TD de Remédiation en Mathématiques

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 (simples)

Notes de cours :

Équations différentielles : généralités

Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue cherchée $f(t)$ (dépendant de la variable réelle indépendante t), ses dérivées par rapport à t et la variable t elle-même, que l'on peut écrire via une fonction générique $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}\left(t, f(t), \frac{df}{dt}, \frac{d^2 f}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n f}{dt^n}\right) = 0 \ ,$$

l'ordre n de la dérivée la plus élevée apparaissant dans cette équation étant appelé *l'ordre de l'équation différentielle.*

Equations différentielles linéaires homogènes

Une équation différentielle linéaire homogène peut être mise sous la forme suivante,

$$a_0(t)f(t) + a_1(t)\frac{df}{dt} + a_2(t)\frac{d^2 f}{dt^2} + \cdots + a_n(t)\frac{d^n f}{dt^n} = 0 \ , \tag{1}$$

où les $n+1$ coefficients $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ sont des fonctions données. Cette équation est homogène au sens où le terme à droite de l'égalité est nul.

Résolution :

Voici la méthode générale qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène dans le **cas simple** où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes (ne dépendant pas de la variable t).

La solution générale d'une équation différentielle du type (1) d'ordre n est une combinaison linéaire de n fonctions (solutions) indépendantes qui s'obtiennent de la manière suivante.

On commence par déterminer les n racines complexes du polynôme caractéristique $P(x)$ de degré n associé à l'équation différentielle d'ordre n : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

• Si les n racines α_i $[i = 1, 2, \ldots, n]$ sont distinctes, les n fonctions indépendantes sont constituées par les exponentielles $e^{\alpha_i t}$ et la solution générale s'écrit donc,

$$f(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + c_n e^{\alpha_n t} \ ,$$

les c_i étant des constantes.

• Dans le cas contraire, au moins une racine est dégénérée : sa valeur est égale à la valeur de $g - 1$ autres racines, g ($\leq n$) étant appelé degré de dégénérescence[1] (et vallant 1 dans le cas sans dégénérescence). Par exemple pour la racine α_1, les g_1 fonctions indépendantes associées sont alors $e^{\alpha_1 t}$, $te^{\alpha_1 t}$, ..., $t^{g_1 - 1} e^{\alpha_1 t}$. La solution générale s'écrit donc,

$$\begin{aligned} f(t) &= c_{11}\, e^{\alpha_1 t} + c_{12}\, t\, e^{\alpha_1 t} + \cdots + c_{1g_1}\, t^{g_1 - 1}\, e^{\alpha_1 t} \\ &+ c_{21}\, e^{\alpha_2 t} + c_{22}\, t\, e^{\alpha_2 t} + \cdots + c_{2g_2}\, t^{g_2 - 1}\, e^{\alpha_2 t} \\ &+ \ldots \\ &+ c_{N1}\, e^{\alpha_N t} + c_{N2}\, t\, e^{\alpha_N t} + \cdots + c_{Ng_N}\, t^{g_N - 1}\, e^{\alpha_N t} \ , \end{aligned}$$

g_j étant le degré de dégénérescence de la racine α_j où l'indice $j = 1, \ldots, N$ (avec l'entier naturel $N \leq n$) est sommé sur les racines distinctes (de valeurs différentes). Noter que l'on a ainsi $n = \sum_{j=1}^{N} g_j$.

Cas non homogène

Une équation différentielle linéaire non homogène peut être mise sous cette forme :

$$a_0(t) f(t) + a_1(t) \frac{df}{dt} + a_2(t) \frac{d^2 f}{dt^2} + \cdots + a_n(t) \frac{d^n f}{dt^n} = g(t) \ , \tag{2}$$

où la fonction $g(t)$ est appelée le second membre de l'équation différentielle.

<u>Résolution :</u>

Pour obtenir l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire non-homogène, il suffit de déterminer une seule solution particulière $f_p(t)$ de cette équation différentielle avec second membre et de l'ajouter à la solution générale $f_h(t)$ de l'équation différentielle correspondante où l'on aura imposé $g(t) = 0$.

1. On dit que la racine est dégénérée $g - 1$ fois. Le "degré de dégénérescence" peut également être dénommé "ordre de multiplicité".

Exercices :

I Equations différentielles d'ordre 1 (aspect fondamental)

1. Soit l'équation différentielle linéaire et homogène,

$$a\,k(x) + b\,\frac{dk(x)}{dx} = 0 \ ,$$

où a et b sont des constantes données non nulles.

(a) (SF67) Résoudre cette équation différentielle par la méthode générique.

(b) (SF67) Vérifier que la solution obtenue $k_0(x)$ est bien solution de l'équation considérée.

(c) (SF67) Résoudre l'équation différentielle initiale d'une manière plus directe.

(d) (SF69,SF215) En déduire une solution de l'équation différentielle non homogène, $a\,k(x) + b\,\frac{dk(x)}{dx} = d$, où d est une constante.

II Equations différentielles d'ordre 2 (aspect fondamental)

1. On considère l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre 2,

$$\omega^2\,x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \ ,$$

où ω est une constante. Physiquement, il s'agit de l'équation différentielle de l'**oscillateur harmonique** où $x(t)$ peut représenter la position d'une masse ponctuelle attachée à l'extrémité d'un ressort.

(a) (SF68) Résoudre cette équation différentielle par la méthode générique.

(b) (SF68) Vérifier que la solution obtenue $x_0(t)$ est bien solution de l'équation considérée.

(c) (SF68) Exprimer la solution sous la forme,

$$x_0(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) \ ,$$

où l'on exprimera les nouvelles constantes A, B en fonction des constantes $c_{1,2}$.

(d) (SF68) Vérifier que la nouvelle forme obtenue de $x_0(t)$ est toujours solution de l'équation considérée.

(e) (SF68,SF215,SF1198) Résoudre à présent l'équation différentielle non homogène linéaire d'ordre 2,

$$\omega^2\,x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} = K\,e^{i\Omega t+\phi} \ ,$$

ω, Ω, K, ϕ étant des constantes telles que $\omega \neq \Omega$. Physiquement, il s'agit de l'équation différentielle généralisée pour un **oscillateur harmonique forcé**. Vérifier que la solution obtenue est correcte.

2. Soit l'équation différentielle,

$$9\,h(y) + 6\,\frac{dh(y)}{dy} + \frac{d^2h(y)}{dy^2} = 0 \ .$$

   (a) (SF68) Résoudre cette équation différentielle par la méthode générique.
   (b) (SF68) Vérifier que la solution obtenue $h_0(y)$ est bien solution de l'équation considérée.

III Problèmes d'annales

1. MATH151 (Examen / 2017) (environ 5 points)
   (a) (SF68) Donner toutes les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 0 \ . \tag{3}$$

   (b) (SF68,SF215,SF1198) Chercher une solution particulière y_0 de l'équation différentielle

$$y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = e^{2t} \tag{4}$$

   de la forme $y_0(t) = C\,e^{2t}$.
   (c) (SF68,SF215) Donner toutes les solutions réelles de l'Équation différentielle (4).
   (d) (SF68,75) Trouver les solutions de l'équation (4) qui vérifient les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
2. MATH151 (Examen / 2017) **Nombres complexes et équations différentielles**
   (a) (SF68) Trouver les solutions r réelles de l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$. [Indication : les solutions sont des nombres entiers relatifs.]
   (b) (SF68) On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = 0 \ . \tag{5}$$

   Trouver toutes les solutions de cette équation.
   (c) (SF68,75) Déterminer la solution de (5) telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$.
   (d) (SF68,SF215,SF1198) On considère maintenant l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = e^{t} \ . \tag{6}$$

   Trouver une solution particulière $y_1(t)$ (une fonction exponentielle).
   (e) (SF68,SF215) Trouver toutes les solutions à valeurs réelles de l'équation (6).
   (f) (SF68,SF215,SF1198) Trouver une solution particulière $y_2(t)$ de

$$y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = 6e^{-2t} \ . \tag{7}$$

IV Raisonnement

1. (SF214) Résoudre l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 1 suivante (supposant $x \neq 0$),
$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x \ .$$
[Indication : prendre la solution à l'équation différentielle homogène de la forme $y_h(x) = C\,x^n$ et de même la solution particulière à l'équation différentielle non homogène de la forme $y_p(x) = D\,x^N$.]
2. (SF214) Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 suivante (supposant x réel),
$$y'(x) - \frac{x}{x^2+1} y(x) = 0 \ .$$
[Indication : prendre la solution de cette équation différentielle homogène de la forme $y_h(x) = C\,(x^2+1)^n$.]
3. (SF214) Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 suivante (supposant $x \neq -1$),
$$y'(x) - \frac{x}{x+1} y(x) = 0 \ .$$
[Indication : prendre la solution de cette équation différentielle homogène de la forme $y_h(x) = C\,e^{ax}\,(1+x)^b$.]
4. (SF215) Résoudre l'équation différentielle suivante,
$$x^2\,y''(x) - 2x\,y'(x) + (2 - x^2)\,y(x) = 0 \ .$$
[Indication : définir la fonction, $z(x) = y(x)/x$.]
5. (SF96,SF215) Problème inversé : trouver l'équation différentielle dont la solution est la fonction suivante,
$$f(x) \ = \ \frac{C+x}{1+x^2} \ , \tag{8}$$
C étant une constante et x une variable réelle. Vérifier que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle obtenue, dont on précisera la nature.