

TD DE REMÉDIATION EN MATHÉMATIQUES

Dérivation : raisonnement

1. (SF19) Utiliser la définition de la dérivée pour conclure sur la dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ en $x_0 = 4/3$.
2. (SF19) Utiliser la définition de la dérivée pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
3. (MATH101, Examen 2018) (SF22) Montrer que $x f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ pour $f(x) = \ln(1 + x)$. En déduire la primitive de la fonction $x f'(x)$.
4. (a) Exponentielle de base a : (SF22,SF25) Calculer la dérivée vis-à-vis de x de la fonction a^x , où a est une constante réelle strictement positive : $a > 0$. Penser à la réécriture $a = e^{\ln a}$. Donner un résultat proportionnel à a^x .
 (b) Application : (SF22,SF25) En déduire deux moyens de calculer la dérivée de $\ln(a^x)$.
 (c) Généralisation : (SF22,SF25) Calculer la dérivée relativement à x de la fonction $[f(x)]^{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions quelconques. Donner le résultat obtenu en terme de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ (leur dérivée) et $[f(x)]^{g(x)}$. Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question 5(a).
 (d) Applications : (SF22,SF25) Dériver par rapport à u ces deux fonctions,

$$P(u) = 2^{u^2}, \text{ et, } Q(u) = (C + \ln u)^{\sin u},$$

où C est une constante.

5. (a) (SF30) Sur quel domaine de la variable t sont définies ces deux fonctions ?

$$f(t) = \frac{3t - 2}{t + 1}, \text{ et, } g(t) = \frac{-5}{t + 1}.$$

- (b) (SF22,SF24) Calculer leur dérivée respective. Que remarque-t-on ?
- (c) (SF22,SF24) Que vaut $f(t) - g(t)$? Justifier alors la remarque de la question 1(b).
6. (SF22) Quel type de fonction, une fois sommée avec le carré de sa variable, possède une dérivée nulle ?
7. (SF22,SF25) Montrer que la dérivée de la fonction $\arcsin(x)$ est égale à $1/\sqrt{1 - x^2}$ lorsque $x \in [-1, 1]$. Cette fonction est définie par la relation, $\sin[\arcsin(x)] = x$, que l'on dérivera pour initier la démonstration.

-
8. (a) (SF22,SF41,SF44) Un fermier souhaite entourer un champ rectangulaire et le diviser en deux parties égales à l'aide d'une clôture parallèle à l'un des côtés du champ (de longueur a). Il dispose de 1200m de clôture pour entourer et diviser le terrain. En déduire une relation entre les dimensions des deux côtés du champ : a et b .
- (b) (SF22,SF41,SF44) Le fermier fait appel à vous, spécialiste en optimisation de clôture, afin de vous demander pour quelle dimension a son champ aura une superficie maximale.
9. (SF22,SF41,SF44) Dans une usine de construction de voitures, les portières doivent être peintes. C'est pourquoi une énorme cuve cylindrique en acier, d'un volume de 64m^3 , stocke de la peinture. Trouver les dimensions de cette cuve pour que la quantité de métal nécessaire à sa construction soit minimale (pour des raisons économiques et écologiques). Par simplicité, on considérera une cuve totalement fermée.