i}{\hbar} \int d\vec{x}_f \int d\vec{x}_i \int d\vec{x} \int dt \; \underbrace{\psi^{\circ *}_f(\vec{x}_f, t_f)}_{\langle \vec{\overset{\circ}{p}}_f(t_f) | \vec{x}_f \rangle} \underbrace{\psi_i(\vec{x}_i, t_i)}_{\langle \vec{x}_i | \vec{p}_i(t_i) \rangle} \overbrace{\frac{1}{\hbar^6} \int d^3 l \int d^3 l_f \, e^{\frac{i}{\hbar}(-\vec{l}\cdot\vec{x} + \vec{l}_f \cdot \vec{x}_f)} \overbrace{\int \frac{dE}{\hbar} \int \frac{dE_f}{\hbar} \, e^{\frac{i}{\hbar}(-E_f t_f + E t)} \, s^{(0)}(\vec{l}_f, E_f, \vec{l}, E)}^{S^{(0)}(\vec{l}_f, t_f, \vec{l}, t)}}^{\langle x_f t_f | x t \rangle^{(0)}}$$

$$s^{(0)}(\vec{l}_f, E_f, \vec{l}, E) = \left[2\pi\hbar \cdot i\hbar \cdot \delta(\vec{l} - \vec{l}_f) \, \delta(E_f - E) \, (E_f - \vec{l}_f^{\,2}/2m)^{-1} \right]$$

$$\cdot \underbrace{\int\!\!\int e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\cdot\vec{x} - Wt)} V(\vec{q}, W) \, d^3q \, dW}_{V(\vec{x}(t))} \; \underbrace{\frac{1}{\hbar^6} \int d^3 l_i \int d^3 l' \, e^{\frac{i}{\hbar}(-\vec{l}_i \cdot \vec{x}_i + \vec{l}' \cdot \vec{x})} \underbrace{\int \frac{dE_i}{\hbar} \int \frac{dE'}{\hbar} \, e^{\frac{i}{\hbar}(-E' t + E_i t_i)} \left[2\pi\hbar \cdot i\hbar \cdot \delta(\vec{l}_i - \vec{l}') \, \delta(E' - E_i) \, (E' - \vec{l}'^{\,2}/2m)^{-1} \right]}_{S^{(0)}(\vec{l}', t, \vec{l}_i, t_i)}}_{\langle x t | x_i t_i \rangle^{(0)}}$$

$\boxed{9}$ Calculer les intégrales simples faisant intervenir des distributions de Dirac, dans le résultat.

$$S^{(1)}_{①} \overset{\int d^3\ell\, dE\, d^3\ell'\, dE'}{=} -\frac{i}{\hbar}\int d^3x_f \int d^3x_i \int d^3x \int dt\; \psi_f^{0*}\,\psi_i\, \frac{1}{h^6}\int d^3\ell_f\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\ell}_f\cdot(\vec{x}_f-\vec{x})}\int \frac{dE_f}{h^2}\, e^{\frac{i}{\hbar}E_f(t-t_f)}\, \frac{2\pi\hbar\, i\hbar}{E_f-\vec{\ell}_f^{\,2}/2m}$$

$$\cdot\int d^3q\int dw\, V(\vec{q},w)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\cdot\vec{x}-wt)}\, \frac{1}{h^6}\int d^3\ell_i\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\ell}_i\cdot(\vec{x}-\vec{x}_i)}\int\frac{dE_i}{h^2}\, e^{\frac{i}{\hbar}E_i(t_i-t)}\, \frac{2\pi\hbar\, i\hbar}{E_i-\vec{\ell}_i^{\,2}/2m}$$

$\boxed{R}$ Calculer les transformées de Fourier de l'identité. (Rappel : $\mathrm{T.F.}_{x|t}(1) = 2\pi\,\delta(\ell_{|E})$) Puis les intégrales simples.

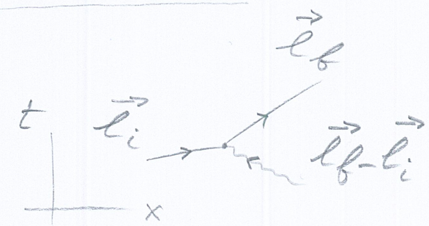
$$S^{(1)}_{①} \overset{\int d^3x\, dt}{=} -\frac{i}{\hbar}\int d^3x_f\int d^3x_i\; \psi_f^{0*}\,\psi_i\, \frac{h^2(-\hbar^2)}{h^{16}}\int d^3\ell_f\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\ell}_f\cdot\vec{x}_f}\int dE_f\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_f t_f}\, \frac{1}{E_f-\vec{\ell}_f^{\,2}/2m}\int d^3q\int dw\, V(\vec{q},w)\int d^3\ell_i\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\ell}_i\cdot\vec{x}_i}$$

$$\cdot\int dE_i\, e^{\frac{i}{\hbar}E_i t_i}\, \frac{1}{E_i-\vec{\ell}_i^{\,2}/2m}\,(2\pi)^3\,\delta^{(3)}\!\left(\left[\vec{\ell}_f-\vec{q}-\vec{\ell}_i\right]\frac{1}{\hbar}\right) 2\pi\,\delta\!\left(\left[-E_f+w+E_i\right]\frac{1}{\hbar}\right)$$

$$\underbrace{S^{(1)}_{①}}_{(\vec{p}_{f,i}\,;\,t_{f,i})} \overset{\int d^3q\, dw}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3x_f\int d^3x_i\; \psi_f^{0*}(\vec{x}_f,t_f)\,\psi_i(\vec{x}_i,t_i)\, \underbrace{\int d^3\ell_f\int d^3\ell_i\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{\ell}_f\cdot\vec{x}_f-\vec{\ell}_i\cdot\vec{x}_i)}}_{\equiv h^6\,\mathrm{T.F.}^{-1}\ (\mathrm{TD}25)}\; \underbrace{\int dE_f\int dE_i\, e^{\frac{i}{\hbar}(-E_f t_f+E_i t_i)}}_{\equiv h^2\,\mathrm{T.F.}^{-1}\ (\mathrm{TD}26)}$$

"pôle des propagateurs (TD27)"

$$\cdot\underbrace{\frac{+i\hbar^{-4}}{E_f-\vec{\ell}_f^{\,2}/2m}}_{\text{propagateur}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{i\hbar}\right)V\!\left(\vec{\ell}_f-\vec{\ell}_i,\ E_f-E_i\right)}_{\text{valeurs propres conservées !}}\cdot\underbrace{\frac{+i\hbar^{-4}}{E_i-\vec{\ell}_i^{\,2}/2m}}_{\text{propagateur}}$$



③ Etudions la diffusion de Rutherford (1911) qui a guidé le développement du modèle de Bohr de l'atome (comportement quantique). Il s'agissait d'une expérience de diffusion de particules α (2 protons + 2 neutrons) sur des noyaux d'OR (numéro atomique : $Z = 79$ protons).

[a] Exprimer la densité d'amplitude de probabilité : $S^{(1)}_{①} = \langle \vec{p}^{\circ}_f(t_f) | \vec{p}_i(t_f) \rangle^{(1)}$ (exercice ①/[b][c] TD19) grâce à la densité d'amplitude $\langle \vec{x}_f t_f | \vec{x}_i t_i \rangle^{(0)}$ obtenue à l'exercice ①/[k] (TD25).

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_f, t_i, t_f) \quad \boxed{S^{(1)}_{①} = -\frac{i}{\hbar} \int d^3x_f \int d^3x_i \int d^3x \int dt \, \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f\cdot\vec{x}_f - E_f t_f)} \frac{1}{\sqrt{h}^3}}_{(3D : TD22)\ \ \psi^{\circ *}_f(\vec{x}_f, t_f)} \cdot \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i\cdot\vec{x}_i - E_i t_i)} \frac{1}{\sqrt{h}^3}}_{\psi^{\circ}_i(\vec{x}_i, t_i)} \cdot V(\vec{x}(t)).}$$

"T.F.$_{\substack{x\\t}}(1) = 2\pi\,\delta(\substack{p\\E})$"

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{h^3}\int d^3p'_f\, \theta(t_f - t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}'_f\cdot[\vec{x} - \vec{x}_f] + \frac{\vec{p}'^2_f}{2m}(t_f - t)\right)}}_{\langle x_f t_f | x t \rangle^{(0)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{h^3}\int d^3p\, \theta(t - t_i)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot[\vec{x}_i - \vec{x}] + \frac{\vec{p}^2}{2m}(t - t_i)\right)}}_{\langle x t | x_i t_i \rangle^{(0)}}$$

$\int d^3x_f \int d^3x_i$

$$\underset{\uparrow}{=} -\frac{i}{\hbar}\int d^3x \int dt\, \frac{1}{h^9}\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_f t_f - E_i t_i)\right\} V(\vec{x}) \int d^3p'_f \int d^3p\, \underbrace{\theta(t_f - t)\,\theta(t - t_i)}_{\substack{= 1 \text{ for} \\ t_i \to -\infty ;\ t_f \to +\infty}}\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(-\vec{p}'_f\cdot\vec{x} - \frac{\vec{p}'^2_f}{2m}(t_f - t)\right)\right\}$$

"ondes planes"

$E_i = \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}$; $E_f = \vec{p}_f^{\,2}/2m$

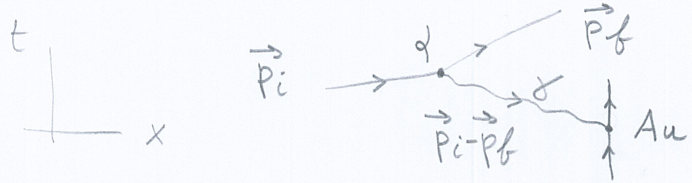
$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(+\vec{p}_i\cdot\vec{x} - \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}(t - t_i)\right)\right\} (2\pi)^6\, \delta^{(3)}\left(\frac{1}{\hbar}[\vec{p}_f - \vec{p}'_f]\right) \delta^{(3)}\left(\frac{1}{\hbar}[-\vec{p}_i + \vec{p}]\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \int dt}}{=} -\frac{i}{\hbar}\int d^3x\, \frac{1}{h^3}\,{}_2\, V(\vec{x})\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(-\vec{p}_f + \vec{p}_i)\cdot\vec{x}\right\} 2\pi\, \delta\left(\frac{1}{\hbar}[E_f - E_i]\right)$$

b Donner l'amplitude obtenue pour le potentiel de Coulomb : $V(\vec{x}) = \dfrac{Ze\cdot 2e}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}\|}$
(interaction électromagnétique impliquée) correspondant à un système ($\vec{x}$) : - - - -> "permittivité du vide"
particule α subissant le champ e.m. créé par un noyau d'or placé en $\vec{x}=\vec{0}$.
On donne pour cela l'intégrale résultant d'une régularisation ($\cdot\, e^{-\varepsilon\|\vec{x}\|}$) : $\displaystyle\int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{x}}\frac{d^3x}{\|\vec{x}\|} = \frac{4\pi\hbar^2}{\vec{q}^{\,2}}$

$$\boxed{S^{(1)}_{①} = -\frac{i}{\cancel{\hbar}}\frac{Z2e^2}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\delta(E_f-E_i)\frac{\cancel{4\pi}\hbar^{\cancel{2}}}{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2}\frac{1}{h^2} = \frac{-i}{\pi h}\frac{Ze^2}{\varepsilon_0}\delta(E_f-E_i)(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^{-2}}$$

"distance $\|\vec{x}\|$ (visible)"



(espace des moments ⇒ propagateur du photon)

c Calculer la "section efficace" de la réaction considérée.

Expérience : volume fini V ⇒ quantification du moment (spectre discret) : $\langle p_m|p_M\rangle = \delta_{mM}$
infinitésimal ($V = d^3$) "particule dans une boîte en M.Q."
avec $p_m \sim 2\pi m\dfrac{\hbar}{d}$

DONC $[|p\rangle]=1$ soit, $[S^{(1)}_{①}]=1$, et $|S^{(1)}_{①}(\vec{p}_f+d\vec{p}_f)|^2 = |S^{(1)}_{①}(\vec{p}_f,\vec{p}_i,t_f,t_i)|^2\cdot\underbrace{\dfrac{V\,d^3p_f}{(2\pi\hbar)^3}}_{\text{somme sur les valeurs propres | états}}$ car $dp_m \sim \dfrac{2\pi\hbar}{d}dm$

"probabilité en $\vec{p}_f + d^3\vec{p}_f$"

Section efficace × Flux = Probabilité d'interaction

(ΔT : temps d'interaction)

$d\sigma$ (surface) L^2 ; $\dfrac{\|\vec{p}_i\|}{m}\dfrac{1}{V}$ (vitesse . densité) LT^{-1} L^{-3} ; $\dfrac{|S^{(1)}_{①}(p_f+dp_f)|^2}{\Delta T}$ (amplitude)^2/par unité de temps) T^{-1}

$$\sigma \equiv \int \frac{m V}{\|\vec{p}_i\|} \frac{|S_{①}^{(1)}(p_f+dp_f)|^2}{\Delta T} \equiv \int \frac{m V}{\|\vec{p}_i\| \Delta T} \left(\frac{Z^2 e^4}{\pi^2 \hbar^2 \varepsilon_0^2}\right) [\delta(E_f - E_i)]^2 \frac{1}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^4} \frac{V d^3 p_f}{\hbar^3} \underbrace{\left|\frac{\hbar^3}{\sqrt{V} V}\right|^2}_{\text{dim. } (S)}$$

$$\text{avec } [\delta(E_f - E_i)]^2 = \lim_{\Delta T \to \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} dt \, \exp\{i(E_i - E_f)t\}\right]^2 = \lim \left\{\left[\frac{\cancel{i} \sin[(E_i - E_f)\Delta T/2]}{\cancel{i}\pi \underbrace{(E_i - E_f)}_{x}}\right]^2 \underbrace{\frac{\Delta T/2}{\Delta T/2}}_{\alpha}\right\}$$

$$= \cancel{\pi}\, \delta(E_i - E_f) \cdot \lim_{\Delta T \to \infty} \left\{\frac{\Delta T}{2} \frac{1}{\cancel{\pi}}\right\}$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2} = \pi \delta(x)$$

changement de variable : $E_f = p_f^2/2m$

et donc : $dE_f = p_f \, dp_f / m$

$$\left(\lim_{\Delta T \to \infty}\right) \sigma \equiv \int \frac{m}{\|\vec{p}_i\|} \left(\frac{Z^2 e^4}{\pi^2 \hbar^5 \varepsilon_0^2}\right) \frac{\hbar^6}{2^2} \delta(E_i - E_f) \frac{1}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^4} \underbrace{d^3 p_f}_{p_f^2 \, dp_f \, d\Omega_f} \stackrel{!}{\equiv} \int \frac{m^2 \hbar^6}{4} (-) \frac{\delta(E_i - E_f)}{\underbrace{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^4}} dE_f \, d\Omega_f$$

"valeurs classiques"

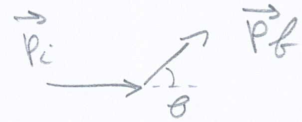
$\|\vec{p}_i\| = p_i = \cancel{p_f} \; (= m v)$

$p_f^2 = \|\vec{p}_f\|^2$

$$(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^4 = (p_i^2 + p_i^2 - p_i^2 \, 2\cos\theta)^2 = 4 p_i^4 (\underbrace{1 - \cos\theta}_{2\sin^2(\theta/2)})^2 = 16 \, p_i^4 \sin^4(\theta/2)$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \equiv \hbar \left(\frac{Z e^2}{2\pi \varepsilon_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\underbrace{4 m v^2}_{8 E_c}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}$$

avec $E_i = E_f$



Section efficace de Rutherford maximum pour $\theta \to 0$
(angulaire)

$[d\Omega_f = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \to 0]$