

PROBLÈME DE MÉCANIQUE CLASSIQUE

Le glaçon

Un *barman* préparant un cocktail (de jus de fruits) jette un glaçon dans une coupe vide. On va chercher à déterminer sous quelle condition le glaçon, de masse m , reste bien dans le verre.

1. **Trajectoire AB.**- Le glaçon glisse d'abord sans frottement le long du verre en partant du bord (point A) et en suivant un quart de cercle de rayon r_0 jusqu'au point B.

- Les forces s'exerçant sur le système glaçon sont donc son poids et la réaction du verre. Représenter ces forces vectorielles, \vec{P} et \vec{R} respectivement, sur un schéma. Sont-elles conservatives ? Pour \vec{R} , appuyer la réponse sur l'application du principe fondamental de la dynamique.
- Que vaut la variation de l'énergie mécanique du système entre les points A et B ? En déduire la variation de l'énergie cinétique en fonction de m , r_0 et g (accélération universelle au voisinage de la surface terrestre).
- Exprimer le travail effectué par le poids sur le trajet AB comme une intégrale – dont on précisera les bornes – faisant intervenir m , g , β (l'angle entre la verticale et le rayon r_0 pointant vers le glaçon) et dx (l'élément infinitésimal de longueur le long de l'arc de cercle parcouru). On prend $x = 0$ en A. Puis exprimer β en fonction de r_0 et x (distance d'arc de cercle parcourue correspondant à l'angle $\pi/2 - \beta$) afin de pouvoir intégrer. Enfin, intégrer.
- Déduire de la question précédente, et du travail de la réaction \vec{R} , la variation de l'énergie cinétique entre A et B. Comparer au résultat de la question 1b.
- Exprimer la norme de la vitesse du glaçon au point B, v_B , en termes de la vitesse initiale v_A , r_0 et g . Comparer v_A et v_B .

2. **Trajectoire BC.**- Le glaçon glisse ensuite horizontalement sur le fond de la coupe jusqu'à un point C; il subit un frottement solide dû au sucre déposé dans le verre. Ce frottement se manifeste par une force, $\vec{f} = -\lambda \|\vec{R}\| \vec{u}$, λ étant une constante positive et \vec{u} un vecteur unitaire orienté horizontalement dans le sens de mouvement du système.

- Les trois forces en jeu le long du trajet BC sont-elles conservatives ?
- L'énergie mécanique du système est-elle conservée ? Justifier.
- Calculer le travail de \vec{f} le long de BC. Donner le résultat en fonction de λ , m , g et la distance BC. Discuter le signe.
- En déduire la variation d'énergie cinétique du système entre B et C.
- Exprimer la norme de la vitesse du glaçon au point C, v_C , en termes de v_B , λ , BC et g . Comparer v_B et v_C .

3. **Trajectoire CD.**- Dans la dernière partie de la trajectoire, le glaçon remonte sans frottement le long de l'autre côté du verre, en suivant un quart de cercle similaire de rayon r_0 , du point C jusqu'au bord opposé (point D).
- (a) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, donner la variation d'énergie cinétique du système entre C et D. On prendra pour l'énergie potentielle gravitationnelle, $E_p(h) = mgh$ où h est l'altitude.
 - (b) En déduire la norme de la vitesse du glaçon au point D, v_D , en termes de v_C , r_0 et g . Comparer v_C et v_D .
 - (c) Exprimer v_D en fonction de v_A , λ , BC et g .
 - (d) Quelle est la vitesse initiale limite, v_A^{lim} , pour que le glaçon reste dans le verre ? Est-ce une vitesse minimum ou maximum ?
 - (e) Application numérique: calculer v_A^{lim} . On donne $\lambda = 0.5$ (unités S.I.), BC = 5cm et $g \simeq 10m.s^{-2}$.
 - (f) Si la coupe avait été pleine, on aurait dû prendre en compte un frottement visqueux tout le long de la trajectoire du glaçon. Est-ce que la vitesse finale aurait été supérieure ou inférieure ? Baser votre réponse qualitativement sur les théorèmes de l'énergie le long des trois trajets, AB, BC puis CD.
