TD de Remédiation en Mathématiques

Trigonométrie

I Angles

1. Un angle mesure $\pi/2$ radians ; quelle est sa valeur en degrés ? Même question pour un angle mesurant [en radians] $-3\pi/2$, $\pi/4$ et $7\pi/6$.
2. Combien valent les fonctions trigonométriques suivantes prises en certains angles (indiqués en radians), $\cos(0)$, $\sin(-\pi/2)$, $\cos(\pi/3)$, $\sin(\pi/3)$, $\cos(5\pi/4)$, $\tan(-\pi/4)$ et $\tan(\pi/2)$?
3. Exprimer $\cos(\theta+\pi)$ puis $\sin(\theta+\pi/2)$ et enfin $\sin(\theta+3\pi/2)$ en fonction de $\cos\theta$. Que vaut $\tan(\pi/2-\theta)$?
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les deux équations $\cos(x)=0$, $\sin(x)=1/2$ et $\cos(3x)=-\sqrt{3}/2$. Ecrire précisément la forme des solutions.
5. Quelles sont les solutions de l'inéquation $\cos(t)>1/\sqrt{2}$ sur l'intervalle $t\in[0,2\pi]$?

II Géométrie

1. Calculer la longueur L dans le triangle rectangle de la Figure 1(a), dont un angle (en radians) et la longueur d'un côté (en mètres) sont indiqués.
2. Calculer l'angle $\widehat{DAC}$ (en radians) représenté sur la Figure 1(b) où certaines distances sont données (en mètres). Puis calculer l'angle $\widehat{AOB}$. Pour cela on s'aidera de la relation entre les 3 angles d'un triangle.

III Formules

1. Montrer que $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$. En déduire la valeur de $\tan(-\pi/3)$.
2. Exprimer $(\cos\beta+\sin\beta)^2$ en fonction du produit $\cos\beta\sin\beta$. Exprimer $(\cos\beta+\sin\beta)(\cos\beta-\sin\beta)$ en terme de la fonction $\cos\beta$ uniquement. Utiliser ces deux résultats pour calculer $(\cos\beta+\sin\beta)^2+(\cos\beta+\sin\beta)(\cos\beta-\sin\beta)$ de deux manières différentes.
3. Donner les trois expressions distinctes de $\cos 2\alpha$ en fonction de $\sin\alpha$ et/ou $\cos\alpha$. Exprimer $\sin 2\alpha$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. Démontrer alors ces deux relations,

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tan\alpha}-\tan\alpha=\frac{2}{\tan(2\alpha)}\ .$$

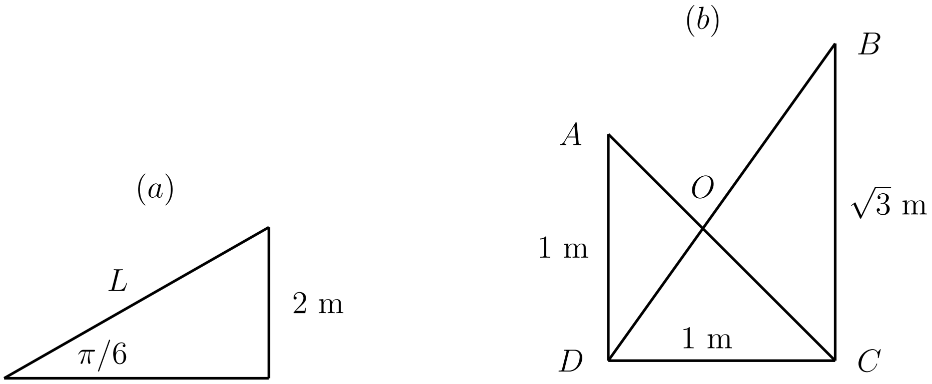

FIGURE 1 – *Calculs de longueur et d'angle.*

4. Simplifier l'expression $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$.
5. Calculer [1] le produit $\sin(x+y)\cos(x-y)$. Simplifier le résultat au maximum.
6. En utilisant les rappels de la question précédente, trouver une expression pour $\cos(a+b)$. Déduire alors de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ une expression pour $\cos(p)+\cos(q)$ en terme de fonctions du type $\cos[f(p,q)]$ exclusivement, où f repésente une fonction linéaire en p et q.

IV Réflexion

1. Quelle est la période de la fonction $\cos x$? Tracer la fonction $\cos(2x)$ en indiquant quelques valeurs caractéristiques ; quelle est sa période ? Quelles sont les périodes respectives des fonctions $2\cos x$ et $\tan(x+\pi)$?
2. Calculer $\cos(\pi/12)$ en décomposant l'argument de la fonction en $\pi/3 - \pi/4$.
3. Résoudre l'équation $\cos(3\alpha) = \sin(2\alpha)$ en se ramenant à des fonctions de type cosinus uniquement. On donnera les solutions sur $\mathbb{R}$ puis restreintes à l'intervalle fermé $[-\pi, \pi]$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos(x) = \cos(2x)$ avec deux méthodes différentes (en imposant des arguments équivalents ou bien en se ramenant à des arguments en x exclusivement). Bien montrer que les deux expressions de solutions obtenues sont rigoureusement identiques.

1. On rappelle ici deux formules trigonométriques : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.