Examen

1. Soit l'équation différentielle linéaire et homogène,

$$U\,f(x) + V\,\frac{df(x)}{dx} = 0\ ,$$

   où U et V sont des constantes données non nulles.

   (a) Résoudre cette équation différentielle par la méthode générique afin de trouver la fonction $f(x)$.

   (b) Vérifier que la solution obtenue $f_0(x)$ est bien solution de l'équation considérée.

   (c) En déduire une solution de l'équation différentielle non homogène, $U\,f(x) + V\,\frac{df(x)}{dx} = W$, où W est une constante.

2. On considère l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre 2,

$$a^2\,x(t) - \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0\ ,$$

   où a est une constante. Résoudre cette équation différentielle par la méthode générique afin de trouver la fonction $x(t)$.

3. (a) Trouver les solutions réelles de l'équation $x^2 - 3x + (5/4) = 0$.

   (b) On considère maintenant l'équation différentielle,

$$y''(t) - 3y'(t) + \frac{5}{4}y(t) = 0\ . \qquad (1)$$

   Chercher toutes les solutions $y(t)$ de cette équation.

   (c) Déterminer la solution de l'Équation (1) telle que $y(0) = 3$ et $y'(0) = 7/2$.

4. Tracer la ligne de niveau A^2 de la fonction à 2 variables $h(u,v) = (u+2)^2 + v^2$.

5. Calculer le vecteur gradient $\vec{\nabla} f(x,y)$ de la fonction à 2 variables $f(x,y) = x^3 + 4y$. Quel est ce vecteur au point de coordonnées $(x = 2, y = 5)$?

6. Les fonctions $x(t) = 2t$ et $y(t) = t^2$ sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$? Calculer alors la dérivée $\frac{dK(t)}{dt}$ de la fonction $K(t) = g(x(t), y(t))$ basée sur la fonction à 2 variables $g(x,y) = \cos(x) + 2\sin(y)$.

Questions sur des thèmes antérieurs :

1. Calculer la limite de la fonction $f(u) = \frac{\sin(u)}{u}$ en $u \to 0$. Le résultat peut-il être obtenu directement ? Quelle méthode peut-elle être utilisée ?
2. Mêmes questions pour la fonction $g(a) = \frac{e^a - \sqrt{1+a}}{a}$ en $a \to 0$.

3. Mettre l'expression $\frac{-1}{2}\left\{\ln([a+b]^2)-\ln(c^2)\right\}$ sous la forme $\ln(\ldots)$.
4. Dériver par rapport à la variable r la fonction $p(r)=\ln(e^r-r)$.
5. Soit la courbe paramétrée définie par les deux fonctions $x(t)=t^2+1$ et $y(t)=3t-4$. Quel est le vecteur vitesse au moment $t_1=1$?
6. Soit la fonction $k(q)=q^2-1$ définie sur $\mathbb{R}$. En utilisant le lemme de *Rolle*, démontrer qu'il existe un point $q=h$, dans l'intervalle $h\in]-1,1[$, de dérivée nulle : $k'(h)=0$.
7. Résoudre le système suivant, à deux équations et deux inconnues, par combinaison d'équations,

$$\begin{cases} a=5b+2 \\ 4b-2a=0 \end{cases}.$$

8. Calculer $\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{2y^2+3}}\,dy$ au moyen d'un changement de variable.