# TD de Remédiation en Mathématiques

**Points et vecteurs**

## I Définitions

1. Qu'est-ce qui définit un vecteur ? (3 caractéristiques)
2. (a) Donner les coordonnées des deux points A et B représentés ci-dessous [Figure 1($\alpha$)] dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $O$ étant l'origine et $\vec{i}, \vec{j}$ deux vecteurs normés [1] orthogonaux.


Figure 1 – *Coordonnées de points ($\alpha$) et composantes de vecteurs ($\beta$).*

   (b) Dessiner sur la Figure 1($\alpha$) les points $C$ et $D$ de coordonnées respectives $(2, 3)$ et $(4, 0.5)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. (a) Quelles sont les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, représentés sur la Figure 1($\beta$), dans la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ où $\vec{i}, \vec{j}$ sont deux vecteurs normés orthogonaux ?

   (b) Dessiner dans la région des abscisses négatives de la Figure 1($\beta$) les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ de composantes respectives $(-2, 1)$ et $(2, 2)$ le long des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   (c) Exprimer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

4. Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$ défini par les deux points $M$ et $N$ dont les coordonnées dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont,

$$a)\ M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix}\ b)\ M\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}\ c)\ M\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. De norme égale à l'unité.

5. Montrer de manière géométrique que la norme d'un vecteur $\vec{V}$ de composantes $(c_1, c_2)$ dans une base orthonormée est égale à $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Commenter le signe de cette norme $||\vec{V}||$. En déduire la norme $||\overrightarrow{AB}||$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par les deux points $A$ et $B$ de coordonnées respectives $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$ dans un repère orthonormé. Généraliser l'expression obtenue pour $||\overrightarrow{AB}||$ au cas d'un espace à 3 dimensions.

# II Combinaisons et comparaisons

1. Développer puis simplifier ces 2 expressions vectorielles : $\vec{r} - 2(\vec{r} + \vec{s}) - \frac{1}{3}\vec{s}$ ; $-\frac{2}{5}\vec{r} + \vec{r} - \frac{1}{4}(\vec{r} - \vec{s})$.
2. On considère les vecteurs suivant, aux composantes données dans une base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$,

$$\vec{p}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{q}\begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix},\ \vec{r}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les composantes des vecteurs : $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} - \vec{q}$, $4\vec{p} + \vec{r}$ et $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$.

3. Dans les cas suivant, les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont-ils colinéaires ?

$$a)\ \vec{x}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{y}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}\ b)\ \vec{x}\begin{pmatrix} 10 \\ \frac{16}{2} \end{pmatrix},\ \vec{y}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\ c)\ \vec{x}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{y}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \vec{x}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{y}\begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}\ e)\ \vec{x}\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{y}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}.$$

# III Produit scalaire

1. Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de composantes respectives $(a_1, a_2)$ et $(b_1, b_2)$ dans un repère orthonormé.
   (a) Exprimer le produit scalaire $\vec{a}.\vec{b}$ en terme des normes $||\vec{a}||$ et $||\vec{b}||$ et de l'angle $\theta$ formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   (b) Écrire maintenant le produit scalaire $\vec{a}.\vec{b}$ en fonction des composantes données de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   (c) Démontrer, de manière géométrique, que les expressions obtenues aux questions 1(a) et 1(b) sont rigoureusement identiques [2]. La relation trigonométrique suivante sera utile, $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.
2. Développer les trois expressions vectorielles, $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w})$, $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$.
3. (a) Soient deux vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$. Donner leur produit scalaire en fonction d'un angle. En déduire ce que vaut leur produit scalaire si ces vecteurs sont orthogonaux.
   (b) Déterminer les composantes de $\vec{\alpha}$ sachant que ce vecteur est normé et orthogonal à $\vec{\beta}$ qui a lui pour composantes $(2, 3)$ dans la base orthonormée d'un plan. Commenter graphiquement le nombre de solutions obtenues.

2. Par simplicité, on se limitera au cas de composantes positives.

# IV Relation de Chasles

1. Simplifier ces combinaisons linéaires de vecteurs (construits à partir de points A, B, C et D) :

   $a)\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}\quad b)\ \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\quad c)\ \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\quad d)\ 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$ .

2. Soient les points A, B, C, D et E vérifiant les relations, $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$. Montrer que les points A, D et E sont alignés.

# V Réflexion

1. Les points P, Q et R sont-ils alignés dans les cas suivant ? Pour répondre, utiliser leurs coordonnées dans le plan.
   (a) $P\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$.
   (b) $P\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$.
   (c) $P\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix}\frac{17}{2}\\-5\end{pmatrix}$.
2. Calculer la distance entre les points $A$ et $B$ dans les cas suivant,

   $a)\ A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\ b)\ A\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\4\end{pmatrix}\ c)\ A\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\3\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\3\end{pmatrix}$ .

3. On considère les points et leurs coordonnées suivant, $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du point $M$ dans ces trois cas :
   (a) $M$ est tel que $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$.
   (b) $M$ est le milieu du segment $[BC]$.
   (c) $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.
4. Soient les points A, B et C de coordonnées respectives $(-2,3)$, $(1,4)$ et $(4,-5)$ dans un repère donné. Déterminer de deux manières différentes les coordonnées du point D qui est tel que ABCD soit un parallélogramme.
5. Soient un triangle formé par les 3 points $A$, $B$, $C$ et 2 points $I$, $J$ tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$.
   (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Donner $\overrightarrow{IC}$ en terme de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Démontrer que les droites $(IC)$ et $(BJ)$ sont parallèles. Faire un schéma.
6. Dessiner un triangle $ABC$ quelconque.
   (a) Construire les points $D$ et $E$ sachant que $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BC}$.
   (b) Démontrer que le point $C$ est le milieu du segment $[AD]$.