PROBLÈME DE MÉCANIQUE CLASSIQUE

Mouvement bi-dimensionnel

Considérons le mouvement d'un point matériel dont les deux coordonnées dans une base orthonormée sont paramétrées en fonction du temps par,

$$x(t) = R(1 - \cos\omega t)\ ,\ \ y(t) = R(1 - \sin\omega t)\ ,$$

où R et ω sont des constantes positives.

1. Tracer la trajectoire de ce point dans le plan. Interpréter géométriquement les quantiés R et ω.
2. Calculer les deux coordonnées de la vitesse de ce point matériel.
3. Calculer les deux coordonnées de l'accélération de ce point matériel.

La fusée

– Les 2 parties peuvent être traitées indépendamment. –

Une fusée est propulsée à la verticale grâce à une force constante $\vec{F}_u$ engendrée par un combustible brûlé puis éjecté à une vitesse constante $\vec{u}$ dirigée verticalement vers le bas.

1. **Bilan énergétique.-** On néglige dans un premier temps les frottements de l'air donc la seule autre force en jeu est le poids de la fusée (de masse M) et de son combustible (de masse m).
   (a) Les forces en présence sont-elles conservatives ? Démontrez votre réponse dans le cas de la force $\vec{F}_u$.
   (b) Enoncer le théorème de l'énergie *cinétique* puis l'appliquer au système "fusée + combustible" entre la position au sol (origine de coordonnée $z = 0$) et une altitude atteinte notée z_A. On notera $E_c(z)$ l'énergie cinétique de ce système à l'altitude z. Ecrire l'égalité obtenue en fonction des altitudes z, de $E_c(z)$, m, M, la norme $||\vec{F}_u||$ et g la constante d'accélération de pesanteur.

(c) Enoncer le théorème de l'énergie *mécanique* puis l'appliquer au même système et entre les même positions. L'énergie potentielle gravitationnelle considérée ici au voisinage de la surface terrestre est $E_p^g(z) = \mathcal{M}gz$ où $\mathcal{M}$ est la masse du système étudié. Ecrire l'égalité obtenue en fonction des altitudes z, de $E_c(z)$, m, M, g et $E_p^u(z)$ l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F}_u$.

(d) Déduire des questions (1b) et (1c) l'énergie potentielle $E_p^u(z)$.

2. **Etude dynamique.-** On s'intéresse maintenant au mouvement de la fusée.

(a) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système "fusée + combustible", de manière vectorielle.

(b) Projeter l'égalité vectorielle de la question précédente sur l'axe vertical orienté par le vecteur unitaire $\vec{k}$ dirigé vers le haut. Utiliser les paramètres m, M, g et les notations a et F_u pour les composantes selon $\vec{k}$ des vecteurs accélération et force du réacteur de la fusée.

(c) La force produite par le réacteur de la fusée s'écrit,

$$F_u \;=\; -\frac{d}{dt}[m(t) + M]\;||\vec{u}||\;,$$

la masse M de toute la structure solide de la fusée étant constante au cours du temps t, contrairement à la masse du carburant $m(t)$. Justifier physiquement le signe de la dérivée temporelle $dm(t)/dt$. En déduire le signe de F_u. Est-il cohérent ?

(d) Déduire des questions (2b) et (2c) la condition sur le débit massique de gaz brûlé, $-dm(t)/dt$, pour que la fusée, ayant une vitesse initiale nulle, décolle de sa base au sol.

(e) Supposons que pendant l'intervalle de temps, $t \in [0, \tau]$, la masse du combustible évolue suivant la loi,

$$m(t) \;=\; m_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\;.$$

Que représentent physiquement m_0 et τ ? Quelles sont leur dimension ? Quelle est la condition de décollage sur le paramètre τ ?

(f) En utilisant les questions (2b) et (2c), exprimer l'accélération de la fusée, $a(t)$, en fonction de t, m_0, M, g, τ et $||\vec{u}||$.

(g) Calculer [1] la dérivée de la quantité suivante par rapport au temps t,

$$\mathcal{Q} \;=\; -||\vec{u}||\;\ln\left(1 - \frac{m_0}{m_0 + M}\,\frac{t}{\tau}\right)\;.$$

(h) Déduire des questions (2f) et (2g) l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée en fonction de t, m_0, M, g, τ et $||\vec{u}||$.

(i) Que devient la condition de décollage de la question (2d) en présence d'une force de frottement visqueux de l'air sur la fusée du type $-\alpha\, v(t)\,\vec{k}$ (α étant une constante positive) ? Commenter.

***

[1] On rappelle la dérivée du logarithme népérien: $\frac{d}{dX}(\ln X) = \frac{1}{X}$.