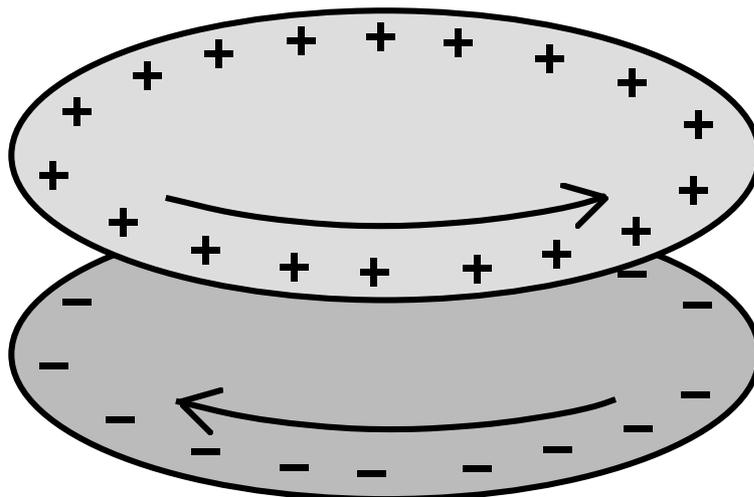


Université Paris-Sud Orsay
M1 Master de Physique
PhysF-452A

Travaux Dirigés

ÉLECTRODYNAMIQUE
CLASSIQUE ET QUANTIQUE



Électrodynamique classique et quantique (2007-08)

1	Moment angulaire du champ électromagnétique	2
2	Électrodynamique et relativité restreinte	6
3	Nombre de photons d'une onde dans une boîte	10
4	Monopôle magnétique	12
5	Le lagrangien de l'électromagnétisme et ses symétries	14
6	Lagrangien de Stueckelberg	17
7	Supraconductivité	19
8	Tenseur impulsion-énergie	21
9	Électrodynamique quantique	23
10	Déplacement de Lamb (Lamb shift)	25
11	Effet Casimir dynamique	29
12	Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs	34
13	Antenne mince	38
14	Désintégration bêta	40
15	Rayonnement d'un anneau de stockage	41

Textes rédigés par Victor Alessandrini, Pierre Binétruy, Bernard Jancovici, Jean-Jacques Labarthe, Jean-Pierre Maillet, Olivier Martin, Grégory Moreau, Nicolas Pavloff et Frédéric van Wijland.

1

Moment angulaire du champ électromagnétique

1.1 Prologue

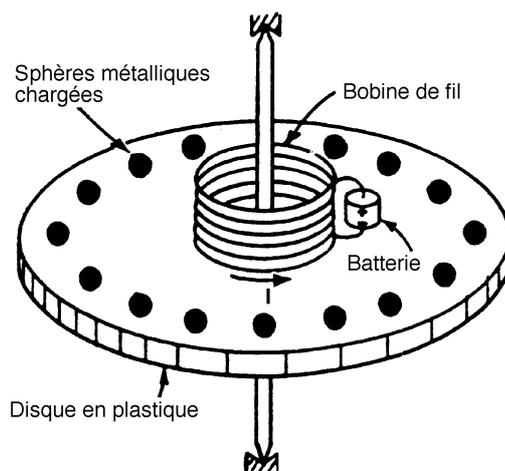


Fig. 17-5. Le disque va-t-il se mettre à tourner quand on supprime le courant I ?

« Imaginons que nous construisons un appareil comme celui de la Fig. 17-5. Un disque circulaire mince en matière plastique est fixé par d'excellents roulements sur un arbre concentrique, de sorte qu'il peut tout à fait librement tourner autour de cet axe. Une bobine de fil ayant la forme d'un court solénoïde centré sur l'axe de rotation est placée sur le disque. Ce solénoïde est parcouru par un courant continu I fourni par une petite pile montée aussi sur le disque. Un certain nombre de petites sphères métalliques isolées les unes des autres et du solénoïde par la matière plastique du disque, sont disposées près du bord et sont uniformément espacées le long de la circonférence. Chacune de ces petites sphères conductrices porte la même charge électrostatique Q . L'état de cet ensemble est stationnaire et le disque est au repos. Supposons maintenant que par accident – ou grâce à un arrangement préalable – le courant dans le solénoïde soit interrompu, sans aucune intervention de l'extérieur. Tant que le courant passait, il y avait un flux magnétique à travers le solénoïde plus ou moins parallèle à l'axe du disque. Quand le courant est interrompu, ce flux doit s'annuler. Ceci produira par conséquent un champ électrique induit qui circulera le long de cercles centrés sur

l'axe. Les sphères chargées sur le périmètre du disque subiront toutes un champ électrique tangent au périmètre du disque. Cette force électrique a le même sens pour toutes les charges et produira donc un couple résultant sur le disque. A partir de ce raisonnement nous devrions nous attendre à ce que le disque se mette en rotation dès que le courant dans le solénoïde disparaît. Si nous connaissions le moment d'inertie du disque, le courant dans le solénoïde, et les charges des petites sphères, nous pourrions calculer la vitesse angulaire résultante. »

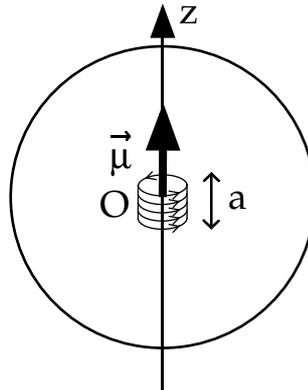
« Mais on pourrait aussi raisonner d'une autre façon. Partant du principe de conservation du moment cinétique, nous pourrions dire que le moment cinétique du disque tout équipé est initialement nul, donc, le moment cinétique de l'ensemble doit rester nul. Il ne doit pas y avoir de rotation quand le courant est arrêté. Quel est le raisonnement correct ? Le disque tournera-t-il, oui ou non ? Nous vous laisserons réfléchir à cette question. »

(cours de Physique de Feynman)

La réponse est que le moment angulaire était emmagasiné dans le champ électromagnétique.

1.2 Le problème

On se propose de discuter le problème avec un arrangement un peu différent, pour que les calculs puissent être faits explicitement.



On considère une sphère de rayon R et de centre O mobile autour de l'axe Oz . La sphère porte une densité de charge superficielle uniforme ; sa charge totale est Q . Au voisinage du centre de la sphère se trouve une petite bobine parcourue par un courant électrique ; cette bobine est de dimensions $a \ll R$, et le champ magnétique qu'elle crée en un point \vec{r} quelconque tel que $r \gg a$ est assimilable à celui d'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ porté par l'axe Oz :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (1.1)$$

1. a. Montrer que, en tout point \vec{r} tel que $r \gg a$, le champ \vec{B} est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{\mu}}{r^5}. \quad (1.2)$$

- b. Déterminer en tout point \vec{r} le champ électrique \vec{E} et la densité $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ de quantité de mouvement du champ électromagnétique.

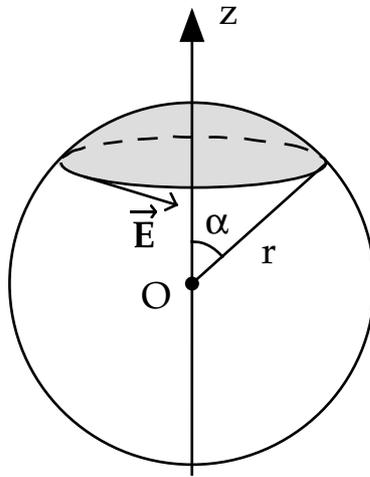
- c. Déterminer \vec{L} , moment angulaire total par rapport à O du champ électromagnétique. On rappelle le double produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}; \quad (1.3)$$

on pourra éventuellement utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .

2. On suppose que la sphère est constituée d'un matériau isolant et que les charges superficielles qu'elle porte lui sont rigidement liées. On veut montrer que, si on diminue μ lentement, jusqu'à l'annuler, le courant dans la bobine, le moment angulaire \vec{L} du champ est transmis à la sphère qui se met à tourner autour de Oz .

a. Le moment magnétique du solénoïde est maintenant une fonction $\vec{\mu}(t) = \vec{k}\mu(t)$, où \vec{k} est le vecteur unitaire porté par l'axe Oz . On veut que le champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$ soit encore donné, à tout instant, par les expressions (1.1) et (1.2) comme en régime stationnaire, dans tout un domaine sphérique de rayon grand devant R . Préciser le sens qu'il faut donner à μ lentement pour qu'il en soit ainsi : quel doit être l'ordre de grandeur minimum du temps T pendant lequel le courant diminue.



- b. La variation temporelle du champ \vec{B} entraîne l'apparition d'un champ \vec{E} supplémentaire qu'on calculera.

Une méthode possible est de calculer d'abord le flux ϕ du champ \vec{B} à travers une calotte sphérique de rayon r ($r \gg a$) et de demi-angle α ; on utilisera des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Pour des raisons de symétrie, le champ \vec{E} correspondant a seulement une composante E_ϕ dont on calculera la circulation sur le cercle frontière de la calotte ; on en déduira E_ϕ en fonction de $r, \alpha, d\mu/dt$.

- c. Le champ E_ϕ exerce sur la sphère uniformément chargée des forces dont on calculera le moment \vec{M} par rapport à O .

- d. Calculer le moment angulaire final de la sphère et vérifier qu'il est égal à celui obtenu en 1c.

3. On veut vérifier qu'il faut fournir au système un moment angulaire \vec{L} pour bâtir la configuration de champs décrite en 1.

On commence par créer un champ \vec{B} statique de forme (1.2) en alimentant en courant la bobine, puis on apporte les charges sur la sphère depuis l'infini.

- a. Le long de la demi-droite issue de O et de vecteur unitaire \vec{r}/r , on apporte une charge ponctuelle δq , depuis l'infini, avec une vitesse $\dot{r}(\vec{r}/r)$. Cette charge qui se déplace dans \vec{B} subit une force de Lorentz contre laquelle il faut lutter. Quelle est la force extérieure latérale $\delta\vec{F}$ qu'il faut exercer à un instant

donné pour maintenir la charge δq sur sa trajectoire ? Quel est la composante $\delta \mathcal{M}_z$ du moment par rapport à O de cette force $\delta \vec{F}$?

b. Quel est le moment angulaire δL_z acquis par le système lorsque la charge δq va de l'infini au point (R, θ) ?

c. Si on bâtit ainsi la distribution uniforme de charge, de charge totale Q , sur la sphère de rayon R , quel est le moment angulaire total L_z acquis par le système ?

4. Dans la question 2., on a supposé qu'on diminuait **lentement** le courant dans la bobine. Décrire **qualitativement** l'évolution du système si on coupe le courant **brusquement**.

2

Électrodynamique et relativité restreinte

2.1 Jeux cinématiques

Soient deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' . \mathcal{R}' se déplace par rapport à \mathcal{R} avec la vitesse \vec{V} . Un événement a pour coordonnées (ct, x, y, z) dans \mathcal{R} et (ct', x', y', z') dans \mathcal{R}' . On désigne par L_x la transformation de Lorentz spéciale au sens strict (c'est à dire telle que la direction de la vitesse soit parallèle à l'axe Ox). Enfin à toute vitesse \vec{w} on associera les grandeurs :

$$\vec{\beta}_w = \frac{\vec{w}}{c} \quad ; \quad \beta_w = |\vec{\beta}_w| \quad ; \quad \gamma_w = (1 - \beta_w^2)^{-1/2}. \quad (2.1)$$

Soit alors une particule M animée d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{U} (resp. \vec{U}') dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}').

A/ Exprimer \vec{U} en fonction de \vec{U}' et de \vec{V} . Montrer qu'à l'approximation des vitesses V faibles devant celle de la lumière ($\beta_V^2 \ll 1$) on a :

$$\vec{\beta}_U = \vec{\beta}_{U'} + \vec{\beta}_V - (\vec{\beta}_{U'} \cdot \vec{\beta}_V) \vec{\beta}_{U'}. \quad (2.2)$$

B/ Ecrire cette loi de composition en coordonnées sphériques d'axe Ox .

C/ Que deviennent ces dernières formules lorsque $U' = c$? Retrouver, lorsque $\beta_V^2 \ll 1$, la valeur de l'angle d'aberration de la lumière : $\Delta\theta = \beta_V \sin\theta'$.

D/ Obtenir à l'aide de (2.B) la relation $\gamma_U = \gamma_V \gamma_{U'} (1 + \vec{\beta}_V \cdot \vec{\beta}_{U'})$. En déduire que $(\gamma_U c, \gamma_U \vec{U})$ constitue un quadrivecteur (quadrivitesse).

E/ On suppose que $\vec{U} \parallel \vec{V} \parallel Ox$. Soit \mathcal{R}'' le référentiel d'inertie se déduisant de \mathcal{R}' par $L_x(\vec{U}')$. Retrouver la loi de composition des vitesses en écrivant que $L_x(\vec{U}) = L_x(\vec{U}')L_x(\vec{V})$. Commentez.

F/ On ignore désormais les référentiels \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' , par contre on introduit le référentiel propre \mathcal{R}_0 de la particule. On désigne par τ le temps propre de la particule. Démontrer que :

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\gamma_U c, \gamma_U \vec{U}). \quad (2.3)$$

Conclusion ? On note u^α cette quadrivitesse. L'exprimer dans \mathcal{R} et \mathcal{R}_0 puis calculer $u^2 = u_\alpha u^\alpha$.

On définit la quadriaccélération $A^\alpha = du^\alpha/d\tau$. Exprimer A^α dans \mathcal{R} . Que vaut $u^\alpha A_\alpha$? Montrer que l'invariant A^2 s'écrit (pour clarifier les notations on a abandonné les indices β_u et γ_u) :

$$A^2 = -c^2 \gamma^4 \left[\dot{\vec{\beta}}^2 + \gamma^2 \beta^2 (\dot{\beta})^2 \right] = -c^2 \gamma^6 \left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})^2 \right]. \quad (2.4)$$

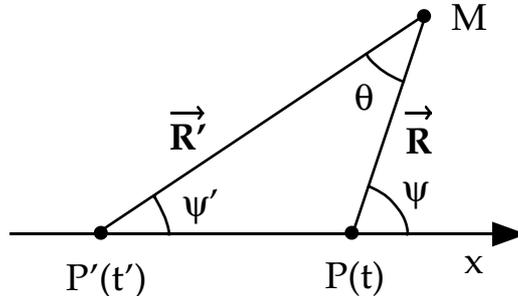
2.2 Champ d'une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme

Soit une particule de charge q qui se déplace sur Ox à la vitesse uniforme $\vec{v} = v \hat{x}$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} et qui passe à l'origine à l'instant initial. On désigne par \mathcal{R}_0 le référentiel propre associé à cette particule. Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} .

A/ Evaluer dans \mathcal{R}_0 le quadripotential du champ créé en M . En déduire les expressions de \vec{E}_0 et \vec{B}_0 . Exprimer dans \mathcal{R} le quadripotential en fonction de (x, y, z, t) .

B/ A partir d'ici on ne considérera plus que le référentiel \mathcal{R} . t' désignera le temps retardé. Démontrer que le potentiel scalaire peut se mettre sous la forme :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{1/2}}. \quad (2.5)$$



C/ Démontrer que $\sin \theta = \beta \sin \psi$. Retrouver alors l'expression de ϕ obtenue en cours grâce à la technique des potentiels retardés.

D/ Exprimer \vec{E} en fonction de x, y, z, t . Etudier les variations de E_x et de $E_{y(z)}$ en fonction de $\xi = vt$, en particulier pour $\beta \simeq 0$ et pour $\beta \lesssim 1$. Commenter. Tracer les lignes de champ.

Exprimer \vec{B} . Montrer que $\vec{B} = \frac{\vec{\beta}}{c} \wedge \vec{E}$. Comparer à la relation donnée en cours.

2.3 Transformation du champ électromagnétique

Soient deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Un même événement a pour coordonnées $x^\mu = (ct, x, y, z)$ dans \mathcal{R} et $x'^\mu = (ct', x', y', z')$ dans \mathcal{R}' , l'origine $(0, 0, 0, 0)$ correspondant à un même événement dans les deux référentiels. On examinera les deux cas suivants :

1. \mathcal{R}' se déplace par rapport à \mathcal{R} avec la vitesse $\vec{V} = \vec{\beta}c$ parallèle à l'axe Ox (transformation de Lorentz spéciale).

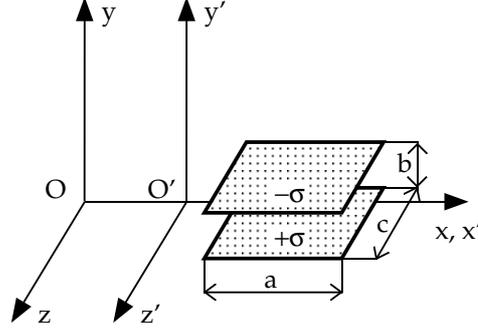
2. \mathcal{R}' s'obtient par rotation de \mathcal{R} de l'angle θ autour de l'axe Oz , avec $t' = t$ (rotation purement spatiale).

A/ Dans ces deux cas, écrire la transformation du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ et en déduire les champs $E'_x, E'_y, E'_z, B'_x, B'_y, B'_z$ dans \mathcal{R}' en fonction des champs $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ dans \mathcal{R} .

B/ En déduire le champ \vec{E}, \vec{B} créé par une particule de charge q qui se déplace sur Ox à la vitesse uniforme $\vec{V} = V\hat{x}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} et qui passe à l'origine à l'instant initial.

C/ Un condensateur plan ($b \ll a, c$) est immobile dans le référentiel \mathcal{R} . Déterminer le champ \vec{E}', \vec{B}' dans le référentiel \mathcal{R}' de deux façons différentes :

1. par transformation du champ après avoir déterminé le champ dans le référentiel \mathcal{R} ;
2. par un calcul direct dans le référentiel \mathcal{R}' après avoir déterminé les charges et courants dans ce référentiel.



2.4 Le symbole de Levi-Civita

On pose :

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation paire de } 0123 ; \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation impaire de } 0123 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

A/ Déterminer $\Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta \Lambda^2_\gamma \Lambda^3_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\Lambda^0_\alpha \Lambda^0_\beta \Lambda^1_\gamma \Lambda^2_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

En déduire que le tenseur $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ garde la même expression dans les transformations de Lorentz propres.

B/ Exprimer les composantes du tenseur dual de $F^{\mu\nu}$:

$$\star F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \quad (2.7)$$

en fonction de $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$.

C/ Récrire en terme du tenseur dual $\star F^{\mu\nu}$ les équations de Maxwell

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.8)$$

où $\alpha, \beta, \gamma =$ sont trois des nombres 0, 1, 2, 3.

D/ Ecrire l'expression du tenseur dual en fonction du quadripotentiel A^μ . Vérifier que l'équation trouvée en **C/** est satisfaite par cette expression.

E/ Exprimer les invariants $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ et $\star F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ en fonction de \vec{E} et \vec{B} .

2.5 Quadrivecteur courant et tenseur impulsion-énergie d'une particule en mouvement

Une particule de charge q et masse m est animée d'un mouvement décrit dans le référentiel d'inertie \mathcal{R} par les fonctions $\xi^\mu = (ct, \vec{\xi})$ donnant les coordonnées de la particule en fonction du temps t dans \mathcal{R} ou du temps propre τ de la particule.

A/ Ecrire la densité de charge $\rho(x, y, z, t)$ et le courant $\vec{J}(x, y, z, t)$ en fonction de $q, \vec{\xi}(t)$.

Montrer que le quadrivecteur courant peut s'écrire

$$j^\alpha(x^\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} qc\delta^{(4)}(x^\beta - \xi^\beta(\tau))\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}d\tau \quad (2.9)$$

où $\delta^{(4)}(u^\beta) = \delta(u^0)\delta(u^1)\delta(u^2)\delta(u^3)$ est un produit de quatre fonctions de Dirac. On rappelle que si l'équation $f(u) = 0$ a une seule solution $u = u_0$, alors

$$\delta(f(u)) = \frac{\delta(u - u_0)}{\left|\frac{df}{du}\right|_{u=u_0}}. \quad (2.10)$$

Discuter l'invariance de charge en utilisant Eq. (2.9).

B/ Le tenseur impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ de la particule est donné par

$$T^{\alpha\beta}(x^\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} mc\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}\delta^{(4)}(x^\gamma - \xi^\gamma(\tau))d\tau. \quad (2.11)$$

Vérifier les propriétés suivantes de ce tenseur :

1. c'est bien un tenseur pour les transformations de Lorentz ;
2. il est symétrique ;
3. $T^{0\mu}(x, y, z, t)$ est la densité d'impulsion-énergie de la particule, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\iiint_V T^{0\mu}(x, y, z, t) dx dy dz$$

donne c multiplié par le quadrivecteur impulsion-énergie $p^\mu = (W/c, \vec{P})$ de la particule si celle-ci est dans le volume V à l'instant t , ou 0 sinon ;

4. si la particule est en mouvement uniforme, alors $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

3

Nombre de photons d'une onde dans une boîte

[Partiel du 27 octobre 2000 (premier problème)]

On considère une boîte remplie d'une radiation monochromatique de pulsation ω . Si U désigne l'énergie électromagnétique totale dans la boîte, le nombre de photons N dans la boîte est donné par $\hbar N = \frac{U}{\omega}$. On s'attend donc à ce que la grandeur classique $\frac{U}{\omega}$ soit un invariant de Lorentz. C'est ce qu'on se propose de vérifier dans ce problème (Einstein, 1905).

Soient deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' . On note $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ des vecteurs unitaires tridimensionnels portés par les axes $(Ox), (Oy), (Oz)$ respectivement. Le référentiel \mathcal{R}' se déplace par rapport à \mathcal{R} à la vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Un événement a pour coordonnées (ct, x, y, z) dans \mathcal{R} et (ct', x', y', z') dans \mathcal{R}' .

Soit l'onde plane monochromatique de pulsation $\omega = kc$ dont les champs électrique et magnétique sont donnés dans le référentiel \mathcal{R} par

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = E_0 \cos(\omega t - kx)\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}(t, x, y, z) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

On posera $\beta = \frac{v}{c}$.

1. Déterminer les champs électrique $\mathbf{E}'(t', x', y', z')$ et magnétique $\mathbf{B}'(t', x', y', z')$ de l'onde (3.1) dans le référentiel \mathcal{R}' . Montrer que la pulsation ω' de l'onde dans le référentiel \mathcal{R}' a pour expression $\omega' =$

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\omega.$$

2. On considère, dans le référentiel \mathcal{R} , la boîte (virtuelle) \mathcal{B} suivante. À l'instant $t = 0$, la boîte est la boule de rayon R centrée à l'origine. La boîte se déplace sans se déformer à la vitesse $c\beta\mathbf{e}_x$. Le bord de la boîte à l'instant t est la sphère d'équation $(x - ct)^2 + y^2 + z^2 = R^2$. La boîte n'a pas d'existence réelle ; elle est seulement imaginée et ne modifie pas l'onde (3.1).

2.a. Pourquoi, dans le référentiel \mathcal{R} , l'énergie électromagnétique totale U contenue dans la boîte \mathcal{B} est-elle constante au cours du temps ?

2.b. Montrer qu'une valeur approchée de U dans le cas où $kR \gg 1$ est $U \simeq \frac{4\pi\epsilon_0}{6} E_0^2 R^3$.

2.c. Décrire l'apparence de la boîte \mathcal{B} dans le référentiel \mathcal{R}' à l'instant t' . Déterminer son volume dans le référentiel \mathcal{R}' en fonction de R et β . On pourra chercher l'équation cartésienne de la boîte dans le référentiel \mathcal{R}' .

2.d. Calculer, dans le référentiel \mathcal{R}' , une valeur approchée de l'énergie électromagnétique totale U' contenue dans la boîte, puis vérifier que $\frac{U}{\omega} = \frac{U'}{\omega'}$.

3. On considère maintenant une boîte réelle \mathcal{K} en forme de cube de côté a et immobile dans le référentiel

\mathcal{R} . La boîte \mathcal{K} limite le volume

$$|x| \leq \frac{a}{2}, \quad |y| \leq \frac{a}{2}, \quad |z| \leq \frac{a}{2}$$

On suppose que les bords du cube sont réfléchissants : à l'onde (3.1) se superpose une onde réfléchie se propageant en sens inverse de la forme :

$$\mathbf{E}_r(t, x, y, z) = E_0 \cos(\omega t + kx) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}_r(t, x, y, z) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \mathbf{e}_z. \quad (3.2)$$

3.a. Quelle est l'énergie électromagnétique totale U_K , calculée dans le référentiel \mathcal{R} , contenue dans la boîte \mathcal{K} (on supposera $ka \gg 1$) et le nombre de photons N contenus dans \mathcal{K} ?

3.b. Quelle est l'apparence de la boîte \mathcal{K} dans le référentiel \mathcal{R}' . Déterminer son volume V' dans le référentiel \mathcal{R}' en fonction de a et β .

3.c. Déterminer les champs électrique $\mathbf{E}'_r(t', x', y', z')$ et magnétique $\mathbf{B}'_r(t', x', y', z')$ de l'onde réfléchie (3.2) dans le référentiel \mathcal{R}' .

3.d. Calculer dans le référentiel \mathcal{R}' les nombres de photons N_1 et N_2 dans la boîte \mathcal{K} dans chacune des ondes (3.1) et (3.2) et vérifier que $N = N_1 + N_2$.

4

Monopôle magnétique

[Partiel du 5 novembre 1999 (premier problème)]

En suivant une méthode proposée par Dirac, nous allons symétriser les équations de Maxwell sous la dualité électrique-magnétique et montrer que cela implique l'existence de monopôles magnétiques (analogues pour le magnétisme des charges électriques ponctuelles), dont nous étudierons les propriétés.

I.1. Écrire les équations de Maxwell (en l'absence de charge et de courant) sous forme covariante relativiste.

I.2. À quoi correspond la transformation, dite *transformation de dualité électrique/magnétique* $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}/c$ sur les tenseurs $F^{\mu\nu}$ et $\star F^{\mu\nu}$? On rappelle que le tenseur dual est défini par $\star F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$; on rappelle également que le tenseur de Levi-Civita vérifie $\varepsilon^{\lambda\mu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\tau} = -2(\delta_\nu^\rho\delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\rho\delta_\nu^\sigma)$. Montrer que les équations écrites en **I.1** sont bien invariantes sous cette transformation.

I.3. On considère maintenant les équations de Maxwell en présence de matière. Plus exactement, on les écrit :

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\mu, \quad (4.1)$$

$$\partial_\nu \star F^{\nu\mu} = \mu_0 k^\mu, \quad (4.2)$$

où $k^\mu = (\sigma, \mathbf{K})$ où σ et \mathbf{K} sont des fonctions des x^μ . Rappeler la signification des composantes de j^μ . Comment doivent se transformer j^μ et k^μ sous transformation de dualité pour que le système d'équations ci-dessus soit invariant ?

I.4. On suppose que la fonction $\sigma(\mathbf{x})$ est indépendante du temps et qu'elle est localisée dans un volume V de l'espace tridimensionnel (c'est-à-dire $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ si le point de coordonnées x^μ est en dehors du volume V) et on note

$$g = \int_V d^3x \sigma(\mathbf{x}). \quad (4.3)$$

Exprimer en fonction de g le flux de champ magnétique à travers une surface S fermée entourant V . Comment peut-on alors interpréter g ?

II.1. On considère une charge électrique ponctuelle de coordonnée x_0^μ pour laquelle

$$j^\mu = q \frac{dx_0^\mu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad k^\mu = 0. \quad (4.4)$$

Rappeler l'expression de l'équation du mouvement pour cette particule (force de Lorentz) en utilisant le tenseur de champ $F^{\mu\nu}$. On l'écrira sous forme covariante relativiste.

II.2.a. On considère maintenant un monopôle magnétique de charge électrique q et de charge magnétique g de coordonnées x_0^μ dans l'espace-temps :

$$j^\mu = q \frac{dx_0^\mu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad k^\mu = g \frac{dx_0^\mu}{cdt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (4.5)$$

On suppose que la transformation de dualité préserve la forme des équations du mouvement. Dédurre de la question **II.1** et de la forme explicite des transformations de dualité l'équation du mouvement pour une telle particule.

II.2.b. Le monopôle est fixé à l'origine O . Que vaut le champ \mathbf{B} en un point M tel que $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$?

II.3. On considère une charge électrique ponctuelle test (charge électrique q_0) placée en M dans le champ créé par le monopôle.

II.3.a. En utilisant l'équation du mouvement de cette charge test, montrer que la quantité

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} - \frac{\mu_0}{4\pi} q_0 g \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.6)$$

où $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, est conservée dans le mouvement. On a noté \mathbf{p} la quantité de mouvement de la charge test.

II.3.b. On suppose la charge test immobile. Calculer le moment angulaire par rapport à l'origine du champ électromagnétique créé par le monopôle et la charge test. Comment interpréter alors la quantité conservée (4.6) ?

II.3.c. Dédurre de **II.3.a** que la particule se déplace sur un cône de sommet le monopôle et dont on déterminera l'axe de révolution et le demi-angle θ en fonction de q_0 , g , c et de la constante du mouvement \mathbf{L} .

II.3.d. Justifier que si l'on essaie de quantifier le système, on doit imposer la condition, dite condition de quantification de Dirac :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} q_0 g = \frac{1}{2} n \hbar, \quad (4.7)$$

où n est entier. Comment expliqueriez-vous que les charges électriques sont quantifiées ?

II.4.a. En utilisant **I.4**, montrer qu'on ne peut avoir $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ en tout point.

II.4.b. Un exemple de monopôle est fourni par l'extrémité d'un solénoïde infiniment mince et long. On considère donc un tel solénoïde qui s'étend le long de l'axe des z (de vecteur unitaire $\hat{\mathbf{z}}$) de l'origine jusqu'à $z \rightarrow +\infty$. Écrire le champ magnétique créé par ce solénoïde sous la forme

$$\mathbf{B}_s = f(r)\hat{\mathbf{r}} + \alpha\delta(x)\delta(y)\Theta(z)\hat{\mathbf{z}} \quad (4.8)$$

où $f(r)\hat{\mathbf{r}}$ est le champ magnétique de **II.2.b** et α un nombre qu'on déterminera en fonction de g . On rappelle que $\zeta \mapsto \Theta(\zeta)$ est la fonction de Heaviside, et $\Theta(\zeta) = 1$ si $\zeta > 0$, et $\Theta(\zeta) = 0$ si $\zeta < 0$.

II.4.c. Montrer qu'il existe un potentiel vecteur associé à \mathbf{B}_s défini partout. En déduire que, pour un monopôle, il existe une ligne de singularité qui peut être assimilée à la ligne occupée par le solénoïde. C'est ce qu'on appelle la ligne de singularité de Dirac.

5

Le lagrangien de l'électromagnétisme et ses symétries

5.1 Théorème de Noether, méthode générale

On considère un champ ϕ régi par l'action $S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x)$. Le lagrangien \mathcal{L} est une fonction des variables ϕ , $\partial_\mu\phi$ et x . On s'intéresse à des transformations \mathcal{T} de l'espace et des champs de la forme

$$x \rightarrow x' = x + \delta x(x), \quad \phi \rightarrow \phi', \quad \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(\phi(x), x) \quad (5.1)$$

qui n'est pas nécessairement infinitésimale. On suppose de surcroît que le champ ϕ est solution des équations du mouvement associées à \mathcal{L} . Il pourra être utile d'introduire la variation fonctionnelle $\delta_0\phi \equiv \phi'(x) - \phi(x)$.

1. Montrer que si l'action est invariante sous la transformation précédente, $S[\phi'] = S[\phi]$, alors le courant J_T^μ défini par

$$J_T^\mu = \left(-\mathcal{L}g^\mu_\rho + \partial_\rho\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta x^\rho - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \quad (5.2)$$

est de divergence nulle. Dans cette dernière formule, les variations des coordonnées et du champ seront prises infinitésimales.

2. Une transformation infinitésimale est indexée par un ensemble de paramètres indépendants. Par exemple, une translation infinitésimale peut se faire dans d directions indépendantes, soit $\delta x^\mu = \varepsilon\delta^{\mu\nu}$, avec d choix possibles pour ν , et chaque valeur de ν donnera lieu à un courant \mathcal{J}^μ différent (qui portera alors deux indices, μ et ν). Montrer que pour des rotations (des isométries de la métrique $g^{\mu\nu}$, c'est-à-dire des transformations de Lorentz), une transformation infinitésimale se met sous la forme $\delta x^\mu = \varepsilon\omega^\mu_\nu x^\nu$, où ω^μ_ν est antisymétrique. Quelle est la dimension de l'espace des matrices antisymétriques. À chaque élément de la base de cet espace on associera un courant indépendant. Donner les éléments de matrice des matrices formant une base de l'espace des matrices antisymétriques. Comment caractériser les dilatations ?

5.2 Théorème de Noether pour le lagrangien de l'électromagnétisme

On s'intéresse au champ électromagnétique libre régi par l'action

$$S[A] = \int d^d x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu), \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.3)$$

L'objectif de cet exercice est d'exploiter les propriétés d'invariance de l'action sous des transformations de l'espace et du champ.

1. Préciser les équations du mouvement associées à cette action. Identifier les symétries de S . Quelles sont les symétries qui sont préservées en présence de sources de charges et de courants (représentées par un 4-vecteur j^μ).

2. On définit une transformation

$$x \rightarrow x' = x + \delta x(x) \quad (5.4)$$

$$A \rightarrow A' \text{ tel que } A'(x') = A(x) + \delta A(A(x), x) \quad (5.5)$$

Préciser les variations infinitésimales δx et δA qui traduisent les symétries identifiées en 1.

3. Déterminer les courants de Noether associés à ces symétries et donner leur interprétation physique.

4. L'invariance de jauge peut-elle être exploitée par les mêmes méthodes ?

5.3 Lagrangien de Proca

Le point de départ est à présent le lagrangien de Proca, défini par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2\mu_0} A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu \quad (5.6)$$

Il décrit toujours un champ électromagnétique en présence d'une source j^μ , cependant, le photon (boson vecteur de l'interaction) acquiert une masse. On verra que l'une des conséquences est que l'interaction coulombienne usuelle devient à courte portée.

1. Ce lagrangien intervient dans la description de certains phénomènes observés en supraconductivité, ou encore dans la physique des mésons ρ ou Ω où il traduit de manière effective les conséquences des interactions fortes. Justifier brièvement sa pertinence dans ces deux cas. Citer éventuellement d'autres situations expérimentales dans lesquelles ce lagrangien semble adapté à la description des phénomènes physiques.

2. Donner les équations du mouvement issues de S et montrer que nécessairement $\partial_\mu A^\mu = 0$. On suppose désormais que $j^\mu = 0$. Reproduire rapidement l'analyse de l'exercice précédent pour identifier les courants de Noether associées aux symétries de l'action. L'une des symétries du champ libre de masse nulle cesse ici d'être une symétrie du lagrangien de Proca. Identifier laquelle et interpréter cette modification.

3. On souhaite écrire l'action sous la forme

$$S[A] = \int d^d x d^d y \frac{1}{2} A^\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}(x, y) A^\nu(y) \quad (5.7)$$

Identifier la distribution $\Gamma_{\mu\nu}(x, y)$ et trouver sa transformée de Fourier $\Gamma_{\mu\nu}(k, k') = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + k') \Gamma_{\mu\nu}(k)$ (attention au léger abus de notation). Déterminer l'inverse G de Γ , qui vérifie

$$\int d^4 r \Gamma_{\mu\alpha}(x, r) G^{\alpha\nu}(r, y) = \delta_\mu^\nu \delta^{(4)}(x - y) \quad (5.8)$$

On se contentera de l'expression de G dans l'espace de Fourier que l'on pourra chercher *a priori* sous la forme $G^{\mu\nu}(k, k') = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + k') G^{\mu\nu}(k)$. Pour quelles valeurs de k la fonction $G^{\mu\nu}(k)$ est-elle toujours bien définie ?

4. Exprimer la matrice $G^{\mu\nu}(k^0 = 0, \mathbf{k})$ à fréquence k^0 nulle. Montrer qu'en revenant dans l'espace réel, toujours pour $k_0 = 0$, on a

$$G^{\mu\mu}(r) = g^{\mu\mu} \frac{e^{-mr}}{4\pi\mu_0 r} \quad (5.9)$$

où il n'y a pas sommation sur l'indice μ .

5. Que devient l'équation de la statique pour le potentiel électrique en présence d'une distribution de charges donnée ? Comment définiriez vous la portée de l'interaction ?

6. Que devient l'équation de la statique pour le potentiel vecteur en présence d'une distribution de courants donnée? Imaginer une expérience permettant d'établir une borne supérieure sur la masse du photon. On pourra assimiler la terre à un dipôle magnétique parfait ponctuel \mathbf{M} .

6

Lagrangien de Stueckelberg

[Partiel du 5 novembre 1999 (deuxième problème)]

Dans ce problème on s'intéresse à une famille de lagrangiens décrivant le champ électromagnétique. Cette famille est paramétrée par un réel α et est définie par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha\mu_0} (\partial_\mu A^\mu)^2 - j_\mu A^\mu. \quad (6.1)$$

Le courant j^μ , qui représente des sources de charges et de courants, est conservé.

1.a. Pour quelle limite de α (notée α_0) retrouve-t-on le lagrangien usuel de l'électromagnétisme ?

1.b. Écrire les équations du mouvement. On pourra utiliser l'identité

$$(\partial_\mu A^\mu)^2 = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (\partial_\mu A_\rho)(\partial_\nu A_\sigma). \quad (6.2)$$

1.c. Vérifier que pour $\alpha = 1$ ces équations redonnent les équations du quadri-potential dans la jauge de Lorentz, à savoir

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (6.3)$$

(la notation $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha$ désigne le d'Alembertien). Ce choix de α est dit *choix de Feynman*.

1.d. Dédire des équations du mouvement (pour α quelconque) que le champ $\partial_\mu A^\mu$ satisfait à l'équation $\square \partial_\mu A^\mu = 0$.

1.e. Quelle condition obtient-on sur le champ A_μ si l'on suppose l'action extrémale par rapport à α ? Selon vous, quel est le sens mathématique du terme faisant intervenir α dans le lagrangien ?

2.a. Récrire l'équation du mouvement (pour α quelconque) sous la forme

$$\int d^4 y \Gamma^{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y) = \mu_0 j^\mu(x) \quad (6.4)$$

où l'on précisera l'expression de l'opérateur différentiel $\Gamma^{\mu\nu}$.

2.b. On définit les fonctions de Green associées à cet opérateur différentiel par l'équation suivante :

$$\int d^4 r \Gamma^{\mu\rho}(x, r) \Delta_{\rho\nu}(r, y) = \delta^\mu_\nu \delta^{(4)}(x - y). \quad (6.5)$$

Lorsque $\alpha = 1$ (correspondant au choix de Feynman), donner une expression de $\Delta_{\mu\nu}(x, y)$ en fonction d'une fonction Green $\Delta(x, y)$ associée au d'Alembertien \square .

On rappelle la propriété suivante :

si $\Gamma(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) \square_y$, alors $\int d^4 r \Gamma(x, r) \Delta(r, y) = \delta^{(4)}(x - y)$.

2.c. Toujours pour $\alpha = 1$, traduire la relation (6.5) dans l'espace de Fourier. On admettra que $\Delta_{\mu\nu}(x, y)$ ne dépend que de $x - y$ et on définira sa transformée de Fourier par

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_\rho(x^\rho - y^\rho)} \Delta_{\mu\nu}(k). \quad (6.6)$$

On rappelle également que $\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} = \delta^{(4)}(k)$.

3.a. On revient à un α quelconque. On suppose à présent que $j^\mu = 0$. Montrer que l'action $S[A] = \int d^4x \mathcal{L}$ se met sous la forme

$$S[A] = \int d^4x d^4y \frac{1}{2\mu_0} A^\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}(x, y) A^\nu(y). \quad (6.7)$$

Pour effectuer ces manipulations, vous n'utiliserez pas le fait que A^μ est solution des équations du mouvement. La quantité $\Gamma_{\mu\nu}(x, y)$ est la même que celle trouvée à la question **2.a**. Trouver la distribution $\Delta_{\rho\sigma}(x, y)$ telle que

$$\int d^4r \Gamma_{\mu\sigma}(x, r) \Delta^{\sigma\nu}(r, y) = \delta_\mu^\nu \delta^{(4)}(x - y). \quad (6.8)$$

On raisonnera en termes des transformées de Fourier et on se contentera d'exprimer $\Delta_{\mu\nu}(k)$. Vérifier que pour le *choix de Feynman* votre résultat est cohérent avec celui-trouvé en **2.b**.

3.b. Montrer que pour le *choix de Landau* où $\alpha = 0$, on a $k_\mu \Delta^{\mu\nu}(k) = 0$.

3.c. Comment $\Delta^{\mu\nu}$ se comporte-t-il lorsque $\alpha \rightarrow \alpha_0$?

3.d. Pour α quelconque, et en présence de charges et de courants représentés par le quadrivecteur j^μ , montrer qu'une solution de (6.4) pour le potentiel vecteur s'exprime sous la forme

$$A^\mu(x) = \mu_0 \int d^4r \Delta^{\mu\nu}(x, r) j_\nu(r). \quad (6.9)$$

4. Établir que dans l'espace réel $\Delta(x, y)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Delta_r(x, y) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \delta(x_0 - y_0 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = \frac{1}{2\pi} \Theta(x_0 - y_0) \delta((x - y)^2). \quad (6.10)$$

On a noté $\Theta(t)$ la fonction de Heaviside. On appelle $\Delta_r(x, y)$ la fonction de Green retardée ou causale. Justifier cette appellation (en recourant éventuellement à un exemple).

7

Supraconductivité

[Partiel du 27 octobre 2000 (deuxième problème)]

On s'intéresse ici aux porteurs de charge dans un supraconducteur et à leur interaction avec un champ électromagnétique. La supraconductivité est un phénomène d'origine quantique dont on ne cherchera pas à établir le mécanisme microscopique. Il suffit de savoir que tout se passe comme si les électrons s'associaient en paires de charge $q = -2e$, et l'on peut décrire ce gaz de paires par une fonction d'onde $\psi(t, \mathbf{r}) = \sqrt{\rho(t, \mathbf{r})} e^{i\theta(t, \mathbf{r})}$ telle que $|\psi|^2 = \psi^* \psi = \rho$ donne la densité volumique de paires. On décrira le champ électromagnétique par son quadripotential $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$. On pose $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

On postule que l'action régissant l'ensemble {paires, photons} s'écrit sous la forme

$$S[A^\mu, \psi^*, \psi] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\hbar \psi^* \partial_t \psi - \frac{1}{2m} [(-i\hbar \nabla + q\mathbf{A})\psi^*] \cdot [(i\hbar \nabla + q\mathbf{A})\psi] + \mu^2 \psi^* \psi - g(\psi^* \psi)^2 \right] \quad (7.1)$$

Les paramètres m , g et μ^2 sont positifs et pourraient être déduits de la théorie microscopique. Ce sont ici des données du problème.

1.a. On sait que l'action du champ libre $S[A^\mu, 0, 0]$ (c'est-à-dire en l'absence de paires) est invariante sous les transformations de Lorentz. En présence du champ ψ , ce n'est plus le cas. Identifier les termes de l'action responsables de la perte de l'invariance sous les transformations de Lorentz. Quelle en est la raison physique ? Quelles sont les invariances qui subsistent ?

1.b. On considère la transformation de jauge qui au champ A^μ et aux fonctions ψ^* , ψ associe A'^μ , ψ'^* , ψ' définis par

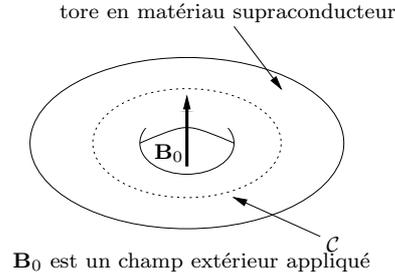
$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi, \quad \psi' = e^{+i\kappa\chi} \psi, \quad \psi'^* = e^{-i\kappa\chi} \psi^*$$

où $\chi(\mathbf{r})$ est une fonction quelconque indépendante du temps. Pour quelle valeur de κ (que l'on exprimera en fonction de q et \hbar) a-t-on une action invariante de jauge, c'est-à-dire qui satisfait $S[A'^\mu, \psi'^*, \psi'] = S[A^\mu, \psi^*, \psi]$ quelle que soit la fonction $\chi(\mathbf{r})$.

2. Montrer que le principe de moindre action appliqué au champ A^μ (c'est-à-dire les équations d'Euler-Lagrange) conduit à une équation de la forme

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad J^\nu = (J^0, \mathbf{J}) \quad (7.2)$$

avec $J^0 = 0$ et $\mathbf{J} = \rho q \frac{\hbar}{m} \nabla \theta - \frac{q^2 \rho}{m} \mathbf{A}$. On utilise abusivement l'écriture $J^\nu = (J^0, \mathbf{J})$ bien que J^ν ne soit pas un quadrivecteur. Quelles sont les dimensions de $\frac{\hbar}{m} \nabla \theta$? Quel sens physique attribueriez-vous alors à cette quantité ? Et à la quantité $-\frac{q}{m} \mathbf{A}$?



3.a. En supposant que l'on peut traiter ψ^* et ψ comme des variables indépendantes, et en négligeant les termes dépendant du champ électromagnétique (prendre $A^\mu = 0$), montrer que le principe de moindre action pour ψ^* conduit à l'équation

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \mu^2\psi + 2g|\psi|^2\psi \quad (7.3)$$

3.b. En déduire qu'en régime *statique* et pour un système *uniforme* (toujours en prenant $A^\mu = 0$), ψ acquiert une valeur non nulle ; on explicitera la constante $\rho_0 = \psi^*\psi$ ainsi obtenue en fonction des données du problème.

4. Montrer à partir des équations du **2** et en utilisant la valeur constante ρ_0 trouvée en **3.b** qu'en régime statique, en utilisant la jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), on obtient

$$\Delta\theta = 0 \quad (7.4)$$

Comment interpréteriez-vous cette propriété ?

5.a. Récrire l'équation (7.1) (l'action de A^μ) en y substituant la valeur constante ρ_0 . Montrer en particulier qu'apparaît un terme de la forme $\frac{1}{2} \frac{m_\gamma^2 c^4}{4\pi\hbar^2} A_i A^i$, où l'on donnera l'expression de m_γ .

5.b. Quel sens physique donnez-vous aux grandeurs m_γ et $\lambda_\gamma = \frac{\hbar}{m_\gamma c}$?

6. On se place dans le régime statique décrit dans la question **5** précédente. La moitié $x > 0$ de l'espace est occupée par le milieu supraconducteur, tandis que le vide règne dans la moitié $x < 0$.

6.a. On impose un champ uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ dans le demi-espace $x < 0$. Montrer à partir de **2** que dans le supraconducteur le champ \mathbf{B} vérifie $-\Delta\mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\lambda_L^2} = \mathbf{0}$. On donnera l'expression de l'échelle de longueur caractéristique λ_L du problème (dite longueur de London). Déterminer le champ \mathbf{B} dans le demi-espace $x > 0$.

6.b. Montrer l'effet Meissner : il ne peut exister de champ magnétique uniforme à l'intérieur d'un supraconducteur.

7.a. On considère un échantillon supraconducteur torique plongé dans un champ magnétique statique. Dans le supraconducteur très loin de son interface avec le vide, justifier que $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, et montrer que pour tout chemin d'intégration \mathcal{C} allant de \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_2 on aura

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{q} (\theta(\mathbf{r}_2) - \theta(\mathbf{r}_1)) \quad (7.5)$$

7.b. On considère une surface Σ limitée par le cercle \mathcal{C} (voir figure) qui se trouve entièrement à l'intérieur du supraconducteur. Montrer que le flux Φ de \mathbf{B} à travers cette surface Σ est quantifié, c'est-à-dire qu'il se met sous la forme

$$\Phi_\Sigma = \frac{2\pi\hbar}{q} k, \quad k \text{ entier relatif} \quad (7.6)$$

7.c. Décrire le principe d'une expérience qui permettrait de déterminer q (et donc de s'apercevoir qu'en effet $q = -2e$).

8

Tenseur impulsion-énergie

8.1 Trivialité

Retrouver la force entre deux particules immobiles en utilisant le tenseur des contraintes de Maxwell, c'est à dire en utilisant la loi :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{champ} + \vec{P}_{part} \right)_i = \int_{surf} d^2\sigma T_{ij}^{(M)} n_j \quad \text{où} \quad \vec{P}_{champ} = \int_{vol} d^3x \frac{\vec{S}}{c^2}, \quad (8.1)$$

où \hat{n} est la normale (sortante) à la surface considérée, $\vec{S} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$ et

$$T_{ij}^{(M)} = \epsilon_0 \left(E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \right). \quad (8.2)$$

On notera q_A et q_B les valeurs des deux charges et $2a$ leur distance de séparation. On pourra ne traiter que les cas $q_A = q_B = e$ et $q_A = e = -q_B$.

8.2 Char à voile cosmique

• Montrer le tenseur des contraintes d'une onde plane se propageant dans le vide selon la direction \hat{N} s'écrit

$$T_{ij}^{(M)} = -u N_i N_j \quad \text{avec} \quad u(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \right). \quad (8.3)$$

On pourra utiliser (en la démontrant) la formule :

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lpq} = \delta_{il} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) + \delta_{ip} (\delta_{jq} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{kq}) + \delta_{iq} (\delta_{jl} \delta_{kp} - \delta_{jp} \delta_{kl}). \quad (8.4)$$

• Soit \vec{F} la force exercée par une onde plane se réfléchissant sur un conducteur plan (d'aire \mathcal{A}) sous l'angle d'incidence α . On appellera R le coefficient de réflexion et \hat{N}' la direction de l'onde réfléchie. Montrer que si l'on néglige les effets d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie alors

$$\vec{F} = \bar{u} \mathcal{A} \cos \alpha (\hat{N} - R \hat{N}'). \quad (8.5)$$

Discuter (en particulier que signifie \bar{u} ?). Montrer que l'équation (8.5) est exacte si $R = 0$ ou 1 .

• Au voisinage de la Terre, le flux d'énergie électromagnétique en provenance du Soleil vaut 0.14 W cm^{-2} . Quelle peut-être l'accélération maximale d'un hypothétique char à voile interplanétaire ? On supposera la masse par unité de surface égale à $10^{-4} \text{ g cm}^{-2}$.

8.3 Moment angulaire du champ

On rappelle quelques définitions et propriétés :

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T^{00} &= \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2), \\ T^{0i} &= \epsilon_0 c (\vec{E} \wedge \vec{B})_i = S_i/c = cg_i, \\ T^{ij} &= -T_{ij}^{(M)}. \end{cases} \quad (8.6)$$

Le tenseur $T^{\alpha\beta}$ est solution de

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = -F^{\beta\nu} j_\nu. \quad (8.7)$$

- Soit $M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta} X^\gamma - T^{\alpha\gamma} X^\beta$. Montrer que

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = -F^{\beta\nu} J_\nu X^\gamma + F^{\gamma\nu} J_\nu X^\beta. \quad (8.8)$$

- Considérer seulement les composantes $\beta = k$ et $\gamma = j$ de l'égalité ci-dessus, appliquer $(1/2)\epsilon_{ijk}$, intégrer sur un volume *vol* délimité par une surface *surf* et en déduire :

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_{champ} + \vec{L}_{part})_i = \int_{surf} d^2\sigma \epsilon_{ijk} x_j T_{kl}^{(M)} n_l \quad \text{où} \quad \vec{L}_{champ} = \int_{vol} d^3x \vec{x} \wedge \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (8.9)$$

Indication : on pourra remarquer que $F^{i\nu} j_\nu = (\rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B})_i$.

8.4 Mouvement autour d'un monopole magnétique

On étudie le mouvement non relativiste d'un électron de masse m et de charge $-e$ placé dans le champ magnétique permanent :

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{\vec{x}}{x^3}. \quad (8.10)$$

1/ montrer que ce champ peut-être considéré comme créé par une charge magnétique ponctuelle placée à l'origine. Un tel monopole magnétique est-il autorisé par les équations de Maxwell ?

2/ Quelle quantité faut-il rajouter au moment angulaire $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ pour obtenir un vecteur \vec{J} constant au cours du mouvement ? On pourra utiliser l'égalité (8.9) de l'exercice précédent.

3/ Montrer que la vitesse \vec{v} de l'électron a une norme constante. Soit \vec{r} sa position, déterminer $\vec{r}^2(t)$. On choisira comme origine des temps l'instant où l'électron passe à la distance la plus proche \vec{d} de l'origine.

4/ En déduire que la trajectoire s'appuie sur un cône de sommet l'origine, d'axe \vec{J} et de demi-angle au sommet θ que l'on calculera.

Électrodynamique quantique

9.1 Émission spontanée

On cherche à expliquer l'émission spontanée d'un photon par un atome. On se donne un atome hydrogénoïde constitué d'un noyau ponctuel de charge Ze , supposé au repos à l'origine, et d'un électron de charge $-e$ de masse m situé en \mathbf{r}_e . On néglige les effets liés aux spins des particules.

1. Le hamiltonien total du système s'écrit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ où \hat{H}_0 décrit les hamiltoniens du champ électromagnétique et de l'électron si les deux n'interagissaient pas. Préciser \hat{H}_0 et \hat{H}_{int} .

2. On veut calculer la probabilité $w_{a \rightarrow b} dt$ que l'atome passe de l'état excité a à l'état final b en émettant un photon entre t et $t + dt$. On appelle la quantité $w_{a \rightarrow b}$ un taux de transition. Montrer que pour un état initial i du système total et un état final f du système total (électron et champ) on a

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle|^2$$

C'est la règle d'or de Fermi.

3. Dans notre cas $|i\rangle = |a; 0\rangle$ est l'état a de l'atome produit tensoriel avec l'état à 0 photon. On notera $\psi_a(\mathbf{r}_e) = \langle \mathbf{r}_e | a \rangle$ la fonction d'onde de l'électron dans l'état a . L'état final est un état à un photon dans le mode n et de polarisation α , on le notera $|f\rangle = |b; 1_{n\alpha}\rangle$. On posera également $\psi_b(\mathbf{r}_e) = \langle \mathbf{r}_e | b \rangle$. Montrer que

$$\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle = -\frac{ie\hbar}{m} \int d^3r_e \langle 1_{n\alpha} | \mathbf{A}(\mathbf{r}_e) | 0 \rangle \cdot (\psi_b^*(\mathbf{r}_e) \nabla_{\mathbf{r}_e} \psi_a(\mathbf{r}_e))$$

4. En utilisant le développement du champ

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2L^3 \omega_n}} (\vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} a_{n\alpha} + \text{h.c.})$$

montrer que

$$\langle 1_{n\alpha} | \mathbf{A}(\mathbf{r}_e) | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2L^3 \omega_n}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_e}$$

5. Pour un atome hydrogénoïde ψ_a est localisée dans un rayon a_0/Z où $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} = 0,053$ nm est le rayon de Bohr. Justifier l'approximation $e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_e} \simeq 1$.

6. Le taux de transition total $w_{a \rightarrow b}$ s'obtient en sommant sur tous les états finaux à un photon. Montrer que

$$w_{a \rightarrow b} = \frac{e^2 \mu_0 \omega}{8\pi^2 \hbar c m^2} \int d\Omega_k \sum_{\alpha 23} \left| -i\hbar \int d^3r \vec{\varepsilon}^*_{k\alpha} \cdot (\psi_b^* \nabla \psi_a) \right|^2$$

où l'on a posé $\omega \equiv \frac{E_a - E_b}{\hbar}$ et $\int d\Omega_k$ désigne l'intégrale angulaire sur $\mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$.

7. Justifier que

$$\int d\Omega_k \sum_{\alpha} \varepsilon_{k\alpha}^{i*} \varepsilon_{k\alpha}^j = \frac{8\pi}{3} \delta^{ij}$$

8. Montrer alors que

$$w_{a \rightarrow b} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \frac{4\omega}{3m^2c^2} |\mathbf{p}_{ba}|^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \frac{4\omega^3}{3c^2} |\mathbf{r}_{ba}|^2$$

avec $\mathbf{p}_{ba} = -i\hbar \int d^3r \psi_b^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_a(\mathbf{r})$ et $\mathbf{r}_{ba} = \int d^3r \psi_b^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_a(\mathbf{r})$.

9.2 Effet Casimir

On s'intéresse à un champ électromagnétique confiné entre deux plaques parallèles parfaitement conductrices distantes de a , et de taille $L \times L$, avec $L \gg a$. On appelle $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ le potentiel vecteur du champ et $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

1. Justifier brièvement que E_x, E_y, B_z sont nulles sur les plaques. Quels sont les vecteurs d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ autorisés (on adoptera des conditions aux limites périodiques selon (Ox) et (Oy)). Combien y a-t-il de directions de polarisation indépendantes si $k_z = 0$?

2. Dans la limite où le champ électromagnétique s'annule, du point de vue classique, aucune force ne s'exerce entre les plaques. Pourquoi en va-t-il autrement lorsque l'on adopte un point de vue quantique ?

3. En se plaçant dans le cadre de l'électrodynamique quantique on s'attend à ce qu'il existe une force F entre les deux plaques. Cette force dépend *a priori* de L, a, \hbar, c . Prédire l'intensité de la force par analyse dimensionnelle.

4. Pourquoi les modes de Fourier de la décomposition du champ dans le cas classique sont encore les bons modes dans le cas où l'on considère des opérateurs ?

5. Rappeler l'expression du hamiltonien du champ.

6. Montrer que l'énergie moyenne $\mathcal{E}(a)$ entre les plaques prise dans l'état fondamental a pour expression

$$\mathcal{E}(a) = \frac{1}{2} \hbar c L^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left[\|\mathbf{q}\| + 2 \sum_{n \geq 1} \sqrt{\mathbf{q}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \right]$$

7. Soustraire de l'expression précédente l'énergie d'un champ correspondant au même volume $L^2 a$ entre les plaques mais qui ne serait pas confiné par des plaques conductrices. En déduire la différence des énergies par unité de surface des plaques :

$$\begin{aligned} \delta E = & \frac{\hbar c \pi^2}{4a^3} \int_0^\infty du \left(\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u}\right) \right. \\ & \left. + \sum_{n \geq 1} \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u+n^2}\right) - \int_0^\infty dn \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u+n^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Dans cette expression on a introduit une fonction $f(k)$ qui vaut 1. On prendra par la suite une fonction f qui décroît très rapidement, $f(k) \simeq 1$ pour $k \leq k_m$ et $= 0$ si $k > k_m$ (en pratique $f(0) = 1$ et ses dérivées s'annulent à l'origine). Quel est le sens physique de la coupure k_m ?

8. On peut montrer que

$$\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^\infty dn F(n) = -\frac{1}{2} B_2 F'(0) - \frac{1}{4!} B_4 F^{(3)}(0) + \dots$$

avec $B_2 = 1/6$ et $B_4 = -1/30$. En déduire l'énergie entre les plaques, puis la force entre les plaques. Est-elle attractive ou répulsive ?

10

Déplacement de Lamb (Lamb shift)

[Partiel du 16 novembre 2001 (durée 3 h)]

En suivant une méthode proposée par Bethe (1947) nous allons calculer l'effet de la quantification du champ électromagnétique sur l'énergie d'un électron non relativiste libre ou lié à un noyau (atome hydrogénoïde).

A. Electron libre

L'électron non relativiste libre (position \vec{r}_e) est décrit habituellement sans tenir compte du champ électromagnétique par l'hamiltonien

$$H_{\text{libre}} = \frac{\vec{p}_e^2}{2m}. \quad (10.1)$$

On considère ici le système électron non relativiste (on néglige son spin) + champ électromagnétique décrit par l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 + H_2 \\ H_0 &= H_{\text{part}} + H_{\text{champ}} \\ H_{\text{part}} &= \frac{\vec{p}_e^2}{2m_0} \\ H_{\text{champ}} &= \sum_{n\alpha} \hbar\omega_n a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} \\ H_1 &= \frac{e}{m_0} \vec{A}(\vec{r}_e) \cdot \vec{p}_e \\ H_2 &= \frac{e^2}{2m_0} : \vec{A}^2(\vec{r}_e) : \end{aligned} \quad (10.2)$$

où m_0 est la *masse nue* de l'électron. On a défini l'opérateur H_2 dans (10.2) à partir de la forme normale de \vec{A}^2 qui consiste à remplacer dans l'expression développée de \vec{A}^2 les produits $a_{n\alpha} a_{n'\alpha'}^\dagger$ par $: a_{n\alpha} a_{n'\alpha'}^\dagger : = a_{n'\alpha'}^\dagger a_{n\alpha}$. On se propose de montrer que l'électron libre est décrit par l'hamiltonien (10.1) à condition de *renormaliser la masse*, c'est-à-dire d'utiliser la *masse observée* $m = m_0 + \delta m$ de l'électron. On utilisera la théorie des perturbations en développant suivant le petit paramètre

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}} = \sqrt{\frac{1}{137,04}}. \quad (10.3)$$

Dans (10.2), H_k ($k = 0, 1, 2$) est d'ordre k en ε . Soit \mathcal{B} une base de l'espace des fonctions d'onde formée de vecteurs propres de H_0 indépendants du temps :

$$H_0 |s\rangle = \frac{E_s^{(0)}}{25} |s\rangle. \quad (10.4)$$

L'énergie perturbée E_r de l'état $r \in \mathcal{B}$, vecteur propre de H_0 pour l'énergie $E_r^{(0)}$, supposée non dégénérée, est donnée au deuxième ordre en ε par

$$\begin{aligned} E_r &= E_r^{(0)} + E_r^{(1)} + E_r^{(2)} \\ E_r^{(1)} &= \langle r | H_1 | r \rangle \\ E_r^{(2)} &= \langle r | H_2 | r \rangle + \sum'_s \frac{|\langle r | H_1 | s \rangle|^2}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}} \end{aligned} \quad (10.5)$$

où la somme \sum'_s porte sur tous les états s de la base \mathcal{B} excepté l'état r .

1. On impose que les fonctions d'ondes, les champs et leurs dérivées vérifient des conditions aux limites périodiques dans le cube de côté ℓ . Soit l'état d'impulsion \vec{p}_a

$$|a\rangle \equiv \psi_a(\vec{r}_e) = \frac{1}{\sqrt{\ell^3}} e^{i\vec{p}_a \cdot \vec{r}_e / \hbar}. \quad (10.6)$$

Quelles sont les valeurs permises de \vec{p}_a ?

On forme les états

$$|r\rangle = |a, 0\rangle = |a\rangle \otimes |0\rangle \quad \text{et} \quad |s\rangle = |b, 1_{n\alpha}\rangle = |b\rangle \otimes |1_{n\alpha}\rangle \quad (10.7)$$

où $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont les états d'impulsion \vec{p}_a et \vec{p}_b de l'électron, $|0\rangle$ le vide et $|1_{n\alpha}\rangle$ l'état à un photon dans le mode $n\alpha$ de fréquence ω_n , vecteur d'onde \vec{k}_n et polarisation $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$.

Vérifier que les états (10.7) sont des états propres de H_0 et donner leurs valeurs propres $E_r^{(0)}$ et $E_s^{(0)}$.

2. Montrer que dans l'expression (10.5) de l'énergie perturbée E_r de l'état r de l'équation (10.7)

a. $E_r^{(1)}$ est nul ;

b. $\langle r | H_2 | r \rangle$ est nul ;

c. on peut remplacer la somme \sum'_s par la somme $\sum_{b,n,\alpha}$ sur les états s de la forme (10.7).

3. Montrer que l'élément de matrice $\langle b, 1_{n\alpha} | H_1 | a, 0 \rangle$ entre états (10.7) est de la forme

$$\langle b, 1_{n\alpha} | H_1 | a, 0 \rangle = \begin{cases} \frac{M}{\sqrt{\ell^3 k_n}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* \cdot \vec{p}_a & \text{si } \vec{p}_a = \vec{p}_b + \hbar \vec{k}_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10.8)$$

où M est une constante à déterminer.

On rappelle que les intégrales sont calculées dans le cube de côté ℓ et que pour les fonctions périodiques $e^{i\vec{k}_m \cdot \vec{r}}$ on a

$$\int_{\text{cube}} e^{i\vec{k}_m \cdot \vec{r}} d^3x = \begin{cases} \ell^3 & \text{si } \vec{k}_m = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (10.9)$$

4. Dans la suite on évaluera des sommes sur les modes $n\alpha$ en négligeant les modes de vecteurs d'onde \vec{k}_n tels que

$$k_n > K \quad \text{où} \quad K = \frac{m_0 c}{\hbar}. \quad (10.10)$$

Justifier physiquement l'introduction de la coupure K . Quelles sont les longueurs d'onde des ondes électromagnétiques négligées ?

5. Montrer qu'on peut faire l'approximation

$$E_r^{(0)} - E_s^{(0)} \approx -\hbar c k_n \quad (10.11)$$

pour des états r, s de la forme (10.7) tels que $\vec{p}_a = \vec{p}_b + \hbar\vec{k}_n$.

6. Exprimer $E_r^{(2)}$ à l'aide d'une somme sur les états de photon n, α . Transformer la somme sur n en intégrale par

$$\sum_n \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^3 \longrightarrow \int_0^K k^2 dk \int d\Omega_k \quad (10.12)$$

et montrer que

$$E_r^{(2)} = -\frac{4}{3\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \frac{p_a^2}{2m_0}. \quad (10.13)$$

7. Quelle est la masse observée de l'électron ?
8. On a utilisé l'interaction H_2 au lieu de l'interaction habituelle

$$H_2'' = \frac{e^2}{2m_0} \vec{A}^2(\vec{r}_e). \quad (10.14)$$

L'utilisation de H_2'' aurait-elle modifiée la relation entre m et m_0 obtenue dans la question précédente ?

B. Atome hydrogénéoïde

On considère un atome hydrogénéoïde formé d'un noyau ponctuel de charge Ze , supposé au repos à l'origine, et d'un électron de masse m en \vec{r}_e (on néglige le spin et on décrit l'atome de façon non relativiste). L'hamiltonien du système champ + atome est

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 + H_2 + H_2' \\ H_0 &= H_{\text{part}} + H_{\text{champ}} \\ H_{\text{part}} &= \frac{\vec{p}_e^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} \\ H_{\text{champ}} &= \sum_{n\alpha} \hbar\omega_n a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} \\ H_1 &= \frac{e}{m} \vec{A}(\vec{r}_e) \cdot \vec{p}_e \\ H_2 &= \frac{e^2}{2m} : \vec{A}^2(\vec{r}_e) : \\ H_2' &= \frac{4}{3\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \frac{p_e^2}{2m}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

1. L'hamiltonien (10.15) est écrit en fonction de la masse observée m de l'électron. La perturbation H_2' tient compte de la renormalisation de la masse. Montrer qu'en effet, pour l'électron libre (faire $Z = 0$ dans l'hamiltonien (10.15)), l'énergie E_r au deuxième ordre des perturbations de l'état r considéré dans la partie A, équation (10.7), est $\frac{\vec{p}_a^2}{2m}$. On utilisera la coupure $K = \frac{mc}{\hbar}$.
2. Pour $Z \neq 0$ les états

$$|a\rangle \equiv \psi_a(\vec{r}_e) \quad \text{et} \quad |b\rangle \equiv \psi_b(\vec{r}_e) \quad (10.16)$$

désignent maintenant des états propres de H_{part} d'énergies propres E_a et E_b respectivement. Montrer que la perturbation ΔE_a de l'énergie de l'état $|r\rangle = |a, 0\rangle$ (atome dans l'état a et vide de photon) est, au deuxième ordre en ϵ ,

$$\Delta E_a = \langle a | H_2' | a \rangle + \sum_{b, n, \alpha} \frac{|\langle b, 1_{n\alpha} | H_1 | a, 0 \rangle|^2}{E_a - E_b - \hbar\omega_n}. \quad (10.17)$$

3. Déterminer $\langle b, 1_{n\alpha} | H_1 | a, 0 \rangle$ en utilisant l'approximation dipolaire électrique. On écrira le résultat en fonction de

$$\vec{p}_{ba} = \langle b | \vec{p}_e | a \rangle = \int d^3 r_e \psi_b^*(\vec{r}_e) (-i\hbar \vec{\nabla}_e) \psi_a(\vec{r}_e). \quad (10.18)$$

4. Montrer que ΔE_a est donné par

$$\Delta E_a = \langle a | H_2' | a \rangle - \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^2 m^2} \sum_b |\vec{p}_{ba}|^2 \int_0^K \frac{k dk}{\frac{E_b - E_a}{\hbar c} + k}. \quad (10.19)$$

5. Exprimer $\langle a | H_2' | a \rangle$ en fonction de $\sum_b |\vec{p}_{ba}|^2$ et des constantes fondamentales.

6. On utilisera l'intégrale

$$\int_0^K \frac{k dk}{z+k} = K - z \ln \left| \frac{K+z}{z} \right|. \quad (10.20)$$

C'est une intégrale élémentaire pour $z > 0$ ou $z < -K$; lorsque $-K \leq z \leq 0$, l'expression donne la partie principale de l'intégrale. Remplacer, dans (10.19),

$$\int_0^K \frac{k dk}{z+k} \quad \text{par} \quad K - z \ln \frac{K}{z_0} \quad (10.21)$$

où z_0 est une constante.

Montrer que le terme $\langle a | H_2' | a \rangle$ se simplifie alors avec une partie du dernier terme de (10.19).

Pour quelle valeur de z_0 le remplacement (10.21) est-il exact ?

7. Montrer que

$$\sum_b (E_b - E_a) |\vec{p}_{ba}|^2 \quad (10.22)$$

peut s'écrire en fonction de

$$\sum_{i=1}^3 \langle a | [[H_{\text{part}}, p_e^i], p_e^i] | a \rangle \quad (10.23)$$

où les opérateurs p_e^i ($i = 1, 2, 3$) sont les composantes de $\vec{p}_e = -i\hbar \vec{\nabla}_e$.

Calculer $[[H_{\text{part}}, p_e^i], p_e^i]$ et en déduire une expression de ΔE_a en fonction de Z , z_0 , K , $|\psi_a(0)|^2$ et des constantes fondamentales.

8. Déterminer les déplacements d'énergie ΔE_{2s} et ΔE_{2p0} correspondant aux fonctions d'ondes de l'hydrogène ($Z = 1$)

$$\begin{aligned} \psi_{2s}(r) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0} \\ \psi_{2p0}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \frac{r}{2a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta \end{aligned} \quad (10.24)$$

où $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m.

Calculer numériquement la fréquence de la transition entre les niveaux $2s$ et $2p$ de l'hydrogène (cette fréquence a été mesurée en 1947 par W. E. Lamb et W. E. Retherford).

Valeurs numériques : $\ln \frac{K}{z_0} = 7,63$; $mc^2 = 0,511$ MeV ; $\hbar c = 200$ MeV $\cdot 10^{-15}$ m ; $c = 3 \cdot 10^8$ ms $^{-1}$;

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

11

Effet Casimir dynamique

[Partiel du 8 novembre 2002 (durée 3 h)]

En utilisant un modèle simplifié de champ scalaire à une dimension, nous allons étudier des effets liés à la quantification du champ électromagnétique dans une cavité de taille variable.

A. Cavité classique 3D

On considère le champ électromagnétique dans une cavité formée de deux miroirs plans parallèles parfaitement réfléchissants. Les miroirs sont des plaques métalliques parfaitement conductrices reliées à la masse. L'espace entre les deux miroirs est vide. Dans le référentiel inertiel K (laboratoire), le premier miroir est fixe et forme le plan $x = 0$. Le deuxième miroir forme le plan $x = L(t)$. Il est fixe pour $t < 0$ et est mis en mouvement à l'instant $t = 0$. La trajectoire du miroir $L(t)$ est une donnée du problème et on pose $L(t) = L_0$ pour $t < 0$.

1. Le champ électromagnétique vérifie les conditions aux limites suivantes sur chacun des deux miroirs et à tout instant t :

$$\begin{aligned} &\text{le champ électrique est perpendiculaire au miroir et le champ} \\ &\text{magnétique est parallèle au miroir dans un référentiel d'inertie} \\ &\text{comobile avec le miroir à l'instant } t. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Justifier brièvement ces conditions aux limites. Pourquoi précise-t-on le référentiel ?

2. On considère des champs $\vec{E}(x, t) = (E^x, E^y, E^z)$ et $\vec{B}(x, t) = (B^x, B^y, B^z)$ indépendants de y et z dans K . Ecrire, en termes des champs dans K et de $L(t)$, les conditions aux limites sur les deux miroirs. On pourra utiliser, pour chaque valeur du temps t , un référentiel d'inertie K'_t correspondant à une transformation spéciale de Lorentz de vitesse $V = \dot{L}(t) = \frac{dL}{dt}$.
3. On décrit le champ dans la cavité par les potentiels ϕ, \vec{A} en jauge de Coulomb. Justifier qu'on peut prendre $\phi = 0$ et écrire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par \vec{A} .
4. On considère le cas particulier d'un potentiel vecteur $\vec{A}(x, t) = A(x, t)\vec{e}_x$ parallèle à Ox et indépendant de y et z . Exprimer les conditions aux limites sur les deux miroirs en termes de $A(x, t)$. Montrer qu'on peut mettre ces conditions sous la forme

$$A(0, t) = \alpha, \quad A(L(t), t) = \beta \quad \forall t \tag{11.2}$$

où α et β sont des constantes.

B. Champ scalaire à 1D : cas L constant

On étudie un système à une seule dimension spatiale qui constitue un modèle simplifié de la cavité. Dans cette partie, $L(t) = L$ est constante. Le système est décrit par un champ scalaire réel $A(x, t)$ défini sur l'intervalle $0 \leq x \leq L$ (la « cavité »), vérifiant les conditions aux limites

$$A(0, t) = A(L, t) = 0 \quad \forall t. \quad (11.3)$$

Le système est régi par l'action

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^2x = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^L dx \mathcal{L} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L} = \frac{\hbar c}{2} \left[\left(\frac{\partial A}{c \partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 A^2 \right] \quad (11.4)$$

où λ est une constante et où on a posé $x^1 \equiv x$, $x^0 \equiv ct$, $d^2x \equiv dx^0 dx^1$.

1. Quelles sont les dimensions de λ , \mathcal{L} et A ?
2. Montrer que le principe de moindre action donne l'équation du champ

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \gamma A = 0 \quad (11.5)$$

et déterminer γ .

Quelle est la valeur de $\lambda = \lambda_0$ qui correspond à la cavité électromagnétique précédente ?

3. Montrer que la composante 00 du tenseur énergie-impulsion canonique est

$$T^{00}(x, t) = \frac{\hbar c}{2} \left[\left(\frac{\partial A}{c \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \gamma A^2 \right]. \quad (11.6)$$

Quelle est l'interprétation physique de cette composante ?

4. On pose $k_n = \frac{\pi n}{L}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ et on considère les modes propres du système

$$A_n^\pm(x, t) = \left(\frac{c}{L\omega_n} \right)^{1/2} e^{\pm i\omega_n t} \sin(k_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.7)$$

Vérifier que ces champs sont solutions du système d'équations (11.3, 11.5) pour des valeurs $\omega_n > 0$ que l'on précisera.

5. **Quantification.** On effectue la quantification du champ à l'aide du développement sur les modes propres

$$A(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^-(x, t)a_n + A_n^+(x, t)a_n^\dagger] \quad (11.8)$$

où les opérateurs création et destruction a_n, a_n^\dagger vérifient les relations de commutation

$$[a_m, a_n^\dagger] = \delta_{mn}, \quad [a_m, a_n] = [a_m^\dagger, a_n^\dagger] = 0. \quad (11.9)$$

L'état vide $|0\rangle$ de la cavité est défini par

$$a_n |0\rangle = 0 \quad \forall n. \quad (11.10)$$

Les expressions (11.8) pour $A(x, t)$ et (11.6) pour $T^{00}(x, t)$ sont maintenant considérées comme des opérateurs (dans le point de vue de Heisenberg). Noter que a_n, a_n^\dagger et l'état vide ne dépendent pas du temps.

Montrer que la moyenne $\langle 0 | T^{00}(x, t) | 0 \rangle$ s'écrit :

$$\langle 0 | T^{00}(x, t) | 0 \rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \hbar \omega_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 c^4}{2L \hbar \omega_n} \cos(2k_n x). \quad (11.11)$$

En déduire que l'énergie du vide est donnée par

$$E(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar\omega_n}{2}. \quad (11.12)$$

6. Définir l'hamiltonien H (opérateur) du système en fonction d'une intégrale et de $T^{00}(x, t)$. Montrer qu'il se met sous la forme

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega_n \left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \right). \quad (11.13)$$

C. Variation adiabatique de $L(t)$

On reprend le système quantique du **B**, décrit par les équations (11.3, 11.5), mais maintenant la longueur $L(t)$ est variable et $\gamma = 0$:

$$A(0, t) = A(L(t), t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0. \quad (11.14)$$

Pour $t < 0$, $L(t) = L_0$ est constant et le système est dans l'état vide de photon (11.10), noté maintenant $|0_{\text{in}}\rangle$.

1. On suppose que $L(t)$ varie *adiabatement*, c'est-à-dire suffisamment doucement pour qu'à chaque instant t le système évolue en restant dans l'état vide de la cavité de longueur $L(t)$ (il existe un état vide distinct $|0_L\rangle$ pour chaque longueur L). L'énergie du système à l'instant t est alors donnée par (11.12) :

$$E(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar\omega_n}{2} \quad \text{où} \quad \omega_n = \frac{c\pi n}{L(t)}. \quad (11.15)$$

Si $L(t) = L_0(1 + \delta \sin \omega t)$ pour $t > 0$, donner les conditions que doivent vérifier L_0 , δ et ω pour que la variation soit adiabatique. On répondra en se basant sur des considérations physiques sans effectuer des calculs.

2. L'énergie (11.15) est infinie. On se propose de la renormaliser, c'est-à-dire de la remplacer par une énergie finie en lui retranchant une énergie infinie. Pour cela, on remplace (11.15) par

$$E(L, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar\omega_n}{2} e^{-\epsilon\omega_n} \quad (11.16)$$

où on introduit un facteur de régularisation $\exp(-\epsilon\omega_n)$. Le facteur de régularisation disparaît dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Calculer la somme (11.16) et montrer que dans la limite des petits ϵ on a :

$$E(L, \epsilon) = \frac{\hbar L}{2\pi c \epsilon^2} + f(L) + O(\epsilon^2) \quad (11.17)$$

où $f(L)$ est indépendant de ϵ .

Déterminer la densité d'énergie du vide $W(\epsilon)$ de la cavité infiniment grande et l'énergie renormalisée du vide de la cavité $E_R(L)$ définies par

$$W(\epsilon) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E(L, \epsilon)}{L} \quad \text{et} \quad E_R(L) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [E(L, \epsilon) - W(\epsilon)L]. \quad (11.18)$$

3. Tracer l'allure de la courbe $E_R(L)$ en fonction de L . Commenter.

D. Variation non adiabatique de $L(t)$

1. On ne suppose plus que la variation de $L(t)$ se fasse adiabatiquement. La cavité est déformée pendant le temps T puis reprend sa longueur initiale L_0 :

$$L(t) = \begin{cases} L_0 & \text{pour } t < 0, \\ L(t) & \text{arbitraire continue pour } 0 \leq t \leq T, \\ L_0 & \text{pour } T < t. \end{cases} \quad (11.19)$$

Pour des fonctions complexes $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$, solutions des équations (11.14), on définit le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = i \int_0^{L(t)} dx \left(f_1^* \frac{\partial f_2}{c \partial t} - f_2 \frac{\partial f_1^*}{c \partial t} \right). \quad (11.20)$$

Montrer que le produit scalaire $\langle f_1, f_2 \rangle$ ne dépend pas du temps.

2. Les modes propres (11.7) pour $L = L_0$ sont des solutions de (11.14) pour $t < 0$ ou $t > T$, mais pas pour $0 \leq t \leq T$. Soit $\phi_n^-(x, t)$ la solution de (11.14) pour tout t de $-\infty$ à $+\infty$ définie par les conditions initiales

$$\phi_n^-(x, t) = A_n^-(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-i\omega_n t} \sin(k_n x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{i\pi n c t}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L_0}\right) \quad \text{pour } t \leq 0. \quad (11.21)$$

Les solutions $\phi_n^+(x, t) = (\phi_n^-(x, t))^*$ sont leurs complexes conjuguées.

Calculer les produits scalaires $\langle \phi_m^-, \phi_n^- \rangle$, $\langle \phi_m^+, \phi_n^+ \rangle$ et $\langle \phi_m^-, \phi_n^+ \rangle$.

3. On admettra que les fonctions $A_n^\pm(x, t)$ forment une base des solutions complexes de (11.14) pour $t > T$. Pour $t > T$, on peut donc développer le mode propre $\phi_n^-(x, t)$ sur ces fonctions :

$$\phi_n^-(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_{nm} A_m^-(x, t) + \beta_{nm} A_m^+(x, t)] \quad \text{pour } t > T. \quad (11.22)$$

Montrer que les coefficients α_{ij} , β_{ij} vérifient les relations

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{nm}^* \alpha_{pm} - \beta_{nm}^* \beta_{pm}) = \delta_{np}, \quad (11.23)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{nm} \beta_{pm} - \beta_{nm} \alpha_{pm}) = 0, \quad (11.24)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{mn}^* \alpha_{mp} - \beta_{mn} \beta_{mp}^*) = \delta_{np}, \quad (11.25)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{mn}^* \beta_{mp} - \beta_{mn} \alpha_{mp}^*) = 0. \quad (11.26)$$

4. L'opérateur du champ à un instant t quelconque est la généralisation de (11.8), forme qui reste valable à $t < 0$,

$$A(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n^-(x, t) a_n + \phi_n^+(x, t) a_n^\dagger]. \quad (11.27)$$

Montrer que pour $t > T$, l'opérateur $A(x, t)$ est de la forme

$$A(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^-(x, t) b_n + A_n^+(x, t) b_n^\dagger] \quad (11.28)$$

et exprimer les opérateurs b_n et b_n^\dagger en fonction des opérateurs a_n , a_n^\dagger et des nombres α_{ij} , β_{ij} .

5. Calculer les commutateurs $[b_m, b_n^\dagger]$, $[b_m, b_n]$ et $[b_m^\dagger, b_n^\dagger]$. Si l'état du système est $|\psi_{\text{in}}\rangle$ dans le point de vue de Heisenberg (on rappelle que $|\psi_{\text{in}}\rangle$ ne dépend pas du temps), quelles sont les interprétations physiques des éléments de matrice $\langle\psi_{\text{in}}| a_n^\dagger a_n |\psi_{\text{in}}\rangle$ et $\langle\psi_{\text{in}}| b_n^\dagger b_n |\psi_{\text{in}}\rangle$?
6. La cavité est dans l'état vide de photon $|\psi_{\text{in}}\rangle = |0_{\text{in}}\rangle$ aux temps $t < 0$. Déterminer en fonction des α_{ij} et β_{ij} le nombre de photons créés que l'on retrouve aux temps $t > T$ dans la cavité. Quelle est leur énergie totale ?

Formulaire

$$\int_0^L \sin(k_m x) \sin(k_n x) dx = \int_0^L \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx = \frac{L}{2} \delta_{mn}. \quad (11.29)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (11.30)$$

12

Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs

[Partiel du 19 novembre 2004 (durée 3 h)]

Le lagrangien étudié dans la partie **B** présente une **brisure spontanée de symétrie**. La symétrie continue $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\phi(x)$ du lagrangien n'est pas une symétrie de l'état du vide. À cette symétrie est associé un champ scalaire réel de masse nulle (**boson de Goldstone**).

Dans la partie **C**, le champ de jauge A^μ (photon) acquiert une masse non nulle par couplage avec le champ scalaire ϕ (**mécanisme de Higgs**). Par suite de la symétrie de jauge, il n'y a plus de boson de Goldstone.

A. Champ scalaire complexe

On étudie un champ scalaire complexe $\phi(x)$ défini sur l'espace de Minkowski \mathcal{E} , x désignant l'ensemble des coordonnées x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Ce champ peut être considéré comme formé de deux champs scalaires réels $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$. On notera $\phi^*(x)$ le champ complexe conjugué du champ $\phi(x)$:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad \phi^* = \phi_1 - i\phi_2. \quad (12.1)$$

Le système est régi par l'action $S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x$ où la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi^*) - V(|\phi|^2) \quad \text{avec} \quad V(|\phi|^2) = \frac{k^2 |\phi|^2}{2} \quad \text{et} \quad k > 0. \quad (12.2)$$

1. Déterminer les équations du mouvement sous une forme manifestement covariante. Pour cela, on demande d'appliquer le principe de moindre action en utilisant les champs réels ϕ_1 et ϕ_2 .
2. Vérifier qu'on retrouve les équations du mouvement de la question précédente à partir du principe de moindre action lorsqu'on traite $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ comme deux champs indépendants.
3. Déterminer les moments conjugués $\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ des champs $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ respectivement. Calculer la densité d'énergie $\mathcal{H}(\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2, \vec{\nabla}\phi_1, \vec{\nabla}\phi_2)$.
4. Quel est le niveau fondamental du système ? Est-il dégénéré ?
5. Lorsqu'on quantifie le système, une particule d'énergie E et de quantité de mouvement \vec{p} correspond à un champ classique $\phi(t, \vec{r}) = Ae^{i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar}$.

Quelle est la relation entre E et \vec{p} ?

Quelle est la masse de la particule ?

B. Lagrangien en $|\phi|^4$

Comme dans la partie **A**, on étudie un champ scalaire complexe $\phi(x)$, mais la densité lagrangienne est maintenant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi^*) - V(|\phi|^2) \quad \text{avec} \quad V(|\phi|^2) = \frac{-K^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4}{2} \quad (12.3)$$

où

$$K > 0 \quad \text{et} \quad \lambda > 0. \quad (12.4)$$

Le lagrangien (12.3) diffère du lagrangien (12.2) par la présence du terme en $|\phi|^4$ et par le signe devant le terme en $|\phi|^2$.

1. Pourquoi le système n'aurait-il aucun sens physique sans la présence du terme en $|\phi|^4$ (c'est-à-dire pour $\lambda = 0$) ?
2. Déterminer les équations du mouvement sous une forme manifestement covariante.
3. Déterminer les moments conjugués $\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ des champs $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ respectivement. Calculer la densité d'énergie $\mathcal{H}(\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2, \vec{\nabla} \phi_1, \vec{\nabla} \phi_2)$.
4. Montrer que l'énergie du système est minimale pour le champ

$$\phi_0(x) = a e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{K^2}{2\lambda}} \quad \text{et} \quad \theta = \text{constante réelle.} \quad (12.5)$$

Montrer que le niveau fondamental du système est dégénéré.

Interpréter cette dégénérescence par les propriétés de symétrie de la densité lagrangienne.

5. On suppose que le système est initialement dans l'état fondamental $\phi_0(x) = a$ et on étudie les excitations à partir de cet état. Pour cela, on introduit un nouveau champ scalaire complexe $\psi(x)$, ou deux champs scalaires réels $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ en posant

$$\phi(x) = a + \psi(x) = a + \psi_1(x) + i \psi_2(x). \quad (12.6)$$

a. Exprimer la densité lagrangienne (12.3) en termes de a , λ , ψ_1 et ψ_2 .

b. Pour les *petites* excitations, on néglige dans la densité lagrangienne les termes d'ordres 3 et 4 en $\psi(x)$. Lorsqu'on quantifie le système, comme à la question **A.5**, une particule est associée à chacun des champs ψ_1 et ψ_2 .

Quelles sont leurs masses respectives m_1 et m_2 ?

C. Champ scalaire et champ électromagnétique

Le champ scalaire complexe $\phi(x)$ de la partie **B** est couplé au champ électromagnétique décrit par le quadripotential $A_\mu(x)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Le système est régi par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \phi) (D^\mu \phi)^* - \frac{-K^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4}{2} - \frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (12.7)$$

où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (12.8)$$

D_μ est la *dérivée covariante*

$$D_\mu = \partial_\mu + i \gamma A_\mu(x) \quad (12.9)$$

et γ une constante ($\gamma \neq 0$).

1. Trouver, par analyse dimensionnelle, les expressions possibles de la masse et de la charge électrique des particules.

2. Montrer que la densité lagrangienne (12.7) est invariante dans la transformation de jauge

$$\begin{cases} \phi'(x) &= \phi(x) e^{i\gamma\Lambda(x)} \\ \phi'^*(x) &= \phi^*(x) e^{-i\gamma\Lambda(x)} \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x) \end{cases} \quad (12.10)$$

où $\Lambda(x)$ est une fonction réelle arbitraire.

3. Déterminer les équations du mouvement pour les champs $\phi(x)$ et $A_\mu(x)$ sous une forme manifestement covariante. On conseille d'utiliser la méthode du **A.2** en admettant que, pour ce calcul, on peut considérer $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ comme deux champs indépendants. On posera

$$j^\nu(x) = \gamma \frac{\phi(D^\nu\phi)^* - \phi^*(D^\nu\phi)}{2i}. \quad (12.11)$$

4. Quelle est l'interprétation physique du quadrivecteur $j^\mu(x)$?

Vérifier à partir des équations du mouvement que

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \quad (12.12)$$

En déduire l'expression d'un scalaire invariant conservé.

5. Pourquoi peut-on imposer

$$\phi(x) = \phi^*(x) = \rho(x) \geq 0 ? \quad (12.13)$$

Montrer que les équations du mouvement peuvent alors s'écrire

$$\square \rho - \gamma^2 A_\mu A^\mu \rho - K^2 \rho + 2\lambda \rho^3 = 0 \quad (12.14)$$

$$\partial_\mu (\gamma \rho^2 A^\mu) = 0 \quad (12.15)$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + \mu_0 \gamma^2 \rho^2 A^\nu = 0 \quad (12.16)$$

avec

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \quad (12.17)$$

6. Vérifier qu'il y a une solution

$$\rho = \rho_0 = \text{constante}, \quad A^\nu = 0 \quad (12.18)$$

des équations (12.14-12.16).

On considère que le champ $\rho(x)$ est gelé à la valeur $\rho(x) = \rho_0$ (on néglige ses fluctuations).

Quelle est alors l'équation du mouvement du champ A^ν ?

Quelle est la masse m_p de la particule (*photon*) associée à ce champ ?

D. Symétries et lois de conservation

1. On considère un champ scalaire complexe $\phi(x)$ dont le mouvement est régi par le principe de moindre action associé à une densité lagrangienne

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*). \quad (12.19)$$

a. Écrire de façon générale les équations du mouvement en considérant $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ comme deux champs indépendants (cf. question **A.2**).

b. On effectue la petite variation

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \quad \phi'^*(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) \quad (12.20)$$

à partir d'une solution ϕ des équations du mouvement, $\delta\phi(x)$ étant infiniment petit.

Montrer que la fonctionnelle (12.19) varie de

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi'] - \mathcal{L}[\phi] = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \delta\phi^* \right). \quad (12.21)$$

c. On suppose que dans la variation (12.20), effectuée avec

$$\delta\phi(x) = i\epsilon\phi(x) \quad \text{et} \quad \delta\phi^*(x) = -i\epsilon\phi^*(x), \quad (12.22)$$

où ϵ est un nombre réel infinitésimal, la densité lagrangienne (12.19) est invariante : $\mathcal{L}[\phi'] = \mathcal{L}[\phi]$.

Montrer que le quadrivecteur

$$J^\mu = i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \phi^* \right) \quad (12.23)$$

est de quadridivergence nulle.

2. a) Vérifier que les densités lagrangiennes (12.2), (12.3) et (12.7) sont invariantes dans la variation définie par les équations (12.20) et (12.22). Dans le cas de (12.7), le champ A^μ n'est pas modifié dans la variation : $A'^\mu(x) = A^\mu(x)$.

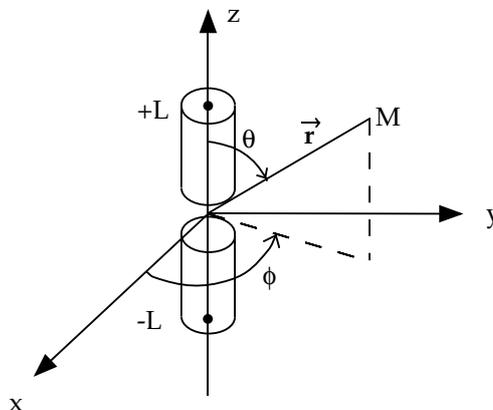
b. Dans chacun de ces cas, calculer le quadrivecteur (12.23) en fonction des champs et de leurs dérivées.

c. Commenter le titre de cette partie **D**.

13

Antenne mince

Une antenne mince est constituée d'un conducteur parfait cylindrique de rayon a très petit devant sa longueur $2L$. Elle est alimentée par une ouverture mince pratiquée en son centre. Le signal d'entrée, de fréquence ω , provoque dans le cylindre (du fait de l'approximation $a \ll L$) une densité de courant $\vec{J}(\vec{r}, t) = J(\vec{r}) \cos(\omega t) \hat{z}$. On admettra que tout le problème est à symétrie azimutale. Enfin on posera $k = \omega/c$ et $\lambda = 2\pi/k$.



13.1 Détermination du courant.

A/ Rappeler l'expression du potentiel vecteur en fonction de $J(\vec{r})$ (on utilisera des notations complexes pour la partie temporelle). Relier les expressions des potentiels scalaire ϕ et vecteur \vec{A} . En déduire l'amplitude $\vec{E}(\vec{r})$ du champ électrique en fonction de \vec{A} .

B/ Le conducteur étant parfait, la composante tangentielle E_z du champ électrique doit être nulle à sa surface. A quelle équation différentielle satisfait \vec{A} à la surface de l'antenne ? En déduire $\vec{A}(\rho = a, z)$. (Il apparaît deux constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer).

C/ On suppose que le courant circule en périphérie, disons pour fixer les idées entre $a - \varepsilon$ et a avec $\varepsilon \ll a$ (cas d'un conducteur creux ou d'une alimentation haute fréquence). Il devient acceptable de négliger la dépendance de \vec{J} en ρ . Montrer que le courant $I(z)$ satisfait une équation intégrale de la forme :

$$A_z(\rho = a, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^{+L} dz' I(z') K(z - z'). \quad (13.1)$$

Montrer que le noyau $K(\zeta)$ de cette équation représente approximativement la moyenne azimutale de la fonction de Green e^{ikr}/r :

$$K(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\beta \frac{e^{ik(\zeta^2 + 4a^2 \sin^2 \beta)^{1/2}}}{(\zeta^2 + 4a^2 \sin^2 \beta)^{1/2}}. \quad (13.2)$$

D/ On vient de trouver une méthode pour évaluer de manière approchée le courant dans une antenne mince. On pressent que si λ et L sont suffisamment grands devant a , alors $K(\zeta)$ se comporte comme une distribution de Dirac. En déduire qu'alors (seulement dans ce cas) $I(z)$ est une fonction sinusoïdale de z .

13.2 Détermination de la puissance rayonnée.

Jusqu'à présent nous avons voulu justifier que, pour $a \rightarrow 0$ et $L \ll \lambda$ la densité de courant se met sous la forme :

$$\vec{J}(x, y, z) = I(z)\delta(x)\delta(y) \hat{z}, \quad (13.3)$$

avec une dépendance sinusoidale en z du courant.

A/ Supposons une alimentation symétrique : $I(z) = I(-z)$. Déterminer le courant en fonction de son amplitude I_0 (on se souviendra que le courant s'annule aux extrémités de l'antenne).

B/ On supposera désormais que $r \gg L$ et λ . Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ du champ rayonné. En déduire $\vec{B}(\vec{r})$ puis $dP/d\Omega$ (puissance rayonnée moyennée sur une période).

C/ Quelques cas particuliers :

C.1 Que se passe-t-il pour $\lambda \gg L$? Exprimer puis tracer $I(z)$ et $dP/d\Omega$. Calculer la puissance totale rayonnée P .

On définit le gain par $g = 4\pi P_{max}/P$ où $P_{max} = (dP/d\Omega)_{max}$. Interpréter g puis le calculer dans ce cas particulier.

C.2 Simplifier les expressions de $I(z)$ et de $dP/d\Omega$ lorsque :

- $L = n\lambda$
- $L = (n + \frac{1}{2})\lambda$
- $L = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

où n désigne un entier.

Préciser le nombre et la position des racines de $dP/d\Omega$. Tracer $I(z)$ et $\frac{dP}{d\Omega}(\theta)$ pour $L = \lambda/4, \lambda/2, 3\lambda/4, \lambda$.

D/ Développement multipolaire :

Rappeler, lorsque $r \gg \lambda \gg L$ l'expression du développement multipolaire de \vec{A} . Calculer les deux premiers termes du développement et comparer à l'expression exacte calculée pour $\lambda = 4L$ (par exemple sous forme graphique...).

14

Désintégration bêta

On se propose d'évaluer l'énergie rayonnée par une particule mise rapidement en mouvement rectiligne uniforme. On va donc écrire $v(t) = v_0\theta(t)$ où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside.

La technique des potentiels retardés fait apparaître la difficulté a priori insurmontable d'une accélération infinie. On peut contourner ce problème par transformation de Fourier temporelle. En interprétant le spectre en fréquences obtenu il est possible (par exemple dans le cas de la désintégration β^-) de le modifier de façon convenable et d'aboutir à une solution raisonnable du problème posé.

A/ Rappeler les diverses formules permettant d'étudier le rayonnement par analyse de Fourier :

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J}_\omega \rightarrow \vec{A}_\omega \rightarrow \vec{B}_\omega \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial \omega} \rightarrow \frac{\partial W}{\partial \Omega} \quad (14.1)$$

B/ Donner $\vec{J}(\vec{r}, t)$ puis $\vec{J}_\omega(\vec{r})$ pour une charge q animée de la vitesse définie précédemment.

C/ En déduire, à grandes distances, l'expression approchée de $\vec{A}_\omega(\vec{r})$. On notera θ l'angle entre \vec{r} et \vec{J} et on introduira $\beta_0 = v_0/c$. Rappeler pourquoi il n'est pas utile de calculer le potentiel scalaire ϕ_ω à partir de $\rho(\vec{r}, t)$.

D/ Donner ensuite, dans la zone du rayonnement, $\vec{B}_\omega(\vec{r})$ puis $\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial \omega}$. Commenter le spectre obtenu.

E/ On considère la désintégration β^- d'un neutron au repos : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

On néglige le recul du proton. Estimer l'énergie cinétique T_e de l'électron. En déduire la fréquence maximale des photons émis pendant l'accélération brutale de l'électron. Proposer alors une modification de l'expression obtenue pour $\partial^2 W / \partial \Omega \partial \omega$, puis calculer l'énergie rayonnée W .

Application numérique : évaluer le rapport W/T_e .

Rappels : $m_n c^2 = 939,565$ MeV ; $m_p c^2 = 938,272$ MeV ; $m_e c^2 = 0,511$ MeV ; $\hbar c = 200$ MeV fm ; 1 fm = 10^{-15} m ; $e^2/\hbar c = 1/137$.

Rayonnement d'un anneau de stockage

Nous allons considérer un anneau circulaire de rayon R , placé sur le plan xOy comme indiqué sur la figure. Cet anneau est parcouru par des électrons qui ont été préalablement accélérés. Un champ magnétique (non indiqué sur la figure) oblige les électrons à décrire une trajectoire circulaire de rayon R et de fréquence ω_0 .

L'anneau n'est pas rempli de manière continue mais de manière pulsée : les particules sont stockées par paquets. Un modèle simple de cet anneau consiste à remplacer chaque amas d'électrons par une seule particule de charge q . Tous les amas stockés posséderont la même charge électrique totale. Le problème est divisé en deux parties. Dans la première on étudiera d'abord le rayonnement cyclotron d'un amas d'électrons (particule de charge q) placé sur une trajectoire circulaire ayant les caractéristiques mentionnées ci-dessus. En appliquant la théorie du rayonnement par une source périodique on obtiendra une expression de la puissance rayonnée $dP_n/d\Omega$ à la fréquence $n\omega_0$ (n -ième harmonique de la fréquence fondamentale). Ensuite on étudiera le rayonnement de N particules de charge q en mouvement circulaire uniforme et on obtiendra un facteur de correction à l'expression de $dP_n/d\Omega$ pour une particule. On montrera également que lorsque les particules sont uniformément distribuées sur le cercle, toute la puissance est rayonnée aux multiples d'une nouvelle fréquence fondamentale $N\omega_0$. Dans la seconde partie on vérifiera que la puissance rayonnée s'annule lorsque $N \rightarrow \infty$ (ce qui correspond au cas d'un anneau parcouru par un courant continu).

15.1 Rayonnement d'un ensemble de N particules

La géométrie du problème est indiquée sur la figure. Considérons d'abord le cas d'une seule particule. On dénotera sa position par $\vec{r}_1(t)$, le vecteur densité de courant étant donné par :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q\vec{v}_1(t)\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1). \quad (15.1)$$

A/ En s'appuyant sur la solution du problème de rayonnement donnée dans l'annexe, vérifier que les composantes de Fourier $\vec{A}_n(\vec{r})$ ($n = -\infty \dots \infty$) du potentiel vecteur sont données par ($\vec{k}_n = \hat{r} n\omega_0/c$)

$$\vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{e^{ik_n r}}{r} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{041}^T \vec{v}_1(t) e^{in\omega_0 t} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1(t)} dt. \quad (15.2)$$

B/ Démontrer que la puissance moyenne rayonnée s'écrit :

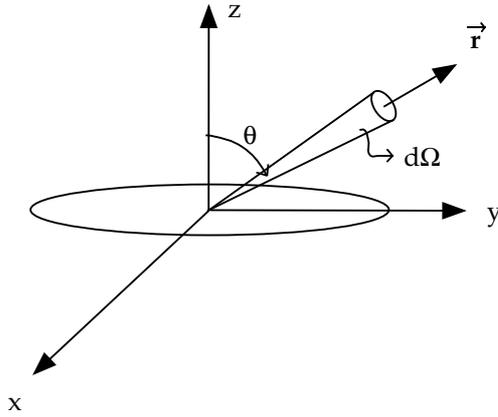
$$\frac{dP}{d\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dP_n}{d\Omega} \quad \text{avec} \quad \frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{cq^2\mu_0}{8\pi^2} \vec{p}_n \cdot \vec{p}_n^*, \quad (15.3)$$

où $dP_n/d\Omega$ est la puissance moyenne rayonnée à la fréquence de la n -ième harmonique $\omega_n = n\omega_0$ et

$$\vec{p}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{k}_n \wedge \vec{v}_1(t) e^{in\omega_0 t} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1(t)} dt. \quad (15.4)$$

C/ Considérons maintenant un ensemble de N particules qui tournent dans l'anneau avec la même vitesse angulaire ω_0 . On notera ϕ_ν la position angulaire de la ν -ième particule à l'instant $t = 0$ et on prendra $\phi_1 = 0$. Le vecteur densité de courant est donné par :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{\nu=1}^N q\vec{v}_\nu(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)). \quad (15.5)$$



Les trajectoires vérifient $\vec{r}_\nu(t) = \vec{r}_1(t + \phi_\nu/\omega_0)$. Réexaminer l'expression de la puissance rayonnée par le système de particules. Démontrer, en utilisant la remarque précédente et un changement de variable dans les intégrales temporelles que :

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{dP_n(1)}{d\Omega} F_n(N), \quad (15.6)$$

où $dP_n(1)/d\Omega$ est l'expression (15.3) déjà obtenue pour la particule 1 et $F_n(N)$ un facteur de structure donné par :

$$F_n(N) = \left| \sum_{\nu=1}^N e^{in\phi_\nu} \right|^2. \quad (15.7)$$

D/ Considérons maintenant le cas où les N particules sont uniformément distribuées sur le cercle (c'est à dire $\phi_\nu = 2\pi(\nu - 1)/N$). Démontrer que :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dP_n}{d\Omega} = N^2 \left[\frac{dP_N(1)}{d\Omega} + \frac{dP_{2N}(1)}{d\Omega} + \dots \right], \quad (15.8)$$

c'est à dire que le rayonnement correspond à un système dont la fréquence fondamentale est $N\omega_0$. Donner une explication physique simple de ce phénomène.

15.2 Le cas où $N \rightarrow \infty$

Nous allons par la suite étudier l'équation (15.4) en nous limitant (pour simplifier les calculs) au cas non relativiste (c'est à dire $\beta = v/c = \omega_0 R/c \ll 1$). La symétrie axiale du problème nous permet de choisir le vecteur \vec{k}_n dans le plan xOz . Pour simplifier davantage les calculs nous nous limiterons à étudier la puissance rayonnée dans le plan de l'anneau, à $\theta = \pi/2$. Le vecteur de propagation est donné par $\vec{k}_n = n\omega_0/c \hat{x}$ et la trajectoire de la particule 1 est

$$\vec{r}_1(t) = R(\cos(\omega_0 t)\hat{x} + \sin(\omega_0 t)\hat{y}). \quad (15.9)$$

A/ Examiner l'expression qui en résulte pour \vec{p}_n , Eq. (15.4). Dans le cas général, les intégrales qui donnent les composantes de ce vecteur sont des fonctions de Bessel. Vérifier que dans la limite $\beta \ll 1$ le développement limité de \vec{p}_n en fonction de β démarre avec la puissance β^n et calculer explicitement ce terme dominant.

B/ Démontrer ensuite que si $N \gg 1$ alors

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\theta=\pi/2} = \frac{\mu_0 c}{4\pi} N^3 \omega_0^2 \frac{q^2}{4\pi^2} \left(\frac{e\beta}{2} \right)^{2N}. \quad (15.10)$$

Pour aboutir à ce résultat on utilisera l'expression approchée de la fonction factorielle $\Gamma(N) = (N-1)!$ donnée en annexe (formule de Stirling). Discuter la limite $N \rightarrow \infty$.

Remarque : le fait que la puissance rayonnée par une distribution homogène dans l'anneau s'annule est vrai quels que soient β et la direction d'émission θ . On peut obtenir (voir Jackson, exercice 14.8, page 695 ou Landau équation (74.8)) une expression exacte pour la puissance rayonnée à la fréquence $n\omega_0$ qui s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel. Cette expression exacte s'annule lorsque $N \rightarrow \infty$.

15.3 Annexe

1/ Les conventions adoptées pour le développement en série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ de période $T = 2\pi/\omega_0$ sont :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega_0 t} \quad f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega_0 t} dt \quad (15.11)$$

2/ Soit une source périodique dont les amplitudes de Fourier sont $\vec{J}_n(\vec{r}')$. Le champ de rayonnement est donné par :

$$\vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ik_n r}}{r} \int_V d^3 r' \vec{J}_n(\vec{r}') e^{-ik_n \cdot \vec{r}'}, \quad \vec{B}_n(\vec{r}) = i\vec{k}_n \wedge \vec{A}_n(\vec{r}), \quad \vec{E}_n(\vec{r}) = c\vec{B}_n(\vec{r}) \wedge \hat{r}. \quad (15.12)$$

3/ Vecteur de Poynting :

$$\vec{S} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0 = (c/\mu_0) B^2(\vec{r}, t) \hat{r}. \quad (15.13)$$

4/ Somme d'une série géométrique :

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \alpha^\nu = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \quad \text{pour } \alpha \neq 1. \quad (15.14)$$

5/ Une intégrale utile :

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(n+k)\omega_0 t} = \delta_{n+k,0}. \quad (15.15)$$

6/ Formule de Stirling :

$$\text{si } n \gg 1 \text{ alors } \Gamma(n) = (n-1)! \simeq (n/e)^n \sqrt{2\pi/n}. \quad (15.16)$$