TD de Remédiation en Mathématiques

Changements de variables, intégrations par parties, formule de la moyenne

1. (MATH151, Examen 2017) **Intégrales**.
   (a) (SF60,SF62,SF319,SF63) Calculer $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$. [Indication : intégrer deux fois par parties.]
   (b) (SF60,SF62,SF319,SF65) Calculer $\int_{\ln(\pi)}^{\ln(2\pi)} \cos(e^x)\, e^x \, dx$. On vous suggère le changement de variable où $u = e^x$. Bien sûr $\ln(x)$ est le logarithme néperien de x.
2. (MATH151, Examen 2017) **Intégration par parties et changement de variable** (environ 4 points).
   (a) (SF60,SF62,SF319,SF64) Calculer $\int_0^1 xe^{3x} \, dx$. (Gardez les calculs sur la copie !)
   (b) (SF60,SF62,SF319,SF65) Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \sin x \sqrt{\cos x} \, dx$ en posant $\cos x = t$.
3. (SF60,SF62,SF319,SF64) (MATH151, Examen 2015) **Intégration** (environ 2 points). Calculer $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.
4. (MATH151, Examen 2014) **Calcul d'intégrales** (environ 4 points).
   (a) (SF60,SF62,SF319,SF64) Calculer $\int_1^2 2t \, \ln(t) \, dt$. On pourra effectuer une intégration par parties.
   (b) (SF60,SF62,SF319,SF211,SF320) On pose $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$. Calculer $f'(t)$. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{2e^t}{(1+e^t)^2} \, dt$.
5. (MATH151, Examen 2015) **Calcul d'intégrales** (environ 4 points).
   (a) (SF60,SF62,SF319,SF64) Calculer $\int_1^{\pi/2} t \, \sin(t) \, dt$. On pourra effectuer une intégration par parties.
   (b) (SF60,SF62,SF319,SF211,SF320) On pose $f(t) = \sqrt{1+e^t}$. Calculer $f'(t)$. En déduire la valeur de $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} \, dt$.
6. (MATH101, Examen 2017)
   (a) (SF60,SF62,SF319,SF211,SF320,SF1195) Calculer les intégrales $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$ et $\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \, dx$.
   (b) (SF60,SF62,SF319,SF64,SF211,SF320) En réalisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^1 \arctan(x) \, dx$.
7. (SF60,SF62,SF319,SF211,SF320) Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sin^4(x) \, dx$ en exprimant $\sin(x)$ en fonction de l'exponentielle imaginaire.

8. **Positivité**. On considère la fonction définie (sur l'ensemble des réels) par $f(x) = e^{x^2}$.

   (a) (SF60,SF62,SF319,SF321) Montrer que l'intégrale $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ est positive ou nulle, sans la calculer.

   (b) (SF60,SF62,SF319,SF321) Montrer $2 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 2e$ sans calculer l'intégrale.

9. (SFR5) Déterminer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :
   $f(x) = x^2$ sur $[1, 2]$,
   $g(x) = e^x$ sur $[-1, 1]$ et
   $h(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi/2]$.
   Commenter la valeur moyenne obtenue en s'appuyant sur un graphique, dans le deuxième cas.