Synthèse du formalisme quantique

(G. Moreau)

(I) Cadre mathématique

Espace de Hilbert = $\underbrace{\text{Espace de Banach}}$ dont la norme découle du (produit scalaire ou) hermitien.
($\mathcal{H}$)

↳ Espace vectoriel normé sur un sous-corps de $\mathbb{C}$ et complet pour la distance issue de sa norme.

= Généralisation pour toute dimension (dont ∞) d'un espace hermitien.

Espace hermitien = Espace vectoriel euclidien bâti sur le corps $\mathbb{C}$. (donc muni d'un produit hermitien)

Espace vectoriel euclidien = Espace vectoriel muni d'un $\underbrace{\text{produit scalaire}}$.

→ Forme bilinéaire symétrique définie positive : $\langle v_1, v_2 \rangle \in$ corps

↳ $\|v\| \triangleq \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (norme)

Espace vectoriel = Ensemble des éléments "v" muni d'une
($\mathcal{E}$)

"produit" * loi externe : $\lambda \in$ corps ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$: scalaires) $\Rightarrow \lambda v \in \mathcal{E}$

- $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1\lambda_2)v$. $(\lambda_1+\lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$. $\lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$. $1v = v$

"composition" * loi interne : $v_1, v_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathcal{E}$

- $(v_1+v_2)+v_3 = v_1 + (v_2+v_3)$. $0 + v = v + 0 = v$

"élément neutre"

↳ Combinaisons linéaires $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ utiles.

Opérateurs "$\hat{O}$" de $\mathcal{E}$:
$v \in \mathcal{E} \Rightarrow \hat{O}v = v' \in \mathcal{E}$

Linéarité (nécessaire) :
$\hat{O}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \hat{O} v_1 + \lambda_2 \hat{O} v_2$

(II) Formalisme quantique

"Représentations équivalentes ...de Heisenberg | ...de Schrödinger"

Notation symbolique de Dirac

Element $|\alpha\rangle$ ("ket") $\in \mathcal{H}$
Produit hermitien $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ } état physique

Projecteur orthogonal : $(|\alpha\rangle\langle\alpha|)|\eta\rangle = \langle\alpha|\eta\rangle|\alpha\rangle$

"relation de fermeture"

Base OrthoNormée : $\{|\alpha_m\rangle ; \langle\alpha_m|\alpha_{m'}\rangle = \delta_{mm'}\} \Rightarrow \underbrace{\sum_m |\alpha_m\rangle\langle\alpha_m| = \mathbb{1}}$

$\Leftrightarrow \quad 1 = \langle\beta|\beta\rangle = \langle\beta|\mathbb{1}|\beta\rangle = \sum_m \langle\beta|\alpha_m\rangle\langle\alpha_m|\beta\rangle$

B.O.N. continue $\rightarrow$ ... = ...
$\{|x\rangle ; \langle x|y\rangle = \delta(x-y)\}$

$= \int dx \underbrace{\langle\beta|x\rangle}\langle x|\beta\rangle$

"conjugué hermitien $(\langle x|\beta\rangle)$" | complexe

Observable = opérateur hermitique : $\hat{O}^{+} = \hat{O}$

ex : $\hat{O} = \hat{P}$, $\hat{O} = \hat{X}$ avec $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$ "valeur propre" | "vecteur propre"

Représentation x

"bra"

$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x) \in \mathcal{H}$: "fonction d'onde"

position du système

[1D] "produit hermitien sur fonctions d'onde"

$= \int dx\, \varphi_\beta^*(x)\, \varphi_\beta(x) = \int dx\, |\varphi_\beta(x)|^2$

"fonctions de carré sommable (L^2)"

$\langle x|\hat{O}|\alpha\rangle = \hat{O}\,\varphi_\alpha(x)$

Résultats possibles ($\in \mathbb{R}$) — valeurs propres α_m ; états propres $\underbrace{|\alpha_m^g\rangle}_{\text{B.O.N.}}$

Représentation matricielle

$|\alpha\rangle \equiv$ vecteur $\quad \langle\alpha| = (|\alpha\rangle)^{+} \hat{=} (|\alpha\rangle)^{t*}$

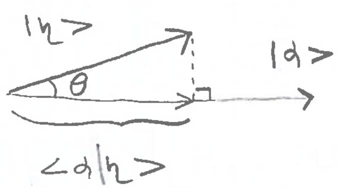
$\langle\alpha|\beta\rangle = \sum_i \alpha_i^* \beta_i$ $\qquad \langle\alpha|\eta\rangle = \| |\alpha\rangle \| \cdot \| |\eta\rangle \| \cdot \cos\theta$

corps $\mathbb{R}$

$\hat{O}^{+} \hat{=} \hat{O}^{t*}$

$\langle i|\hat{O}|j\rangle = \underbrace{O_{ij}}$

élément de matrice



Théorie de la mesure

Système (dans état initial normé $|i\rangle$) Observable $\hat{O}$ mesurée :

$P_{|i\rangle}(\alpha_m) = \sum_g |\langle\alpha_m^g|i\rangle|^2 \Rightarrow \sum_m P_{|i\rangle}(\alpha_m) = 1$ ✓

↓ spectre continu $\qquad |f\rangle = \sum_g |\alpha_m^g\rangle\langle\alpha_m^g|i\rangle \big/ \text{Normé}$

$\frac{dP_{|i\rangle}(x)}{dx} = |\underbrace{\langle x|i\rangle}_{\varphi_i(x)}|^2 \Rightarrow \int dx \frac{dP}{dx} = 1$ ✓