TD de Remédiation en Mathématiques

Dérivation

I Interprétation graphique

1. (a) (SF1260) Quelle est l'expression de la fonction affine $y(x)$ représentée sur la Figure 1 ? Donner le coefficient directeur de la droite associée.

   (b) (SF22) Calculer la dérivée $\frac{dy(x)}{dx}$ de la fonction $y(x)$ obtenue. Qu'en déduisez-vous ?

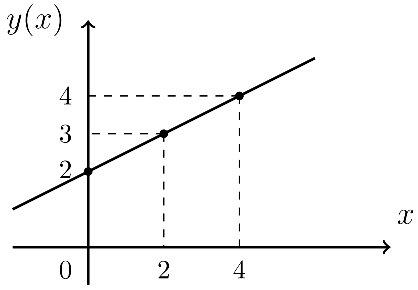

Figure 1 – *Fonction affine.*

2. (a) (SF17) Calculer $\mathcal{P}_f(x_0) = \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{(x_0+\delta x)-x_0} \right]$ pour la fonction $f(x) = x^2$ en un point x_0.

   (b) (SF20,SF30) Tracer la fonction $f(x) = x^2$. Interpréter graphiquement la quantité $\mathcal{P}_f(1)$ pour cette fonction.

   (c) (SF22) Calculer la dérivée $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$ de $f(x) = x^2$ en x_0. Comparer avec le résultat de la question 2(a) et commenter.

3. (SF28) Déterminer une équation de la droite tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 + x + 1$ au point d'abscisse $a = 1$. Même question pour la fonction $g(x) = \sqrt{x}/x$ en $a = 3$. En quel point la tangente à la courbe représentative de $f(x) = 3x^2 + x + 1$ est-elle parallèle à la droite d'équation $D(x) = 3x + 4$?

4. (a) (SF13,SF43) Soit la fonction $A(r) = \frac{1}{r} + r^2$. Tracer l'allure de cette fonction sur $\mathbb{R}^*$ en se servant des comportements asymptotiques (en $r \to 0, \pm\infty$). En déduire graphiquement le nombre d'extrema que possède cette fonction. S'agit-il de maximum ou bien de minimum ?

Retrouver toutes ces conclusions grâce aux dérivées première et seconde de $A(r)$. Donner les intervalles précis sur lesquels $A(r)$ est convexe ou concave [1]. Affiner alors la courbe de $A(r)$.

(b) (SF13,SF43) Considérons à présent la fonction $\tilde{A}(r) = \frac{1}{|r|} + r^2$. Quelle est l'allure de $\tilde{A}(r)$ sur $\mathbb{R}^*$? En déduire le nombre d'extrema de cette fonction. Sont-ils des maxima ou des minima ? Confirmer ces observations en se basant sur les dérivées première et seconde de $\tilde{A}(r)$. $\tilde{A}(r)$ est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}^*$? (justifier graphiquement puis par le calcul de $d^2\tilde{A}(r)/dr^2$). Enfin, commenter la parité de $\tilde{A}(r)$.

5. (SF43,SF44,SF210) Quelles sont les valeurs de z correspondant aux extrema, minima et maxima du polynôme $P(z) = 5z^3 + 4z^2 + 3$? En déduire l'allure de la courbe associée. Avons-nous affaire ici à des extrema locaux ou bien globaux ?

II Fonctions élémentaires

1. (SF22) Quelles sont les dérivées par rapport à la variable x des fonctions ax^n, $(xy)^n$ où $a, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$?
2. (SF22,SF23) Quelles sont les dérivées par rapport à x des fonctions exponentielle, e^x, logarithme népérien, $\ln(x)$, et, e^{x+y} (y étant une autre variable) ?
3. (SF22) Quelles sont les dérivées par rapport à x des fonctions trigonométriques, $\cos x$ et $\sin x$?

III Fonctions combinées

1. (SF22,SF23) Calculer de deux manières différentes la dérivée par rapport à X de la fonction $f(X) = X^3 + X^2 + A$, A étant une constante. Même question pour,

$$g(X) = (X^4 + X^2)(X^5 + X^3)\ ,\quad h(X) = (\sqrt{X} + 1)(X^2 - 2)\ ,\quad k(X) = (2X - \sqrt{X})(X + 4)\ .$$

2. (SF22,SF24) Calculer la dérivée de ces rapports de fonctions (de v),

$$\frac{3v^2 - 4v}{2}\ ,\quad \frac{3v^2 - 4v + 1}{2v - 3}\ ,\quad \frac{\ln v}{\cos v + v^2}\ .$$

3. (SF22,SF24) Calculer de deux manières différentes la dérivée par rapport à p de : $\frac{\frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}}{p+1}$.
4. (SF22,SF23,SF47) Calculer la dérivée par rapport à u des fonctions $u \ln u$ et $e^u \ln u$.
5. (SF22,SF23,SF47) Calculer la dérivée par rapport à θ des fonctions $\cos\theta + \sin\theta$ et $\cos\theta \times \sin\theta$. Exprimer ce dernier résultat en terme de $\cos 2\theta$.
6. (SF22,SF23,SF47) Calculer la dérivée de $\tan\theta$. En déduire deux méthodes de calcul de la dérivée de $(\cos\theta/\sin\theta)$.

1. Pour cela, on sera amené à résoudre l'équation $\frac{d^2A(r)}{dr^2} = 0$ (au point d'inflexion ici).

IV Fonctions de fonctions

1. (a) (SF25) Que vaut la fonction $\mathcal{F}(x)$ dans l'expression $\frac{d}{dx} f[g(x)] = \mathcal{F}(x) \times \frac{dg(x)}{dx}$?
   ($f(X)$ et $g(X)$ sont des fonctions indépendantes l'une de l'autre)

   (b) (SF25) Que vaut la fonction $\mathcal{G}(x)$ dans l'expression $\frac{d}{dx} f[g\{h(x)\}] = \frac{df(g)}{dg} \times \mathcal{G}(x) \times \frac{dh(x)}{dx}$?
   (f, g, h indépendantes)

2. (SF22,SF25) Calculer la dérivée de ces fonctions en y :

$$(-5y^2+1)^7, \ \left(\frac{8+y+y^3}{3+y^2+y^4}\right)^4, \ e^{3y^3+4y+2} \text{ et } e^{2y}(3y+2) \ .$$

3. (SF22,SF23,SF25) Utiliser deux méthodes pour calculer la dérivée des deux fonctions à une variable, $F(\alpha) = 1 + \tan^2 \alpha$, et, $G(t) = \ln(t/z)$, z étant une constante.

4. (SF22,SF25) Calculer la dérivée des fonctions suivantes à une variable [dénotée u] :

$$\ln(u+u^2), \ [\ln(2+u^6)]^3, \ \ln(\cos u), \ e^{\sin(u)}, \ \cos^2(4u), \ \tan^4(3u) \text{ et } \sqrt{u+e^{u^2}} \ .$$

5. (SF22,SF24,SF25) Calculer la dérivée par rapport à X de la fonction : $\mathcal{A}(X) = \ln\left(\left|\frac{9-\sqrt{X}}{2+X^4}\right|\right)$.

6. *Dérivées partielles* – (SF22,SF23,SF25) Calculer les dérivées des fonctions suivantes à deux variables, par rapport [2] à la variable x, puis par rapport à la variable y.

$$u(x,y) = e^{x^2}\cos(y), \ v(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy), \ w(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2} \ .$$

7. (SF22,SF25,SF41,SF43) Dresser le tableau de variation complet de la fonction $\Omega(t) = -\frac{t}{2} - 1 + \ln(t^2+1)$. Tracer ensuite cette fonction avec une précision optimum. Considérer en particulier les signes des dérivées (première et seconde), les points d'extrema et les comportements asymptotiques [en $t \to \pm\infty$] de $\Omega(t)$.

8. (a) Exponentielle de base a : (SF22,SF25) Calculer la dérivée vis-à-vis de x de la fonction a^x, où a est une constante réelle strictement positive : $a > 0$. Penser à la réécriture $a = e^{\ln a}$. Donner un résultat proportionnel à a^x.

   (b) Application : (SF22,SF25) En déduire deux moyens de calculer la dérivée de $\ln(a^x)$.

   (c) Généralisation : (SF22,SF25) Calculer la dérivée relativement à x de la fonction $[f(x)]^{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions quelconques. Donner le résultat obtenu en terme de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ (leur dérivée) et $[f(x)]^{g(x)}$. Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question 5(a).

   (d) Applications : (SF22,SF25) Dériver par rapport à u ces deux fonctions,

$$P(u) = 2^{u^2}, \text{ et, } Q(u) = (C + \ln u)^{\sin u} \ ,$$

   où C est une constante.

2. On notera par exemple les dérivées partielles de la fonction $u(x,y)$: $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$.

V Réflexion

1. (a) (SF30) Sur quel domaine de la variable t sont définies ces deux fonctions ?

$$f(t) = \frac{3t-2}{t+1}, \text{ et, } g(t) = \frac{-5}{t+1} \ .$$

   (b) (SF22,SF24) Calculer leur dérivée respective. Que remarque-t-on ?

   (c) (SF22,SF24) Que vaut $f(t) - g(t)$? Justifier alors la remarque de la question 1(b).

2. (SF22) Quel type de fonction, une fois sommée avec le carré de sa variable, possède une dérivée nulle ?

3. (SF22,SF25) Montrer que la dérivée de la fonction $\arcsin(x)$ est égale à $1/\sqrt{1-x^2}$ lorsque $x \in [-1, 1]$. Cette fonction est définie par la relation, $\sin[\arcsin(x)] = x$, que l'on dérivera pour initier la démonstration.

4. (a) (SF22,SF41,SF44) Un fermier souhaite entourer un champ rectangulaire et le diviser en deux parties égales à l'aide d'une clôture parallèle à l'un des côtés du champ (de longueur a). Il dispose de 1200m de clôture pour entourer et diviser le terrain. En déduire une relation entre les dimensions des deux côtés du champ : a et b.

   (b) (SF22,SF41,SF44) Le fermier fait appel à vous, spécialiste en optimisation de clôture, afin de vous demander pour quelle dimension a son champ aura une superficie maximale.

5. (SF22,SF41,SF44) Dans une usine de construction de voitures, les portières doivent être peintes. C'est pourquoi une énorme cuve cylindrique en acier, d'un volume de 64m^3, stocke de la peinture. Trouver les dimensions de cette cuve pour que la quantité de métal nécessaire à sa construction soit minimale (pour des raisons économiques et écologiques). Par simplicité, on considérera une cuve totalement fermée.