

Renormalisation Non Commutative

Vincent Rivasseau

Laboratoire de Physique Théorique
Université Paris-Sud XI, Orsay

Samedi 28 Avril 2007

Introduction

La théorie des champs non-commutative

Théories covariantes, théorie auto-duales

La chasse au fantôme

Conclusions

Introduction

Introduction

La théorie des champs non-commutative

Théories covariantes, théorie auto-duales

La chasse au fantôme

Conclusions

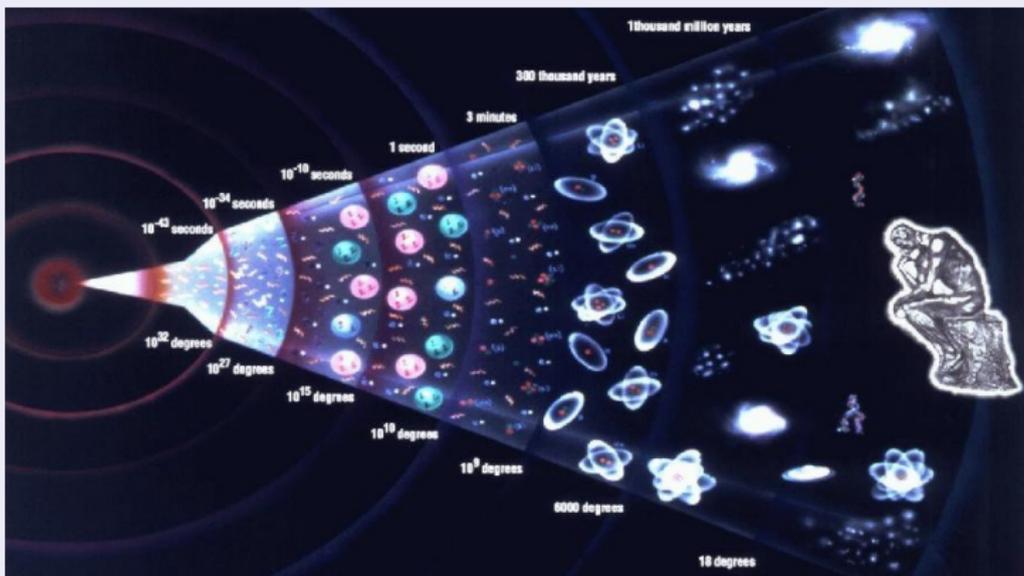
Les échelles de l'univers

Les échelles de l'univers

La physique se déploie entre la longueur de Planck $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \simeq 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ et l'horizon de l'univers observable, en pratique en coordonnées comobiles environ 45 milliards d'années-lumière, soit $4.4 \cdot 10^{26} \text{ m}$ ou $2.7 \cdot 10^{61} \ell_P$.

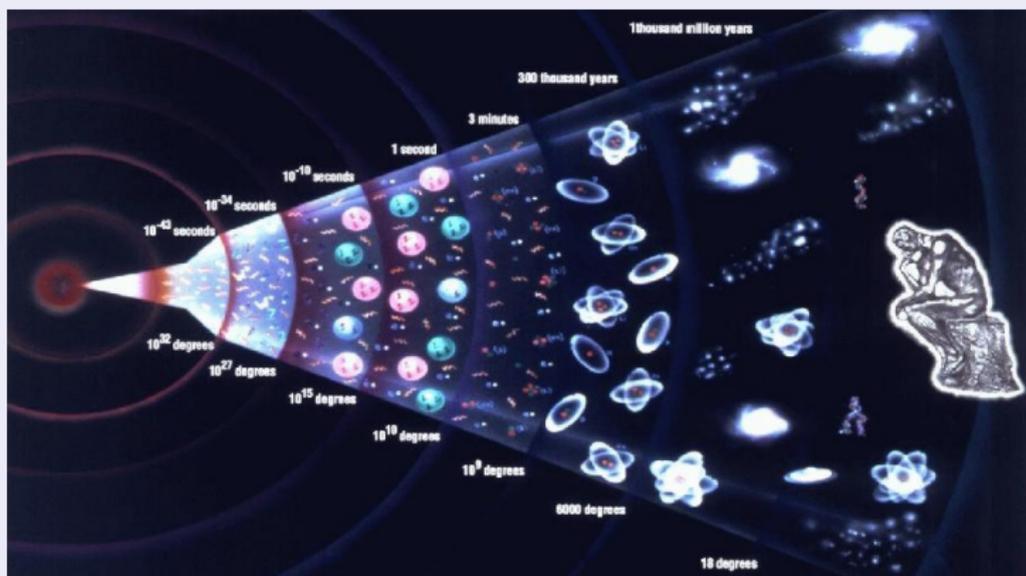
Les échelles de l'univers

La physique se déploie entre la longueur de Planck $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \simeq 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ et l'horizon de l'univers observable, en pratique en coordonnées comobiles environ 45 milliards d'années-lumière, soit $4.4 \cdot 10^{26} \text{ m}$ ou $2.7 \cdot 10^{61} \ell_P$.



Les échelles de l'univers

La physique se déploie entre la longueur de Planck $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \simeq 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ et l'horizon de l'univers observable, en pratique en coordonnées comobiles environ 45 milliards d'années-lumière, soit $4.4 \cdot 10^{26} \text{ m}$ ou $2.7 \cdot 10^{61} \ell_P$.



L'univers comporte donc environ 61 puissances de 10 ou 140 puissances de e .

Terra Incognita

Terra Incognita

Nous connaissons assez bien les 45 plus grandes échelles de l'univers.

Terra Incognita

Nous connaissons assez bien les 45 plus grandes échelles de l'univers.



Terra Incognita

Nous connaissons assez bien les 45 plus grandes échelles de l'univers.



Mais les quinze à seize échelles entre ℓ_P et $2 \cdot 10^{-19}$ mètres (environ 1 Tev), forment la dernière véritable **terra incognita** de la physique.

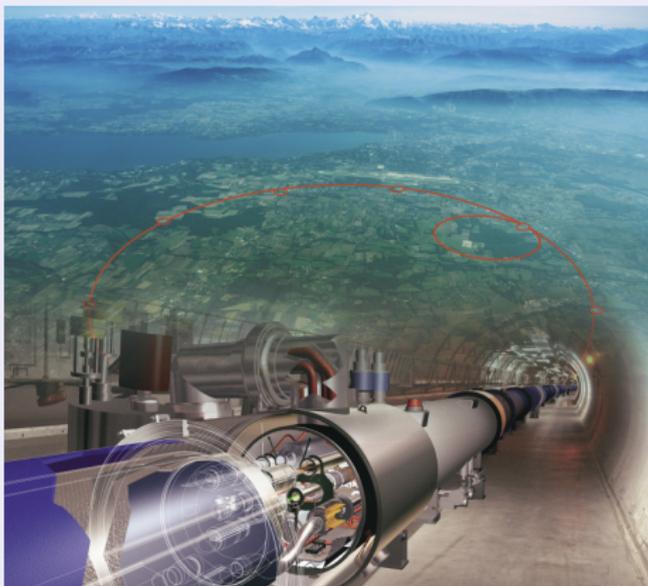
Le “dernier” grand accélérateur?

Le “dernier” grand accélérateur?

L'an prochain, l'accélérateur LHC au Cern devrait ouvrir une nouvelle puissance de 10 à l'observation directe.

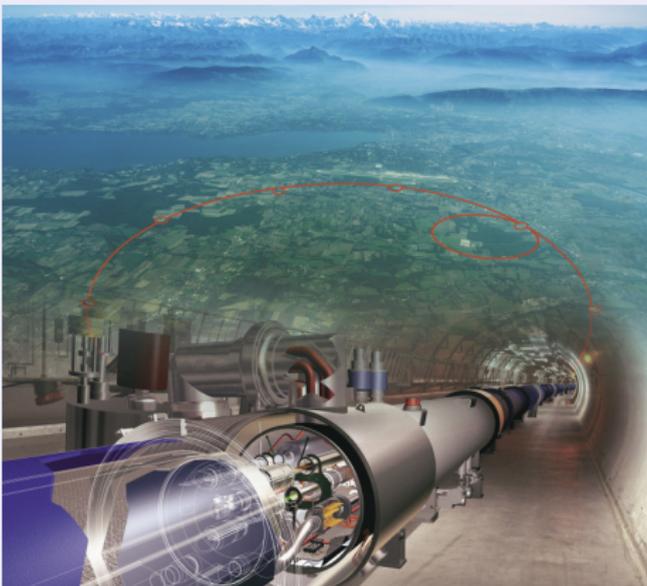
Le “dernier” grand accélérateur?

L'an prochain, l'accélérateur LHC au Cern devrait ouvrir une nouvelle puissance de 10 à l'observation directe.



Le “dernier” grand accélérateur?

L’an prochain, l’accélérateur LHC au Cern devrait ouvrir une nouvelle puissance de 10 à l’observation directe.



Mais dans le futur proche aucun nouvel assaut direct de ce type sur la [terra incognita](#) n'est prévu, d'où l'importance de la réflexion théorique et mathématique.

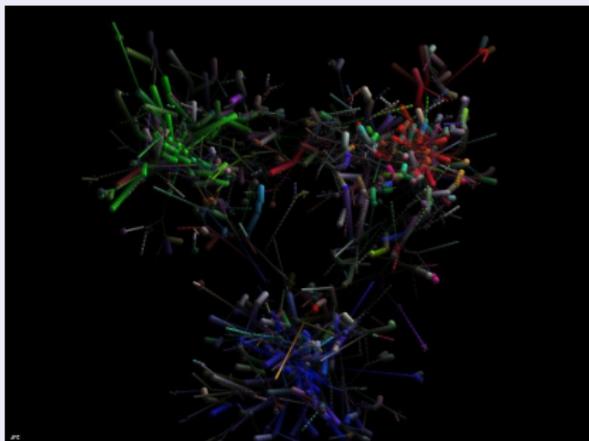
La théorie des champs

La théorie des champs

La théorie des champs est un point de départ obligé de tout explorateur de la [terra incognita](#) car elle décrit avec précision au moins ses rivages. Le modèle standard explique bien toutes les expériences de physique des particules à ce jour.

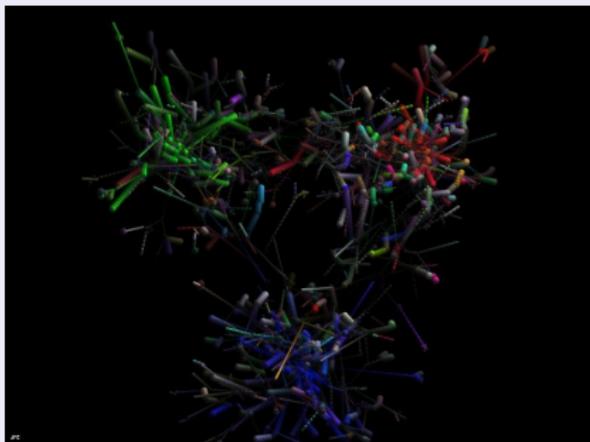
La théorie des champs

La théorie des champs est un point de départ obligé de tout explorateur de la [terra incognita](#) car elle décrit avec précision au moins ses rivages. Le modèle standard explique bien toutes les expériences de physique des particules à ce jour.



La théorie des champs

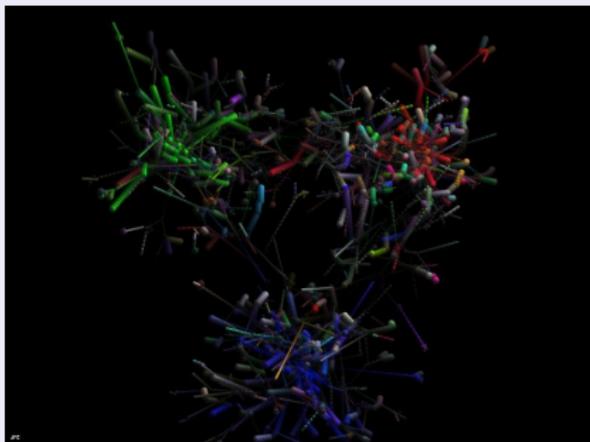
La théorie des champs est un point de départ obligé de tout explorateur de la [terra incognita](#) car elle décrit avec précision au moins ses rivages. Le modèle standard explique bien toutes les expériences de physique des particules à ce jour.



Pendant la théorie des champs souffre de deux défauts principaux:

La théorie des champs

La théorie des champs est un point de départ obligé de tout explorateur de la *terra incognita* car elle décrit avec précision au moins ses rivages. Le modèle standard explique bien toutes les expériences de physique des particules à ce jour.

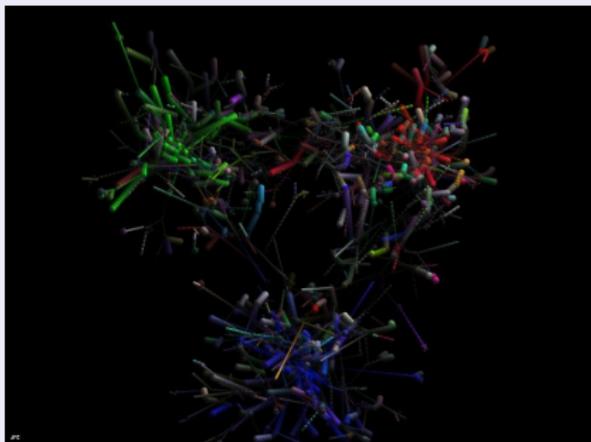


Pendant la théorie des champs souffre de deux défauts principaux:

- ▶ Elle ne s'applique pas à la relativité générale, c'est à dire à la gravitation.

La théorie des champs

La théorie des champs est un point de départ obligé de tout explorateur de la *terra incognita* car elle décrit avec précision au moins ses rivages. Le modèle standard explique bien toutes les expériences de physique des particules à ce jour.



Pendant la théorie des champs souffre de deux défauts principaux:

- ▶ Elle ne s'applique pas à la relativité générale, c'est à dire à la gravitation.
- ▶ Contenant beaucoup de champs et de paramètres elle ressemble plus à une "table de Mendeleiev" qu'à une théorie vraiment fondamentale.

La renormalisation

La renormalisation

Les premiers calculs en théorie des champs fournissaient toujours des résultats infinis. Des calculs comparables à l'expérience n'ont pu être obtenus qu'à partir de l'invention de la renormalisation.

La renormalisation

Les premiers calculs en théorie des champs fournissaient toujours des résultats infinis. Des calculs comparables à l'expérience n'ont pu être obtenus qu'à partir de l'invention de la renormalisation.

La première théorie de la renormalisation supprima ces infinis en décidant de n'exprimer les lois de la nature qu'en terme de constantes observables à basse énergie, dites renormalisées. Malgré des succès initiaux (explication du [décalage de Lamb](#) et du [facteur magnétique anormal \$g - 2\$](#) de l'électron...), les débuts de la renormalisation ne furent pas très prometteurs:

La renormalisation

Les premiers calculs en théorie des champs fournissaient toujours des résultats infinis. Des calculs comparables à l'expérience n'ont pu être obtenus qu'à partir de l'invention de la renormalisation.

La première théorie de la renormalisation supprima ces infinis en décidant de n'exprimer les lois de la nature qu'en terme de constantes observables à basse énergie, dites renormalisées. Malgré des succès initiaux (explication du [décalage de Lamb](#) et du [facteur magnétique anormal \$g - 2\$](#) de l'électron...), les débuts de la renormalisation ne furent pas très prometteurs:

- ▶ Pour F. Dyson, l'un de ses inventeurs, "il s'agissait d'une astuce inventée pour quelques mois, juste le temps de trouver quelque chose de mieux..."

La renormalisation

Les premiers calculs en théorie des champs fournissaient toujours des résultats infinis. Des calculs comparables à l'expérience n'ont pu être obtenus qu'à partir de l'invention de la renormalisation.

La première théorie de la renormalisation supprima ces infinis en décidant de n'exprimer les lois de la nature qu'en terme de constantes observables à basse énergie, dites renormalisées. Malgré des succès initiaux (explication du [décalage de Lamb](#) et du [facteur magnétique anormal \$g - 2\$](#) de l'électron...), les débuts de la renormalisation ne furent pas très prometteurs:

- ▶ Pour F. Dyson, l'un de ses inventeurs, "il s'agissait d'une astuce inventée pour quelques mois, juste le temps de trouver quelque chose de mieux..."
- ▶ Les mathématiciens aussi la considéraient comme une "recette de cuisine..."

La renormalisation

Les premiers calculs en théorie des champs fournissaient toujours des résultats infinis. Des calculs comparables à l'expérience n'ont pu être obtenus qu'à partir de l'invention de la renormalisation.

La première théorie de la renormalisation supprima ces infinis en décidant de n'exprimer les lois de la nature qu'en terme de constantes observables à basse énergie, dites renormalisées. Malgré des succès initiaux (explication du [décalage de Lamb](#) et du [facteur magnétique anormal \$g - 2\$](#) de l'électron...), les débuts de la renormalisation ne furent pas très prometteurs:

- ▶ Pour F. Dyson, l'un de ses inventeurs, "il s'agissait d'une astuce inventée pour quelques mois, juste le temps de trouver quelque chose de mieux..."
- ▶ Les mathématiciens aussi la considéraient comme une "recette de cuisine..."
- ▶ Dans les années 50, L. Landau découvrit une difficulté inattendue: les infinis jetés par la porte réapparaissaient en quelque sorte par la fenêtre. C'était le "fantôme de Landau", dont il va être longuement question.

Le fantôme de Landau

Le fantôme de Landau

Landau découvrit que le couplage en électrodynamique devenait **infini** à une énergie certes grande mais **finie**, pour la même raison qu'une particule entraînée par le flot d'un champ de vecteurs quadratique part à l'infini en un temps fini. La théorie des champs ne semblait donc pas consistante à haute énergie!

Le fantôme de Landau

Landau découvrit que le couplage en électrodynamique devenait **infini** à une énergie certes grande mais **finie**, pour la même raison qu'une particule entraînée par le flot d'un champ de vecteurs quadratique part à l'infini en un temps fini. La théorie des champs ne semblait donc pas consistante à haute énergie!



La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie des champs renormalisable la plus simple, ϕ_4^4 , est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^4 par ses fonctions de Schwinger qui sont les moments de la mesure formelle:

La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie des champs renormalisable la plus simple, ϕ_4^4 , est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^4 par ses fonctions de Schwinger qui sont les moments de la mesure formelle:

$$d\nu = \frac{1}{Z} e^{-(\lambda/4!) \int \phi^4 - (m^2/2) \int \phi^2 - (a/2) \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)} D\phi, \quad (1.1)$$

où

La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie des champs renormalisable la plus simple, ϕ_4^4 , est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^4 par ses fonctions de Schwinger qui sont les moments de la mesure formelle:

$$d\nu = \frac{1}{Z} e^{-(\lambda/4!) \int \phi^4 - (m^2/2) \int \phi^2 - (a/2) \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)} D\phi, \quad (1.1)$$

où

- ▶ λ est la constante de couplage, positive pour que la théorie soit stable;

La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie des champs renormalisable la plus simple, ϕ_4^4 , est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^4 par ses fonctions de Schwinger qui sont les moments de la mesure formelle:

$$d\nu = \frac{1}{Z} e^{-(\lambda/4!) \int \phi^4 - (m^2/2) \int \phi^2 - (a/2) \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)} D\phi, \quad (1.1)$$

où

- ▶ λ est la constante de couplage, positive pour que la théorie soit stable;
- ▶ m est la masse, fixant l'échelle d'énergie de la théorie renormalisée;

La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie des champs renormalisable la plus simple, ϕ_4^4 , est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^4 par ses fonctions de Schwinger qui sont les moments de la mesure formelle:

$$d\nu = \frac{1}{Z} e^{-(\lambda/4!) \int \phi^4 - (m^2/2) \int \phi^2 - (a/2) \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)} D\phi, \quad (1.1)$$

où

- ▶ λ est la constante de couplage, positive pour que la théorie soit stable;
- ▶ m est la masse, fixant l'échelle d'énergie de la théorie renormalisée;
- ▶ a est la constante dite de "fonction d'onde", fixée en général à 1;

La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie des champs renormalisable la plus simple, ϕ_4^4 , est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^4 par ses fonctions de Schwinger qui sont les moments de la mesure formelle:

$$d\nu = \frac{1}{Z} e^{-(\lambda/4!) \int \phi^4 - (m^2/2) \int \phi^2 - (a/2) \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)} D\phi, \quad (1.1)$$

où

- ▶ λ est la constante de couplage, positive pour que la théorie soit stable;
- ▶ m est la masse, fixant l'échelle d'énergie de la théorie renormalisée;
- ▶ a est la constante dite de "fonction d'onde", fixée en général à 1;
- ▶ Z est une normalisation pour que cette mesure soit une mesure de probabilité;

La théorie ϕ_4^4 ordinaire

La théorie des champs renormalisable la plus simple, ϕ_4^4 , est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^4 par ses fonctions de Schwinger qui sont les moments de la mesure formelle:

$$d\nu = \frac{1}{Z} e^{-(\lambda/4!) \int \phi^4 - (m^2/2) \int \phi^2 - (a/2) \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)} D\phi, \quad (1.1)$$

où

- ▶ λ est la constante de couplage, positive pour que la théorie soit stable;
- ▶ m est la masse, fixant l'échelle d'énergie de la théorie renormalisée;
- ▶ a est la constante dite de "fonction d'onde", fixée en général à 1;
- ▶ Z est une normalisation pour que cette mesure soit une mesure de probabilité;
- ▶ $D\phi$ est un produit formel $\prod_{x \in \mathbb{R}^d} d\phi(x)$ de mesures de Lebesgue en chaque point de \mathbb{R}^4 .

Le propagateur de ϕ_4^4 ordinaire

Le propagateur de ϕ_4^4 ordinaire

La covariance de la partie gaussienne de la mesure $d\nu$ s'appelle le propagateur

$$C(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad C(x, y) = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \frac{e^{-|x-y|^2/4\alpha}}{\alpha^2}, \quad (1.2)$$

Le propagateur de ϕ_4^4 ordinaire

La covariance de la partie gaussienne de la mesure $d\nu$ s'appelle le propagateur

$$C(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad C(x, y) = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \frac{e^{-|x-y|^2/4\alpha}}{\alpha^2}, \quad (1.2)$$

où l'on reconnaît le **noyau de la chaleur**.

Le propagateur de ϕ_4^4 ordinaire

La covariance de la partie gaussienne de la mesure $d\nu$ s'appelle le propagateur

$$C(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad C(x, y) = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \frac{e^{-|x-y|^2/4\alpha}}{\alpha^2}, \quad (1.2)$$

où l'on reconnaît le **noyau de la chaleur**.

Les fonctions de Schwinger se développent en graphes de Feynman.

Le propagateur de ϕ_4^4 ordinaire

La covariance de la partie gaussienne de la mesure $d\nu$ s'appelle le propagateur

$$C(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad C(x, y) = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \frac{e^{-|x-y|^2/4\alpha}}{\alpha^2}, \quad (1.2)$$

où l'on reconnaît le **noyau de la chaleur**.

Les fonctions de Schwinger se développent en graphes de Feynman.

La meilleure méthode pour étudier et comprendre la renormalisation consiste à couper le propagateur en tranches à la Wilson pour une analyse multi-échelles:

$$C = \sum_i C^i, \quad C^i(x, y) = \int_{M^{-2i}}^{M^{-2(i+1)}} d\alpha \dots \leq K M^{2i} e^{-cM^i \|x-y\|}$$

Le propagateur de ϕ_4^4 ordinaire

La covariance de la partie gaussienne de la mesure $d\nu$ s'appelle le propagateur

$$C(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad C(x, y) = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \frac{e^{-|x-y|^2/4\alpha}}{\alpha^2}, \quad (1.2)$$

où l'on reconnaît le **noyau de la chaleur**.

Les fonctions de Schwinger se développent en graphes de Feynman.

La meilleure méthode pour étudier et comprendre la renormalisation consiste à couper le propagateur en tranches à la Wilson pour une analyse multi-échelles:

$$C = \sum_i C^i, \quad C^i(x, y) = \int_{M^{-2i}}^{M^{-2(i+1)}} d\alpha \dots \leq K M^{2i} e^{-cM^i \|x-y\|}$$

ce qui donne un facteur M^{2i} par ligne et M^{-4i} par intégration $\int d^4x$.

La renormalisation de ϕ_4^4 ordinaire

La renormalisation de ϕ_4^4 ordinaire

La renormalisation repose sur la combinaison de **deux** arguments:

La renormalisation de ϕ_4^4 ordinaire

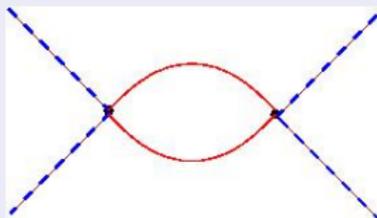
La renormalisation repose sur la combinaison de **deux** arguments:

- ▶ Le **principe de localité, indépendant de la dimension**: tout sous graphe formé de propagateurs internes de plus haute énergie que ses lignes externes semble local lorsque l'écart entre les énergies internes et externes grandit.

La renormalisation de ϕ_4^4 ordinaire

La renormalisation repose sur la combinaison de **deux** arguments:

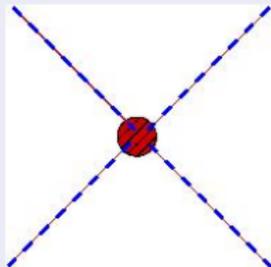
- ▶ Le **principe de localité, indépendant de la dimension**: tout sous graphe formé de propagateurs internes de plus haute énergie que ses lignes externes semble local lorsque l'écart entre les énergies internes et externes grandit.



La renormalisation de ϕ_4^4 ordinaire

La renormalisation repose sur la combinaison de **deux** arguments:

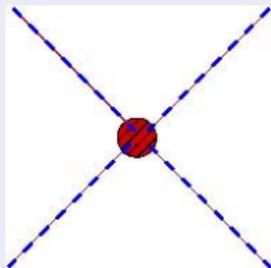
- ▶ Le **principe de localité, indépendant de la dimension**: tout sous graphe formé de propagateurs internes de plus haute énergie que ses lignes externes semble local lorsque l'écart entre les énergies internes et externes grandit.



La renormalisation de ϕ_4^4 ordinaire

La renormalisation repose sur la combinaison de **deux** arguments:

- ▶ Le **principe de localité, indépendant de la dimension**: tout sous graphe formé de propagateurs internes de plus haute énergie que ses lignes externes semble local lorsque l'écart entre les énergies internes et externes grandit.

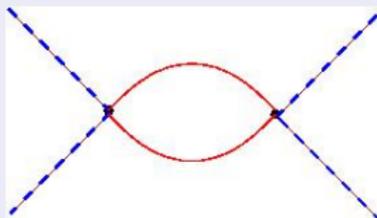


- ▶ Le **comptage de puissances, dépendant de la dimension d** : lorsqu'on compare un tel sous-graphe à un vertex local, le poids correspondant dépend de la dimension et du type de sous-graphe et la somme sur l'écart entre les énergies internes et externes peut soit converger soit diverger.

La renormalisation de ϕ_4^4 ordinaire

La renormalisation repose sur la combinaison de **deux** arguments:

- ▶ Le **principe de localité, indépendant de la dimension**: tout sous graphe formé de propagateurs internes de plus haute énergie que ses lignes externes semble local lorsque l'écart entre les énergies internes et externes grandit.



- ▶ Le **comptage de puissances, dépendant de la dimension d** : lorsqu'on compare un tel sous-graphe à un vertex local, le poids correspondant dépend de la dimension et du type de sous-graphe et la somme sur l'écart entre les énergies internes et externes peut soit converger soit diverger.

Par exemple cette bulle diverge logarithmiquement si $d = 4$ parce qu'il y a deux facteurs de ligne M^{2i} et **une seule** intégration **interne** M^{-4i} .

Le fantôme inéluctable?

Le fantôme inéluctable?

Dans le cas de la théorie ϕ_4^4 le comptage de puissances nous dit que seules les fonctions à deux et quatre points sont divergentes. Les fonctions à quatre points sont logarithmiquement divergentes et gouvernent la renormalisation de la constante de couplage λ .

Le fantôme inéluctable?

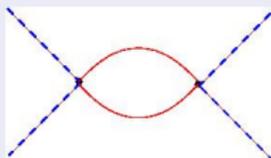
Dans le cas de la théorie ϕ_4^4 le comptage de puissances nous dit que seules les fonctions à deux et quatre points sont divergentes. Les fonctions à quatre points sont logarithmiquement divergentes et gouvernent la renormalisation de la constante de couplage λ .

Le seul graphe à une boucle une particule irréductible est la bulle:

Le fantôme inéluctable?

Dans le cas de la théorie ϕ_4^4 le comptage de puissances nous dit que seules les fonctions à deux et quatre points sont divergentes. Les fonctions à quatre points sont logarithmiquement divergentes et gouvernent la renormalisation de la constante de couplage λ .

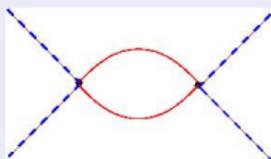
Le seul graphe à une boucle une particule irréductible est la bulle:



Le fantôme inéluctable?

Dans le cas de la théorie ϕ_4^4 le comptage de puissances nous dit que seules les fonctions à deux et quatre points sont divergentes. Les fonctions à quatre points sont logarithmiquement divergentes et gouvernent la renormalisation de la constante de couplage λ .

Le seul graphe à une boucle une particule irréductible est la bulle:



Elle fournit l'équation

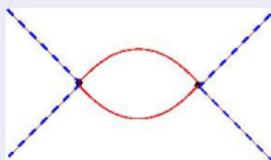
$$-\lambda_{i-1} = -\lambda_i + \beta(-\lambda_i)^2, \quad \frac{d\lambda_i}{di} = +\beta(\lambda_i)^2 \quad (1.3)$$

dont le signe semble impossible à changer, et qui correspond à la trajectoire d'un flot quadratique, qui diverge en un temps fini!

Le fantôme inéluctable?

Dans le cas de la théorie ϕ_4^4 le comptage de puissances nous dit que seules les fonctions à deux et quatre points sont divergentes. Les fonctions à quatre points sont logarithmiquement divergentes et gouvernent la renormalisation de la constante de couplage λ .

Le seul graphe à une boucle une particule irréductible est la bulle:



Elle fournit l'équation

$$-\lambda_{i-1} = -\lambda_i + \beta(-\lambda_i)^2, \quad \frac{d\lambda_i}{di} = +\beta(\lambda_i)^2 \quad (1.3)$$

dont le signe semble impossible à changer, et qui correspond à la trajectoire d'un flot quadratique, qui diverge en un temps fini! Dans les années 60 toutes les théories des champs semblaient souffrir de ce **fantôme de Landau**.

La liberté asymptotique

La liberté asymptotique

Mais la théorie des champs et la renormalisation réussirent au début des années 70 un *comeback* spectaculaire:

La liberté asymptotique

Mais la théorie des champs et la renormalisation réussirent au début des années 70 un *comeback* spectaculaire:

- ▶ **Weinberg** et **Salam** unifièrent interactions électromagnétiques et faibles à l'aide du formalisme de **Yang** et Mills de théories de jauge dites non-abéliennes, c'est à dire basées sur une symétrie interne **non commutative**.

La liberté asymptotique

Mais la théorie des champs et la renormalisation réussirent au début des années 70 un *comeback* spectaculaire:

- ▶ **Weinberg** et **Salam** unifièrent interactions électromagnétiques et faibles à l'aide du formalisme de **Yang** et Mills de théories de jauge dites non-abéliennes, c'est à dire basées sur une symétrie interne **non commutative**.
- ▶ **'tHooft** et **Veltmann** réussirent le tour de force de montrer que ces théories de jauge sont encore renormalisables, en particulier à l'aide d'un nouvel outil technique, la renormalisation dimensionnelle.

La liberté asymptotique

Mais la théorie des champs et la renormalisation réussirent au début des années 70 un *comeback* spectaculaire:

- ▶ **Weinberg** et **Salam** unifièrent interactions électromagnétiques et faibles à l'aide du formalisme de **Yang** et Mills de théories de jauge dites non-abéliennes, c'est à dire basées sur une symétrie interne **non commutative**.
- ▶ **'tHooft** et **Veltmann** réussirent le tour de force de montrer que ces théories de jauge sont encore renormalisables, en particulier à l'aide d'un nouvel outil technique, la renormalisation dimensionnelle.
- ▶ **'t Hooft** dans un travail non publié, puis **Politzer**, **Gross** et **Wilczek** découvrirent en 1973 que ces théories ne souffraient pas du fantôme de **Landau**. **Gross** et **Wilczek** proposerent alors une théorie de ce type, QCD pour décrire les interactions fortes ou nucléaires.

La liberté asymptotique

Mais la théorie des champs et la renormalisation réussirent au début des années 70 un *comeback* spectaculaire:

- ▶ **Weinberg** et **Salam** unifièrent interactions électromagnétiques et faibles à l'aide du formalisme de **Yang** et Mills de théories de jauge dites non-abéliennes, c'est à dire basées sur une symétrie interne **non commutative**.
- ▶ **'tHooft** et **Veltmann** réussirent le tour de force de montrer que ces théories de jauge sont encore renormalisables, en particulier à l'aide d'un nouvel outil technique, la renormalisation dimensionnelle.
- ▶ **'t Hooft** dans un travail non publié, puis **Politzer**, **Gross** et **Wilczek** découvrirent en 1973 que ces théories ne souffraient pas du fantôme de **Landau**. **Gross** et **Wilczek** proposerent alors une théorie de ce type, QCD pour décrire les interactions fortes ou nucléaires.
- ▶ **K. Wilson** vers la même époque élargit considérablement le champ de la renormalisation, sous le nom de groupe de renormalisation.

La liberté asymptotique

Mais la théorie des champs et la renormalisation réussirent au début des années 70 un *comeback* spectaculaire:

- ▶ **Weinberg** et **Salam** unifièrent interactions électromagnétiques et faibles à l'aide du formalisme de **Yang** et Mills de théories de jauge dites non-abéliennes, c'est à dire basées sur une symétrie interne **non commutative**.
- ▶ **'tHooft** et **Veltmann** réussirent le tour de force de montrer que ces théories de jauge sont encore renormalisables, en particulier à l'aide d'un nouvel outil technique, la renormalisation dimensionnelle.
- ▶ **'t Hooft** dans un travail non publié, puis **Politzer**, **Gross** et **Wilczek** découvrirent en 1973 que ces théories ne souffraient pas du fantôme de **Landau**. **Gross** et **Wilczek** proposèrent alors une théorie de ce type, QCD pour décrire les interactions fortes ou nucléaires.
- ▶ **K. Wilson** vers la même époque élargit considérablement le champ de la renormalisation, sous le nom de groupe de renormalisation.
- ▶ *Happy end*, tous les noms en rouge dans cette page eurent le **prix Nobel...**

La théorie des champs non-commutative

Introduction

La théorie des champs non-commutative

Théories covariantes, théorie auto-duales

La chasse au fantôme

Conclusions

La géométrie non-commutative

La géométrie non-commutative

La géométrie non-commutative est un cadre qui généralise la géométrie ordinaire. Les fonctions ordinaires ou observables forment une algèbre commutative pour la multiplication ordinaire. Par exemple en mécanique classique les observables sont des fonctions lisses sur l'espace de phase. La mécanique quantique remplace cette algèbre commutative de fonctions par une algèbre non commutative d'opérateurs. C'est donc un premier exemple physique de géométrie non-commutative,

La géométrie non-commutative

La géométrie non-commutative est un cadre qui généralise la géométrie ordinaire. Les fonctions ordinaires ou observables forment une algèbre commutative pour la multiplication ordinaire. Par exemple en mécanique classique les observables sont des fonctions lisses sur l'espace de phase. La mécanique quantique remplace cette algèbre commutative de fonctions par une algèbre non commutative d'opérateurs. C'est donc un premier exemple physique de géométrie non-commutative,

Mais l'espace direct pourrait être lui même de ce type; à une certaine échelle il y aurait donc en particulier de nouvelles relations d'incertitude par exemple entre la longueur et la largeur d'un objet.

L'espace de Moyal \mathbb{R}_θ^4

L'espace de Moyal \mathbb{R}_θ^4

L'un des exemples les plus simples de géométrie non-commutative est un espace vectoriel semblable à l'espace plat ordinaire mais muni d'un **commutateur constant entre les fonctions coordonnées**, proportionnel à une nouvelle forme de "constante de Planck", θ , cette fois dimensionnée en mètres carrés.

L'espace de Moyal \mathbb{R}_θ^4

L'un des exemples les plus simples de géométrie non-commutative est un espace vectoriel semblable à l'espace plat ordinaire mais muni d'un **commutateur constant entre les fonctions coordonnées**, proportionnel à une nouvelle forme de "constante de Planck", θ , cette fois dimensionnée en mètres carrés.

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu},$$

L'espace de Moyal \mathbb{R}_θ^4

L'un des exemples les plus simples de géométrie non-commutative est un espace vectoriel semblable à l'espace plat ordinaire mais muni d'un **commutateur constant entre les fonctions coordonnées**, proportionnel à une nouvelle forme de "constante de Planck", θ , cette fois dimensionnée en mètres carrés.

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu},$$

où $\Theta^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique constant qui sous forme canonique s'écrit:

$$\Theta^{\mu\nu} = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & (0) \\ (0) & 0 & 1 \\ (0) & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'espace de Moyal \mathbb{R}_θ^4

L'un des exemples les plus simples de géométrie non-commutative est un espace vectoriel semblable à l'espace plat ordinaire mais muni d'un **commutateur constant entre les fonctions coordonnées**, proportionnel à une nouvelle forme de "constante de Planck", θ , cette fois dimensionnée en mètres carrés.

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu},$$

où $\Theta^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique constant qui sous forme canonique s'écrit:

$$\Theta^{\mu\nu} = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & (0) \\ (0) & 0 & 1 \\ (0) & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit (associatif, non commutatif) engendré par ces relations, appelé produit de **Moyal**, vaut:

$$(f \star g)(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^d y f(x + \frac{1}{2}\Theta \cdot k) g(x + y) e^{ik \cdot y}$$

$$e^{ikx} \star e^{ik'x} = e^{-\frac{i}{2}\Theta^{ij}k_j k'_j} e^{i(k+k')x}$$

Théorie des cordes et espace de Moyal

Théorie des cordes et espace de Moyal

L'étude de l'espace de Moyal est aussi suggéré par la théorie des cordes, en particulier a la suite de travaux de Connes, Douglas, Schwartz, Seiberg et Witten. Il est bien connu que le secteur de masse nulle des cordes fermées contient un tenseur symétrique à deux indices dont la version classique peut fournir la géométrie Riemanienne de la relativité générale, Mais il contient aussi un tenseur **antisymétrique** à deux indices, dont la valeur moyenne classique peut donner naissance à une géométrie effective **non commutative**. Dans le cas le plus simple d'une valeur moyenne constante non nulle, la géométrie effective sera précisément du type Moyal.

Théorie des cordes et espace de Moyal

L'étude de l'espace de Moyal est aussi suggéré par la théorie des cordes, en particulier a la suite de travaux de Connes, Douglas, Schwartz, Seiberg et Witten. Il est bien connu que le secteur de masse nulle des cordes fermées contient un tenseur symétrique à deux indices dont la version classique peut fournir la géométrie Riemannienne de la relativité générale, Mais il contient aussi un tenseur **antisymétrique** à deux indices, dont la valeur moyenne classique peut donner naissance à une géométrie effective **non commutative**. Dans le cas le plus simple d'une valeur moyenne constante non nulle, la géométrie effective sera précisément du type Moyal.

A basse énergie la théorie des cordes se réduit à la théorie des champs pour son secteur de particules de masse nulle. A faible courbure de l'espace-temps, une fois les éventuelles compactifications de Kaluza-Klein effectuées, on pourrait donc avoir un régime effectif de théorie des champs sur un espace de Moyal \mathbb{R}_θ^4 .

La théorie des champs sur l'espace de Moyal

La théorie des champs sur l'espace de Moyal

Explorer ce que devient la théorie des champs en géométrie non commutative et en particulier dans l'espace de Moyal est donc suggéré à la fois par l'examen attentif du modèle standard et par la théorie des cordes.

La théorie des champs sur l'espace de Moyal

Explorer ce que devient la théorie des champs en géométrie non commutative et en particulier dans l'espace de Moyal est donc suggéré à la fois par l'examen attentif du modèle standard et par la théorie des cordes.

Mais une autre motivation profonde vient de la physique ordinaire en **champ fort**. Il peut d'ailleurs s'agir de physique des particules ou de matière condensée.

La théorie des champs sur l'espace de Moyal

Explorer ce que devient la théorie des champs en géométrie non commutative et en particulier dans l'espace de Moyal est donc suggéré à la fois par l'examen attentif du modèle standard et par la théorie des cordes.

Mais une autre motivation profonde vient de la physique ordinaire en **champ fort**. Il peut d'ailleurs s'agir de physique des particules ou de matière condensée.

L'exemple le plus évident est celui de l'effet Hall quantique, traité aujourd'hui en détail par Vincent Pasquier et Alexios Polychronakos. Mais on peut aussi penser à d'autres problèmes en champ fort comme le confinement des quarks, ou la croissance de polymères chargés sous fort champ magnétique. L'utilisation des techniques de géométrie non commutative pourrait aider à comprendre des effets très difficiles à étudier parce qu'ils sont **non-perturbatifs et non-locaux** dans le langage de la géométrie ordinaire.

La théorie ϕ^4 sur Moyal R_θ^4

- ▶ La version (naive) de ϕ_4^4 sur l'espace de Moyal a pour Lagrangien

La théorie ϕ^4 sur Moyal R_θ^4

- La version (naive) de ϕ_4^4 sur l'espace de Moyal a pour Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{\mu_0^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

La théorie ϕ^4 sur Moyal \mathbb{R}_θ^4

- La version (naive) de ϕ^4 sur l'espace de Moyal a pour Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

La théorie ϕ^4 sur Moyal \mathbb{R}_θ^4

- La version (naive) de ϕ^4 sur l'espace de Moyal a pour Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- Le **vertex de Moyal** peut être explicité. Il est proportionnel à

$$\int \prod_{i=1}^4 d^4 x^i \phi(x^i) \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \exp\left(2i\theta^{-1} (x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4)\right)$$

La théorie ϕ^4 sur Moyal \mathbb{R}_θ^4

- La version (naive) de ϕ^4 sur l'espace de Moyal a pour Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- Le **vertex de Moyal** peut être explicité. Il est proportionnel à

$$\int \prod_{i=1}^4 d^4 x^i \phi(x^i) \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \exp\left(2i\theta^{-1} (x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4)\right)$$

- Ce vertex est **non-local** et **oscillant**. Il a la forme d'un parallélogramme, l'oscillation est proportionnelle à son aire:

La théorie ϕ^4 sur Moyal \mathbb{R}_θ^4

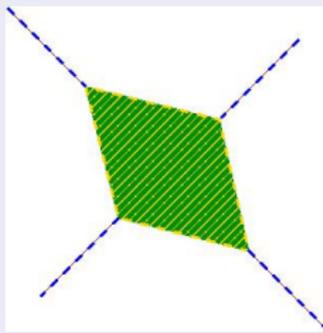
- La version (naive) de ϕ^4 sur l'espace de Moyal a pour Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- Le **vertex de Moyal** peut être explicité. Il est proportionnel à

$$\int \prod_{i=1}^4 d^4 x^i \phi(x^i) \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \exp\left(2i\theta^{-1}(x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4)\right)$$

- Ce vertex est **non-local** et **oscillant**. Il a la forme d'un parallélogramme, l'oscillation est proportionnelle à son **aire**:



Le mélange ultraviolet-infrarouge

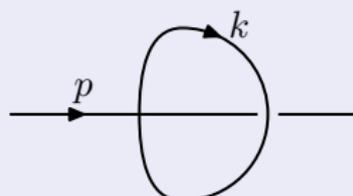
- ▶ Les amplitudes des graphes planaires sont inchangées.

Le mélange ultraviolet-infrarouge

- ▶ Les amplitudes des graphes planaires sont inchangées.
- ▶ Les amplitudes non-planaires créent un nouveau type de divergences, cette fois **infrarouge**.

Le mélange ultraviolet-infrarouge

- ▶ Les amplitudes des graphes planaires sont inchangées.
- ▶ Les amplitudes non-planaires créent un nouveau type de divergences, cette fois **infrarouge**. Par exemple,



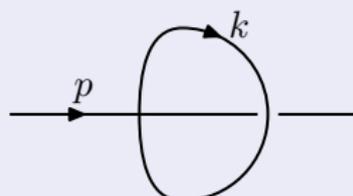
The diagram shows a horizontal line with an arrow pointing right, labeled with momentum p . This line enters a loop structure. The loop is a closed curve that is wider on the right side where it meets the external line. An arrow on the top part of the loop indicates a counter-clockwise direction, labeled with momentum k . The line exits the loop to the right.

$$\propto \lambda \int d^4 k \frac{e^{ip^\mu k^\nu \theta_{\mu\nu}}}{k^2 + m^2}$$

$$\propto \lambda \sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1(\sqrt{m^2 \tilde{p}^2}) \sim_{p \rightarrow 0} p^{-2}$$

Le mélange ultraviolet-infrarouge

- ▶ Les amplitudes des graphes planaires sont inchangées.
- ▶ Les amplitudes non-planaires créent un nouveau type de divergences, cette fois **infrarouge**. Par exemple,



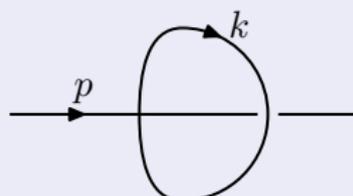
$$\propto \lambda \int d^4 k \frac{e^{ip^\mu k^\nu \theta_{\mu\nu}}}{k^2 + m^2}$$

$$\propto \lambda \sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1(\sqrt{m^2 \tilde{p}^2}) \sim_{p \rightarrow 0} p^{-2}$$

- ▶ La divergence croît avec l'ordre de perturbation.

Le mélange ultraviolet-infrarouge

- ▶ Les amplitudes des graphes planaires sont inchangées.
- ▶ Les amplitudes non-planaires créent un nouveau type de divergences, cette fois **infrarouge**. Par exemple,



The diagram shows a horizontal line with an arrow pointing right, labeled with momentum p . This line enters a loop structure. The loop is a closed curve that is wider on the right side where it meets the external line. An arrow on the top part of the loop indicates a counter-clockwise direction, labeled with momentum k . The loop then continues as a horizontal line to the right.

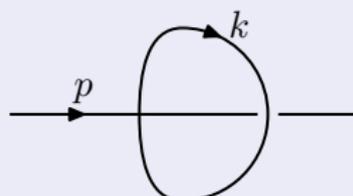
$$\propto \lambda \int d^4 k \frac{e^{ip^\mu k^\nu \theta_{\mu\nu}}}{k^2 + m^2}$$

$$\propto \lambda \sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1(\sqrt{m^2 \tilde{p}^2}) \sim_{p \rightarrow 0} p^{-2}$$

- ▶ La divergence croît avec l'ordre de perturbation.
- ▶ Toutes les fonctions de corrélation sont affectées et divergent.

Le mélange ultraviolet-infrarouge

- ▶ Les amplitudes des graphes planaires sont inchangées.
- ▶ Les amplitudes non-planaires créent un nouveau type de divergences, cette fois **infrarouge**. Par exemple,



The diagram shows a horizontal line with an arrow pointing right, labeled with momentum p . This line enters a loop structure. The loop is a closed curve that is wider at the top and narrower at the bottom, resembling a lens or a bubble. An arrow on the top part of the loop indicates a counter-clockwise direction of flow, labeled with momentum k . A horizontal line exits the loop to the right.

$$\propto \lambda \int d^4 k \frac{e^{ip^\mu k^\nu \theta_{\mu\nu}}}{k^2 + m^2}$$

$$\propto \lambda \sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1(\sqrt{m^2 \tilde{p}^2}) \sim_{p \rightarrow 0} p^{-2}$$

- ▶ La divergence croît avec l'ordre de perturbation.
- ▶ Toutes les fonctions de corrélation sont affectées et divergent.
- ➔ La théorie n'est donc **pas renormalisable**.

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est renormalisable à tous ordres en λ !

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est renormalisable à tous ordres en λ !

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est **renormalisable à tous ordres en λ !**

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est **renormalisable à tous ordres en λ !**

Ce résultat a été obtenu maintenant par de nombreuses méthodes indépendantes:

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est **renormalisable à tous ordres en λ !**

Ce résultat a été obtenu maintenant par de nombreuses méthodes indépendantes:

- ▶ base matricielle ou des "états cohérents" (Grosse, Wulkenhaar, puis Rivasseau, Vignes-Tourneret, Wulkenhaar);

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est **renormalisable à tous ordres en λ !**

Ce résultat a été obtenu maintenant par de nombreuses méthodes indépendantes:

- ▶ base matricielle ou des "états cohérents" (Grosse, Wulkenhaar, puis Rivasseau, Vignes-Tourneret, Wulkenhaar);
- ▶ espace direct (Gurau, Magnen, Rivasseau, Vignes-Tourneret);

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est **renormalisable à tous ordres en λ !**

Ce résultat a été obtenu maintenant par de nombreuses méthodes indépendantes:

- ▶ base matricielle ou des "états cohérents" (Grosse, Wulkenhaar, puis Rivasseau, Vignes-Tourneret, Wulkenhaar);
- ▶ espace direct (Gurau, Magnen, Rivasseau, Vignes-Tourneret);
- ▶ espace paramétrique (Gurau, Rivasseau, Tanasa);

La percée de H. Grosse et R. Wulkenhaar:

La théorie Euclidienne avec un potentiel harmonique additionnel

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{\mu_0^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

où $\tilde{x}_\mu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1}x^\nu$, est covariante sous une symétrie $p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$ dite de Langmann-Szabo et elle est **renormalisable à tous ordres en λ !**

Ce résultat a été obtenu maintenant par de nombreuses méthodes indépendantes:

- ▶ base matricielle ou des "états cohérents" (Grosse, Wulkenhaar, puis Rivasseau, Vignes-Tourneret, Wulkenhaar);
- ▶ espace direct (Gurau, Magnen, Rivasseau, Vignes-Tourneret);
- ▶ espace paramétrique (Gurau, Rivasseau, Tanasa);
- ▶ renormalisation dimensionnelle (Gurau, Tanasa, en voie d'achèvement).

Le nouveau propagateur

Le nouveau propagateur

Le propagateur de cette théorie est (en représentation paramétrique)

$$G(x, y) = \frac{\theta}{4\Omega} \left(\frac{\Omega}{\pi\theta} \right) \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{\mu_0^2 \theta}{4\Omega} \alpha} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{(\sinh \alpha)^2} \exp \left(-\frac{\Omega}{\theta \sinh \alpha} \|x - y\|^2 - \frac{\Omega}{\theta} \tanh \frac{\alpha}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \right). \quad (2.5)$$

Le nouveau propagateur

Le propagateur de cette théorie est (en représentation paramétrique)

$$G(x, y) = \frac{\theta}{4\Omega} \left(\frac{\Omega}{\pi\theta} \right) \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{\mu_0^2 \theta}{4\Omega} \alpha} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{(\sinh \alpha)^2} \exp \left(-\frac{\Omega}{\theta \sinh \alpha} \|x - y\|^2 - \frac{\Omega}{\theta} \tanh \frac{\alpha}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \right). \quad (2.5)$$

et repose maintenant sur le **noyau de Mehler** et non plus celui de la chaleur.

Le nouveau propagateur

Le propagateur de cette théorie est (en représentation paramétrique)

$$G(x, y) = \frac{\theta}{4\Omega} \left(\frac{\Omega}{\pi\theta} \right) \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{\mu_0^2 \theta}{4\Omega} \alpha} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{(\sinh \alpha)^2} \exp \left(-\frac{\Omega}{\theta \sinh \alpha} \|x - y\|^2 - \frac{\Omega}{\theta} \tanh \frac{\alpha}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \right). \quad (2.5)$$

et repose maintenant sur le **noyau de Mehler** et non plus celui de la chaleur. De nouveau il faut couper ce propagateur en tranches pour une analyse multi-échelles:

$$G^i(x, y) = \int_{M^{-2i}}^{M^{-2(i-1)}} d\alpha \dots \leq KM^{2i} e^{-c_1 M^{2i} \|x-y\|^2 - c_2 M^{-2i} (\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

Le nouveau propagateur

Le propagateur de cette théorie est (en représentation paramétrique)

$$G(x, y) = \frac{\theta}{4\Omega} \left(\frac{\Omega}{\pi\theta} \right) \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{\mu_0^2 \theta}{4\Omega} \alpha} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{(\sinh \alpha)^2} \exp \left(-\frac{\Omega}{\theta \sinh \alpha} \|x - y\|^2 - \frac{\Omega}{\theta} \tanh \frac{\alpha}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \right). \quad (2.5)$$

et repose maintenant sur le **noyau de Mehler** et non plus celui de la chaleur. De nouveau il faut couper ce propagateur en tranches pour une analyse multi-échelles:

$$G^i(x, y) = \int_{M^{-2i}}^{M^{-2(i-1)}} d\alpha \dots \leq KM^{2i} e^{-c_1 M^{2i} \|x-y\|^2 - c_2 M^{-2i} (\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

Le nouveau groupe de renormalisation correspondant mélange **l'ultraviolet** et **l'infarouge** habituels. Il n'existe de plus qu'une **demi-direction** infinie.

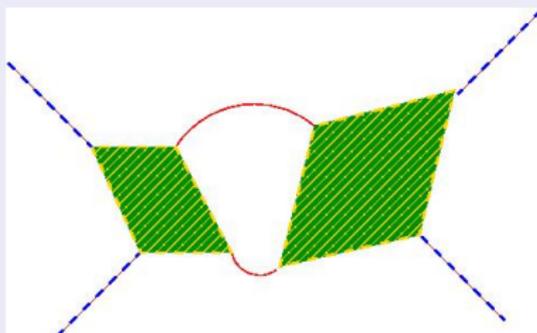
La renormalisabilité

La renormalisabilité

Elle résulte alors à nouveau de la combinaison de **deux** arguments mais assez différents. Un nouveau **principe de Moyalité** remplace celui de **localité**:

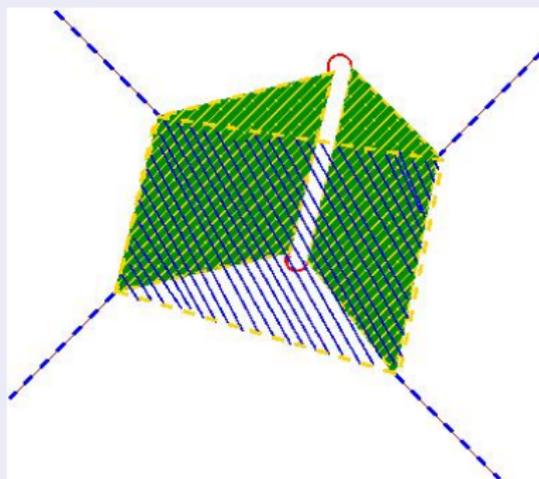
La renormalisabilité

Elle résulte alors à nouveau de la combinaison de **deux** arguments mais assez différents. Un nouveau **principe de Moyalité** remplace celui de **localité**:



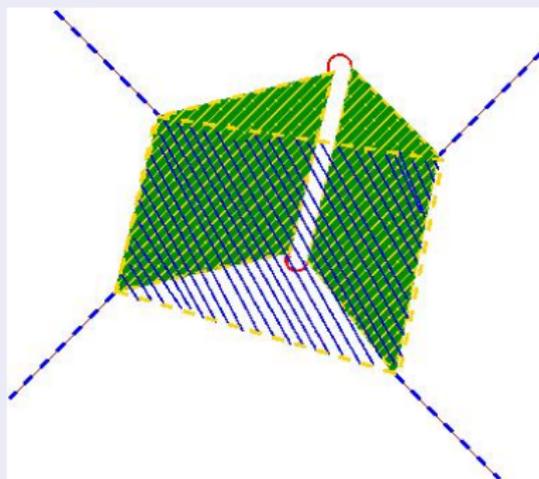
La renormalisabilité

Elle résulte alors à nouveau de la combinaison de **deux** arguments mais assez différents. Un nouveau **principe de Moyalité** remplace celui de **localité**:



La renormalisabilité

Elle résulte alors à nouveau de la combinaison de **deux** arguments mais assez différents. Un nouveau **principe de Moyalité** remplace celui de **localité**:



Ce principe ne s'applique qu'aux graphes **planaires à une seule face externe**.

Planarité et comptage de puissances

Il y a aussi un nouveau **comptage de puissances**. Il faut tenir compte de la **cyclicité du vertex** donc dessiner des graphes à **rubans**.

Planarité et comptage de puissances

Il y a aussi un nouveau **comptage de puissances**. Il faut tenir compte de la **cyclicité du vertex** donc dessiner des graphes à **rubans**.

$$\omega = \frac{d}{2} (F - FE) - L = \left(2 - \frac{E}{2}\right) - 4g - 2(FE - 1) \text{ si } d = 4, \text{ où}$$

- ▶ V est le nombre de vertex,

Planarité et comptage de puissances

Il y a aussi un nouveau **comptage de puissances**. Il faut tenir compte de la **cyclicité du vertex** donc dessiner des graphes à **rubans**.

$$\omega = \frac{d}{2} (F - FE) - L = \left(2 - \frac{E}{2}\right) - 4g - 2(FE - 1) \text{ si } d = 4, \text{ où}$$

- ▶ V est le nombre de vertex,
- ▶ L est le nombre de lignes ou propagateurs,

Planarité et comptage de puissances

Il y a aussi un nouveau **comptage de puissances**. Il faut tenir compte de la **cyclicité du vertex** donc dessiner des graphes à **rubans**.

$$\omega = \frac{d}{2} (F - FE) - L = \left(2 - \frac{E}{2}\right) - 4g - 2(FE - 1) \text{ si } d = 4, \text{ où}$$

- ▶ V est le nombre de vertex,
- ▶ L est le nombre de lignes ou propagateurs,
- ▶ F est le nombre de faces (en suivant les bords de rubans),

Planarité et comptage de puissances

Il y a aussi un nouveau **comptage de puissances**. Il faut tenir compte de la **cyclicité du vertex** donc dessiner des graphes à **rubans**.

$$\omega = \frac{d}{2} (F - FE) - L = \left(2 - \frac{E}{2}\right) - 4g - 2(FE - 1) \text{ si } d = 4, \text{ où}$$

- ▶ V est le nombre de vertex,
- ▶ L est le nombre de lignes ou propagateurs,
- ▶ F est le nombre de faces (en suivant les bords de rubans),
- ▶ E est le nombre de pattes externes,

Planarité et comptage de puissances

Il y a aussi un nouveau **comptage de puissances**. Il faut tenir compte de la **cyclicité du vertex** donc dessiner des graphes à **rubans**.

$$\omega = \frac{d}{2} (F - FE) - L = \left(2 - \frac{E}{2}\right) - 4g - 2(FE - 1) \text{ si } d = 4, \text{ où}$$

- ▶ V est le nombre de vertex,
- ▶ L est le nombre de lignes ou propagateurs,
- ▶ F est le nombre de faces (en suivant les bords de rubans),
- ▶ E est le nombre de pattes externes,
- ▶ g est le genre défini par la relation d'Euler $\chi = 2 - 2g = V - L + F$,

Planarité et comptage de puissances

Il y a aussi un nouveau **comptage de puissances**. Il faut tenir compte de la **cyclicité du vertex** donc dessiner des graphes à **rubans**.

$$\omega = \frac{d}{2} (F - FE) - L = \left(2 - \frac{E}{2}\right) - 4g - 2(FE - 1) \text{ si } d = 4, \text{ où}$$

- ▶ V est le nombre de vertex,
- ▶ L est le nombre de lignes ou propagateurs,
- ▶ F est le nombre de faces (en suivant les bords de rubans),
- ▶ E est le nombre de pattes externes,
- ▶ g est le genre défini par la relation d'Euler $\chi = 2 - 2g = V - L + F$,
- ▶ FE est le nombre de faces *externes*, c'est à dire touchées par des arrivées de pattes externes.

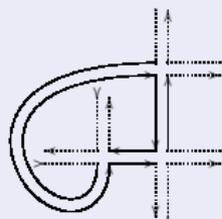
Exemples de graphes

Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$

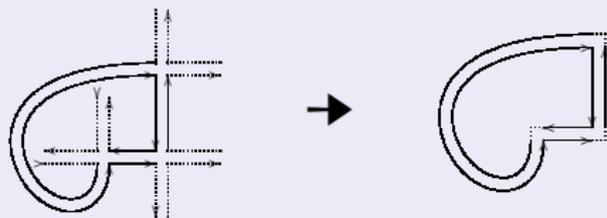
Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$



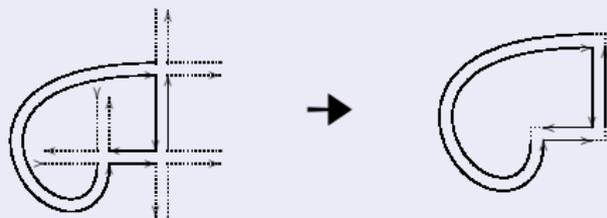
Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$



Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$



$$V=3$$

$$L=3$$

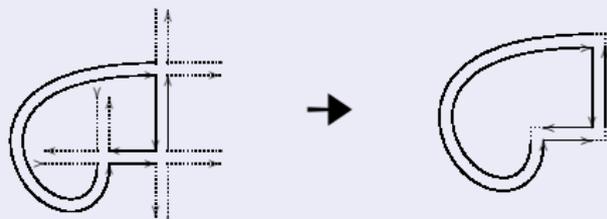
$$F=2$$

$$E=6$$

$$FE=2$$

Exemples de graphes

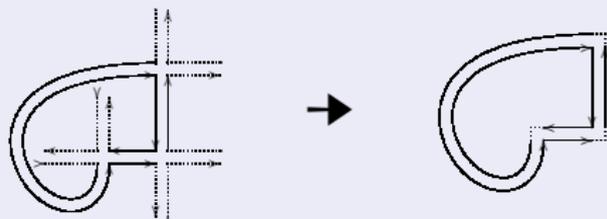
$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$



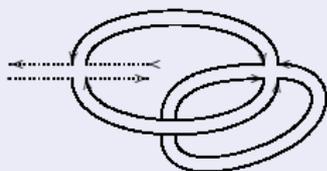
$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ L=3 \\ F=2 \\ E=6 \\ FE=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0, \omega = -3$$

Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$

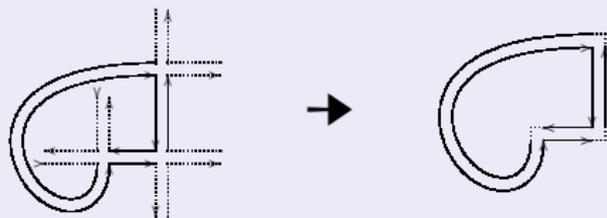


$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ L=3 \\ F=2 \\ E=6 \\ FE=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0, \omega = -3$$

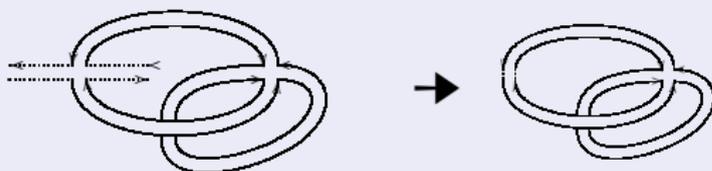


Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$

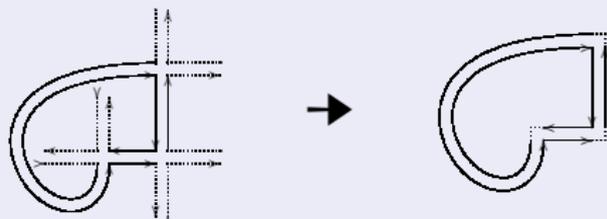


$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ L=3 \\ F=2 \\ E=6 \\ FE=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0, \omega = -3$$

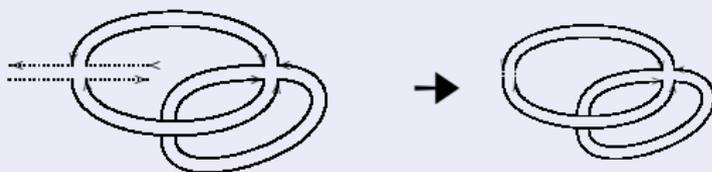


Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$



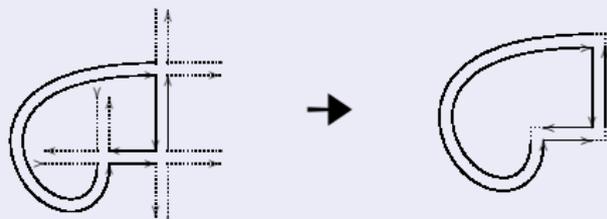
$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ L=3 \\ F=2 \\ E=6 \\ FE=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0, \omega = -3$$



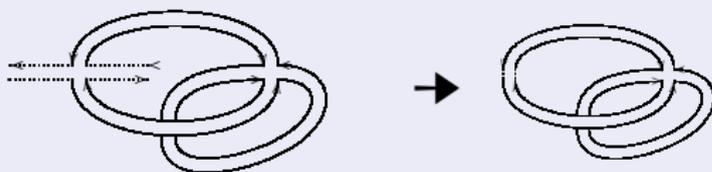
$$\begin{array}{l} V=2 \\ L=3 \\ F=1 \\ E=2 \\ FE=1 \end{array}$$

Exemples de graphes

$$g = 1 - (V - L + F)/2, \quad \omega = 2 - E/2 - 4g - 2(FE - 1)$$



$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ L=3 \\ F=2 \\ E=6 \\ FE=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0, \omega = -3$$



$$\left. \begin{array}{l} V=2 \\ L=3 \\ F=1 \\ E=2 \\ FE=1 \end{array} \right\} \rightarrow g = 1, \omega = -3$$

Renormalisation non commutative

Renormalisation non commutative

La renormalisation résulte alors à nouveau de la combinaison de **deux** arguments.

Renormalisation non commutative

La renormalisation résulte alors à nouveau de la combinaison de **deux** arguments.

Le **comptage de puissances** nous dit que seuls les graphes planaires à deux et quatre pattes et une seule face externe doivent être renormalisés.

Renormalisation non commutative

La renormalisation résulte alors à nouveau de la combinaison de **deux** arguments.

Le **comptage de puissances** nous dit que seuls les graphes planaires à deux et quatre pattes et une seule face externe doivent être renormalisés.

Le nouveau **principe de Moyalité** nous dit que lorsque l'écart s'accroît entre pattes internes et pattes externes au sens du **nouveau groupe de renormalisation**, ces termes ressemblent bien à des produits de Moyal. Ils donnent donc naissance à des contretermes uniquement de la forme du Lagrangien initial!

Théories covariantes, théories auto-duales

Introduction

La théorie des champs non-commutative

Théories covariantes, théorie auto-duales

La chasse au fantôme

Conclusions

L'invariance par translation

L'invariance par translation

Des critiques ont été parfois adressées à la solution de Grosse-Wulkenhaar:

L'invariance par translation

Des critiques ont été parfois adressées à la solution de Grosse-Wulkenhaar:

- ▶ Le potentiel harmonique est un simple cutoff infrarouge qui tue le mélange.

L'invariance par translation

Des critiques ont été parfois adressées à la solution de Grosse-Wulkenhaar:

- ▶ Le potentiel harmonique est un simple cutoff infrarouge qui tue le mélange.
- ▶ En privilégiant une origine, il ne saurait décrire la vraie physique, qui est invariante par translation.

L'invariance par translation

Des critiques ont été parfois adressées à la solution de Grosse-Wulkenhaar:

- ▶ Le potentiel harmonique est un simple cutoff infrarouge qui tue le mélange.
- ▶ En privilégiant une origine, il ne saurait décrire la vraie physique, qui est invariante par translation.

Ces critiques ne sont pas justifiées:

L'invariance par translation

Des critiques ont été parfois adressées à la solution de Grosse-Wulkenhaar:

- ▶ Le potentiel harmonique est un simple cutoff infrarouge qui tue le mélange.
- ▶ En privilégiant une origine, il ne saurait décrire la vraie physique, qui est invariante par translation.

Ces critiques ne sont pas justifiées:

- ▶ Le potentiel harmonique n'est pas un simple cutoff infrarouge parmi d'autres, il est le seul qui rende la théorie renormalisable. Il est de toute façon engendré par les corrections radiatives.

L'invariance par translation

Des critiques ont été parfois adressées à la solution de Grosse-Wulkenhaar:

- ▶ Le potentiel harmonique est un simple cutoff infrarouge qui tue le mélange.
- ▶ En privilégiant une origine, il ne saurait décrire la vraie physique, qui est invariante par translation.

Ces critiques ne sont pas justifiées:

- ▶ Le potentiel harmonique n'est pas un simple cutoff infrarouge parmi d'autres, il est le seul qui rende la théorie renormalisable. Il est de toute façon engendré par les corrections radiatives.
- ▶ Le modèle initial de GW brise en effet l'invariance par translation. Cependant nous allons voir que le paramètre de brisure, le coefficient Ω du potentiel harmonique tend vers 0 dans l'infrarouge. Donc ces modèles pourraient se raccorder à des modèles invariants par translation à plus basse énergie.

L'invariance par translation

Des critiques ont été parfois adressées à la solution de Grosse-Wulkenhaar:

- ▶ Le potentiel harmonique est un simple cutoff infrarouge qui tue le mélange.
- ▶ En privilégiant une origine, il ne saurait décrire la vraie physique, qui est invariante par translation.

Ces critiques ne sont pas justifiées:

- ▶ Le potentiel harmonique n'est pas un simple cutoff infrarouge parmi d'autres, il est le seul qui rende la théorie renormalisable. Il est de toute façon engendré par les corrections radiatives.
- ▶ Le modèle initial de GW brise en effet l'invariance par translation. Cependant nous allons voir que le paramètre de brisure, le coefficient Ω du potentiel harmonique tend vers 0 dans l'infrarouge. Donc ces modèles pourraient se raccorder à des modèles invariants par translation à plus basse énergie.
- ▶ Surtout il existe d'autres classes de modèles, que nous appelons **covariants**, dont le propagateur est voisin de celui de GW, s'analyse par les mêmes méthodes et est invariant sous translations **magnétiques**. Les quantités physiques (invariantes de jauge) sont alors invariantes par translation.

Modèles Covariants

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1} ,$$

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1} ,$$

$$H^{-1}(x, y) = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp \left(-\frac{\tilde{\Omega} \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x - y)^2 \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega} \cosh(2\tilde{\Omega}\alpha) - \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x^2 + y^2) + 2i\tilde{\Omega} \frac{\sinh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} x \wedge y \right)$$

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1} ,$$

$$H^{-1}(x, y) = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp \left(-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \frac{\cosh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x - y)^2 \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \frac{\cosh(2\tilde{\Omega}\alpha) - \cosh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x^2 + y^2) + 2i\tilde{\Omega} \frac{\sinh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} x \wedge y \right)$$

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1} ,$$

$$H^{-1}(x, y) = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp \left(-\frac{\tilde{\Omega} \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x - y)^2 \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega} \cosh(2\tilde{\Omega}\alpha) - \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x^2 + y^2) + 2i\tilde{\Omega} \frac{\sinh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} x \wedge y \right)$$

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1} ,$$

$$H^{-1}(x, y) = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp \left(-\frac{\tilde{\Omega} \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x - y)^2 \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega} \cosh(2\tilde{\Omega}\alpha) - \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x^2 + y^2) + 2i\tilde{\Omega} \frac{\sinh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} x \wedge y \right)$$

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1} ,$$

$$H^{-1}(x, y) = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp \left(-\frac{\tilde{\Omega} \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x - y)^2 \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega} \cosh(2\tilde{\Omega}\alpha) - \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x^2 + y^2) + 2i\tilde{\Omega} \frac{\sinh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} x \wedge y \right)$$

Le Laplacien covariant dans un champ externe fixe correspond au cas $B = \tilde{\Omega}$.

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1},$$

$$H^{-1}(x, y) = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp\left(-\frac{\tilde{\Omega} \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x - y)^2\right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega} \cosh(2\tilde{\Omega}\alpha) - \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x^2 + y^2) + 2i\tilde{\Omega} \frac{\sinh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} x \wedge y\right)$$

Le Laplacien covariant dans un champ externe fixe correspond au cas $B = \tilde{\Omega}$.

→ Le terme confinant près de l'origine disparaît au profit d'une **oscillation**:

$$Q^{-1} = H^{-1} = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp\left(-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}\alpha) (x - y)^2 + 2i\tilde{\Omega} x \wedge y\right)$$

Modèles Covariants

Leur noyau ressemble beaucoup au noyau de Mehler. Si nous posons $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$:

$$H^{-1} = (p^2 + \Omega^2 \tilde{x}^2 - 2iB (x^0 p_1 - x^1 p_0))^{-1},$$

$$H^{-1}(x, y) = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp \left(-\frac{\tilde{\Omega} \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x - y)^2 \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\Omega} \cosh(2\tilde{\Omega}\alpha) - \cosh(2B\alpha)}{2 \sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} (x^2 + y^2) + 2i\tilde{\Omega} \frac{\sinh(2B\alpha)}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} x \wedge y \right)$$

Le Laplacien covariant dans un champ externe fixe correspond au cas $B = \tilde{\Omega}$.

→ Le terme confinant près de l'origine disparaît au profit d'une **oscillation**:

$$Q^{-1} = H^{-1} = \frac{\tilde{\Omega}}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sinh(2\tilde{\Omega}\alpha)} \exp \left(-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}\alpha) (x - y)^2 + 2i\tilde{\Omega} x \wedge y \right)$$

Le modèle de Gross-Neveu

Le modèle de Gross-Neveu

Le modèle de Gross-Neveu non commutatif sur \mathbb{R}_θ^2 est défini par

Le modèle de Gross-Neveu

Le modèle de Gross-Neveu non commutatif sur \mathbb{R}_θ^2 est défini par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\not{p} + \Omega \not{x} + m) \psi + \sum_{a,b} \lambda_1 \bar{\psi}_a \star \psi_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b$$

$$+ \lambda_2 \bar{\psi}_a \star \psi_b \star \bar{\psi}_b \star \psi_a + \lambda_3 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_a \star \psi_b + \lambda_4 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \star \psi_a$$

Le modèle de Gross-Neveu

Le modèle de Gross-Neveu non commutatif sur \mathbb{R}_θ^2 est défini par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\not{p} + \Omega \not{x} + m) \psi + \sum_{a,b} \lambda_1 \bar{\psi}_a \star \psi_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \\ + \lambda_2 \bar{\psi}_a \star \psi_b \star \bar{\psi}_b \star \psi_a + \lambda_3 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_a \star \psi_b + \lambda_4 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \star \psi_a$$

où $\tilde{x} = 2(\Theta^{-1}x)$, $\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et a, b sont des indices de couleur ou de spin.

Le modèle de Gross-Neveu

Le modèle de Gross-Neveu non commutatif sur \mathbb{R}_θ^2 est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \bar{\psi} (\not{p} + \Omega \not{x} + m) \psi + \sum_{a,b} \lambda_1 \bar{\psi}_a \star \psi_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \\ & + \lambda_2 \bar{\psi}_a \star \psi_b \star \bar{\psi}_b \star \psi_a + \lambda_3 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_a \star \psi_b + \lambda_4 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \star \psi_a \end{aligned}$$

où $\tilde{x} = 2(\Theta^{-1}x)$, $\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et a, b sont des indices de couleur ou de spin.

- Ce modèle covariant, donc plus difficile à traiter, a été montré renormalisable par Vignes-Tourneret dans le cas orientable ($\lambda_3 = \lambda_4 = 0$) et il est bel et bien invariant par translation au niveau des observables physiques.

Le modèle de Gross-Neveu

Le modèle de Gross-Neveu non commutatif sur \mathbb{R}_θ^2 est défini par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\not{p} + \Omega \not{x} + m) \psi + \sum_{a,b} \lambda_1 \bar{\psi}_a \star \psi_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \\ + \lambda_2 \bar{\psi}_a \star \psi_b \star \bar{\psi}_b \star \psi_a + \lambda_3 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_a \star \psi_b + \lambda_4 \bar{\psi}_a \star \bar{\psi}_b \star \psi_b \star \psi_a$$

où $\tilde{x} = 2(\Theta^{-1}x)$, $\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et a, b sont des indices de couleur ou de spin.

- Ce modèle covariant, donc plus difficile à traiter, a été montré renormalisable par Vignes-Tourneret dans le cas orientable ($\lambda_3 = \lambda_4 = 0$) et il est bel et bien invariant par translation au niveau des observables physiques.
- Il existe aussi des modèles bosoniques de ce type, dit de Langmann, Szabo et Zarembo.

La chasse au fantôme

Introduction

La théorie des champs non-commutative

Théories covariantes, théorie auto-duales

La chasse au fantôme

Conclusions

Victoire sur le fantôme de Landau!

Victoire sur le fantôme de Landau!

Contrairement aux attentes initiales excessives de certains de ses fondateurs (Snyders, 1947...) la noncommutativité de l'espace ne rend pas la théorie des champs **finie**. ϕ_4^4 par exemple reste juste renormalisable, avec une infinité de graphes primitivement divergents. Pourtant un progrès clé a été accompli:

Victoire sur le fantôme de Landau!

Contrairement aux attentes initiales excessives de certains de ses fondateurs (Snyders, 1947...) la noncommutativité de l'espace ne rend pas la théorie des champs **finie**. ϕ_4^4 par exemple reste juste renormalisable, avec une infinité de graphes primitivement divergents. Pourtant un progrès clé a été accompli:
dans le plan de Moyal, le fantôme de Landau a disparu!

Victoire sur le fantôme de Landau!

Contrairement aux attentes initiales excessives de certains de ses fondateurs (Snyders, 1947...) la noncommutativité de l'espace ne rend pas la théorie des champs **finie**. ϕ_4^4 par exemple reste juste renormalisable, avec une infinité de graphes primitivement divergents. Pourtant un progrès clé a été accompli:
dans le plan de Moyal, le fantôme de Landau a disparu!



Chronologie d'un exorcisme

Chronologie d'un exorcisme

Ce résultat a été obtenu en trois étapes

Chronologie d'un exorcisme

Ce résultat a été obtenu en trois étapes

- ▶ **A une boucle:** H. Grosse and R. Wulkenhaar,
The beta-function in duality-covariant noncommutative ϕ^4 -theory,
Eur. Phys. J. **C35** (2004) 277–282, hep-th/0402093

Chronologie d'un exorcisme

Ce résultat a été obtenu en trois étapes

- ▶ **A une boucle:** H. Grosse and R. Wulkenhaar,
The beta-function in duality-covariant noncommutative ϕ^4 -theory,
Eur. Phys. J. C **35** (2004) 277–282, hep-th/0402093
- ▶ **A deux et trois boucles:** M. Disertori and V. Rivasseau,
Two and Three Loops Beta Function of Non Commutative Φ_4^4 Theory,
Eur. Phys. J. C (2007) hep-th/0610224.

Chronologie d'un exorcisme

Ce résultat a été obtenu en trois étapes

- ▶ **A une boucle:** H. Grosse and R. Wulkenhaar,
The beta-function in duality-covariant noncommutative ϕ^4 -theory,
Eur. Phys. J. C **35** (2004) 277–282, hep-th/0402093
- ▶ **A deux et trois boucles:** M. Disertori and V. Rivasseau,
Two and Three Loops Beta Function of Non Commutative Φ_4^4 Theory,
Eur. Phys. J. C (2007) hep-th/0610224.
- ▶ **A toutes boucles:** M. Disertori, R. Gurau, J. Magnen and V. Rivasseau,
Vanishing of Beta Function of Non Commutative Φ_4^4 to all orders,
Phys. Lett. B, (2007) hep-th/0612251

Le mécanisme antifantôme et les modèles auto-duaux

Le mécanisme antifantôme et les modèles auto-duaux

Il y a maintenant deux paramètres principaux à suivre sous le flot du groupe de renormalisation, λ et Ω . Au premier ordre on trouve

Le mécanisme antifantôme et les modèles auto-duaux

Il y a maintenant deux paramètres principaux à suivre sous le flot du groupe de renormalisation, λ et Ω . Au premier ordre on trouve

$$\frac{d\lambda_i}{di} \simeq a(1 - \Omega_i)\lambda_i^2 \quad , \quad \frac{d\Omega_i}{di} \simeq b(1 - \Omega_i)\lambda_i \quad ,$$

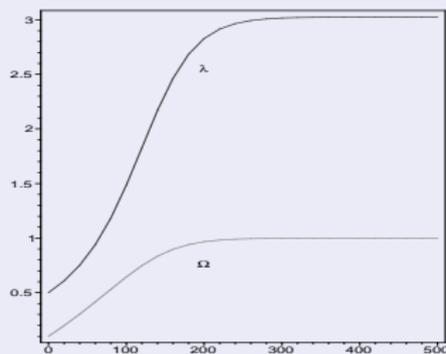
dont la solution numérique est:

Le mécanisme antifantôme et les modèles auto-duaux

Il y a maintenant deux paramètres principaux à suivre sous le flot du groupe de renormalisation, λ et Ω . Au premier ordre on trouve

$$\frac{d\lambda_i}{di} \simeq a(1 - \Omega_i)\lambda_i^2, \quad \frac{d\Omega_i}{di} \simeq b(1 - \Omega_i)\lambda_i,$$

dont la solution numérique est:

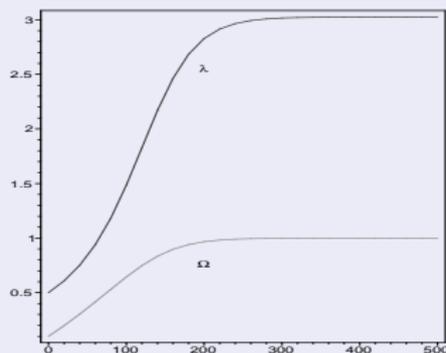


Le mécanisme antifantôme et les modèles auto-duaux

Il y a maintenant deux paramètres principaux à suivre sous le flot du groupe de renormalisation, λ et Ω . Au premier ordre on trouve

$$\frac{d\lambda_i}{di} \simeq a(1 - \Omega_i)\lambda_i^2, \quad \frac{d\Omega_i}{di} \simeq b(1 - \Omega_i)\lambda_i,$$

dont la solution numérique est:



Nous proposons d'appeler **autoduaux** les modèles à $\Omega = 1$ de dualité LS exacte.

Les identités de Ward à toutes boucles

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int d\phi d\bar{\phi} e^{-(\bar{\phi}X\phi + \phi X\bar{\phi} + A\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}\phi\bar{\phi}\phi\bar{\phi}) + \bar{\phi}\eta + \bar{\eta}\phi} \quad (4.6)$$

Les identités de Ward à toutes boucles

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int d\phi d\bar{\phi} e^{-(\bar{\phi}X\phi + \phi X\bar{\phi} + A\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}\phi\bar{\phi}\phi\bar{\phi}) + \bar{\phi}\eta + \bar{\eta}\phi} \quad (4.6)$$

Soit $U = e^{iM}$. On effectue le changement de variables "gauche":

$$\phi \rightarrow \phi^U = \phi U \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}^U = U\bar{\phi} \quad (4.7)$$

qui donne

$$\partial_\eta \partial_{\bar{\eta}} \frac{\delta \ln Z}{\delta M_{ba}} = 0 \quad (4.8)$$

Les identités de Ward à toutes boucles

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int d\phi d\bar{\phi} e^{-(\bar{\phi}X\phi + \phi X\bar{\phi} + A\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}\phi\bar{\phi}\phi\bar{\phi}) + \bar{\phi}\eta + \bar{\eta}\phi} \quad (4.6)$$

Soit $U = e^{iM}$. On effectue le changement de variables "gauche":

$$\phi \rightarrow \phi^U = \phi U \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}^U = U\bar{\phi} \quad (4.7)$$

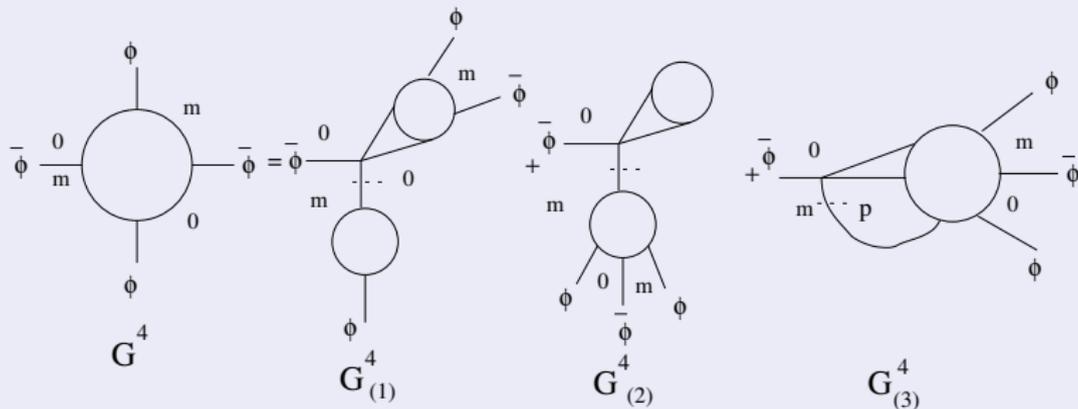
qui donne

$$\partial_\eta \partial_{\bar{\eta}} \frac{\delta \ln Z}{\delta M_{ba}} = 0 \quad (4.8)$$

et on obtient les identités de Ward:

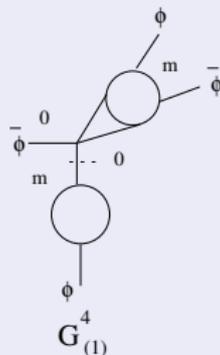
The diagrammatic equation shows three circular diagrams representing loop integrals. The first diagram has an incoming line labeled 'a' and an outgoing line labeled 'b', with a vertex labeled 'mu' and 'V'. The second diagram is similar but with the vertex labels swapped. The third diagram is similar but with the vertex labels swapped again. The equation is (a-b) times the first diagram equals the second diagram minus the third diagram.

Les équations de Dyson



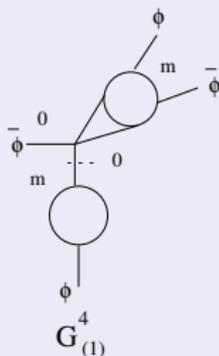
- ▶ C'est une classification des graphes (pas de facteurs combinatoires à vérifier)!
- ▶ Le second terme a une "insertion de tadpole à gauche". Il s'annule après renormalisation de masse.

Le premier terme



$$G_{(1)}^4(0, m, 0, m) = \lambda C_{0m} G^2(0, m) G_{ins}^2(0, 0; m) \quad (4.9)$$

Le premier terme

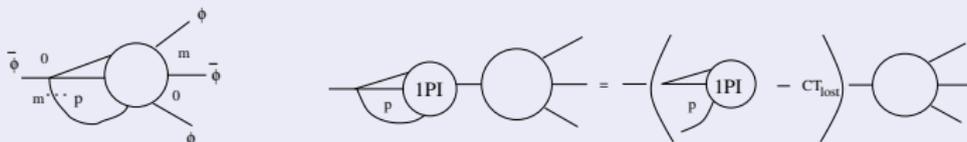


$$G_{(1)}^4(0, m, 0, m) = \lambda C_{0m} G^2(0, m) G_{ins}^2(0, 0; m) \quad (4.9)$$

L'identité de Ward nous donne:

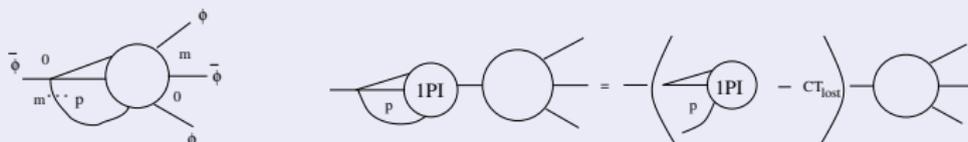
$$\begin{aligned} G_{ins}^2(0, 0; m) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} G_{ins}^2(\zeta, 0; m) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{G^2(0, m) - G^2(\zeta, m)}{\zeta} \\ &= -\partial_L G^2(0, m) \rightarrow \\ G_{(1)}^4(0, m, 0, m) &= \lambda [G^2(0, m)]^4 \frac{C_{0m}}{G^2(0, m)} [1 - \partial_L \Sigma(0, m)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le troisième terme



en "ouvrant" la face p de $G_{(3)}^{4,bare} = C_{0m} \sum_p G_{ins}^{4,bare}(p, 0; m, 0, m)$

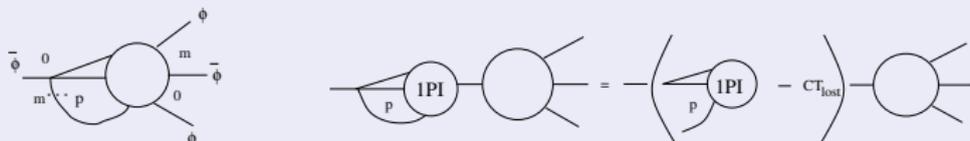
Le troisième terme



en "ouvrant" la face p de $G_{(3)}^{4,bare} = C_{0m} \sum_p G_{ins}^{4,bare}(p, 0; m, 0, m)$ Mais dans la théorie renormalisée nous devons **ajouter le contreterme de masse manquant**.

$$G_{(3)}^4 = C_{0m} \sum_p G_{ins}^4(0, p; m, 0, m) - C_{0m}(CT_{manquant})G^4(0, m, 0, m) \quad (4.11)$$

Le troisième terme



en "ouvrant" la face p de $G_{(3)}^{4,bare} = C_{0m} \sum_p G_{ins}^{4,bare}(p, 0; m, 0, m)$ Mais dans la théorie renormalisée nous devons **ajouter le contreterme de masse manquant**.

$$G_{(3)}^4 = C_{0m} \sum_p G_{ins}^4(0, p; m, 0, m) - C_{0m}(CT_{manquant})G^4(0, m, 0, m) \quad (4.11)$$

Mais on a $CT_{manquant} = \Sigma^R(0, 0) = \Sigma(0, 0) - T^L$, et on peut conclure:

$$G_{(3)}^4(0, m, 0, m) = -C_{0m}G^4(0, m, 0, m) \frac{1}{G^2(0, 0)} \frac{\partial \Sigma(0, 0)}{1 - \partial \Sigma(0, 0)}$$

La mort du fantôme

On transporte G_3^4 du cote gauche de l'equation de Dyson:

$$\begin{aligned} G^4(1 + C_{0m} \frac{1}{G^2(0,0)} \frac{\partial \Sigma(0,0)}{1 - \partial \Sigma(0,0)}) \\ = \lambda [G^2(0, m)]^4 \frac{C_{0m}}{G^2(0, m)} [1 - \partial_L \Sigma(0, m)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

on utilise $C_{0m} = 1/(m + A^{ren})$; $G^2(0, m) = 1/[m(1 - \partial \Sigma) + A^{ren}]$ et on obtient:

$$G^4(1 - \partial \Sigma + \frac{A^{ren}}{m + A^{ren}} \partial \Sigma) = \lambda [G^2]^4 (1 - \partial \Sigma)^2 (1 - \frac{m}{m + A^{ren}} \partial \Sigma) \quad (4.13)$$

donc en simplifiant, comme les termes rouges sont égaux, et en amputant, $\Gamma_4 = \lambda Z^2$ soit $\beta = 0!$

Conclusions

Introduction

La théorie des champs non-commutative

Théories covariantes, théorie auto-duales

La chasse au fantôme

Conclusions

Un premier bilan

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que
compatibilité

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que **compatibilité** entre la géométrie non-commutative et la théorie quantique des champs.

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que **compatibilité** entre la géométrie non-commutative et la théorie quantique des champs.

- ▶ La théorie des champs en géométrie non commutative peut être renormalisée.

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que **compatibilité** entre la géométrie non-commutative et la théorie quantique des champs.

- ▶ La théorie des champs en géométrie non commutative peut être renormalisée.
- ▶ Il n'est pas nécessaire pour cela de briser l'invariance par translation (au moins dans le cas des modèles covariants).

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que **compatibilité** entre la géométrie non-commutative et la théorie quantique des champs.

- ▶ La théorie des champs en géométrie non commutative peut être renormalisée.
- ▶ Il n'est pas nécessaire pour cela de briser l'invariance par translation (au moins dans le cas des modèles covariants).
- ▶ La théorie des champs non commutative se comporte **mieux** que la théorie ordinaire (pas de fantôme de Landau).

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que **compatibilité** entre la géométrie non-commutative et la théorie quantique des champs.

- ▶ La théorie des champs en géométrie non commutative peut être renormalisée.
- ▶ Il n'est pas nécessaire pour cela de briser l'invariance par translation (au moins dans le cas des modèles covariants).
- ▶ La théorie des champs non commutative se comporte **mieux** que la théorie ordinaire (pas de fantôme de Landau).
- ▶ Sa construction non perturbative paraît à portée de main.

Un premier bilan

Tous ces travaux récents permettent d'affirmer qu'il y a bien plus que **compatibilité** entre la géométrie non-commutative et la théorie quantique des champs.

- ▶ La théorie des champs en géométrie non commutative peut être renormalisée.
- ▶ Il n'est pas nécessaire pour cela de briser l'invariance par translation (au moins dans le cas des modèles covariants).
- ▶ La théorie des champs non commutative se comporte **mieux** que la théorie ordinaire (pas de fantôme de Landau).
- ▶ Sa construction non perturbative paraît à portée de main.
- ▶ Les flots du groupe de renormalisation sont **modifiés** en présence de **non commutativité de l'espace-temps**.

Géométrie non commutative et modèle standard

Géométrie non commutative et modèle standard

Alain Connes va nous montrer que le Lagrangien du modèle standard et la gravitation apparaissent très naturellement si l'on ajoute à l'espace ordinaire un espace **interne** très simple non-commutatif.

Géométrie non commutative et modèle standard

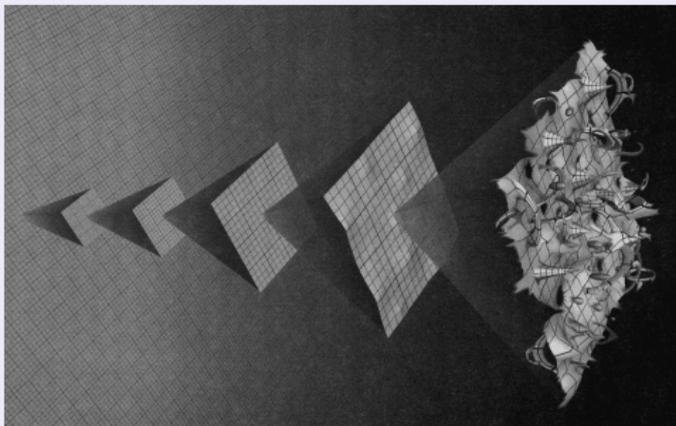
Alain Connes va nous montrer que le Lagrangien du modèle standard et la gravitation apparaissent très naturellement si l'on ajoute à l'espace ordinaire un espace **interne** très simple non-commutatif.

Cependant les aspects quantiques de l'espace-temps devraient apparaître de plus en plus fortement au fur et à mesure que l'on explore la **terra incognita** en direction de l'échelle de Planck.

Géométrie non commutative et modèle standard

Alain Connes va nous montrer que le Lagrangien du modèle standard et la gravitation apparaissent très naturellement si l'on ajoute à l'espace ordinaire un espace **interne** très simple non-commutatif.

Cependant les aspects quantiques de l'espace-temps devraient apparaître de plus en plus fortement au fur et à mesure que l'on explore la **terra incognita** en direction de l'échelle de Planck.



La non-commutativité alternative à la supersymétrie?

Si à une échelle (hypothétique) comprise entre l'échelle du Tev et l'échelle de Planck l'espace-temps ordinaire lui aussi devient non-commutatif, il faut sans doute utiliser le groupe de renormalisation non commutatif à partir de cette échelle.

La non-commutativité alternative à la supersymétrie?

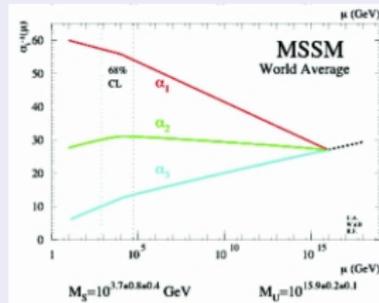
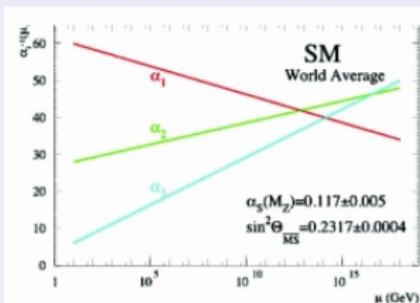
Si à une échelle (hypothétique) comprise entre l'échelle du Tev et l'échelle de Planck l'espace-temps ordinaire lui aussi devient non-commutatif, il faut sans doute utiliser le groupe de renormalisation non commutatif à partir de cette échelle.

Un des arguments les plus forts pour l'existence de **supersymétrie** est que cela aide à la convergence des couplages $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ du modèle standard:

La non-commutativité alternative à la supersymétrie?

Si à une échelle (hypothétique) comprise entre l'échelle du Tev et l'échelle de Planck l'espace-temps ordinaire lui aussi devient non-commutatif, il faut sans doute utiliser le groupe de renormalisation non commutatif à partir de cette échelle.

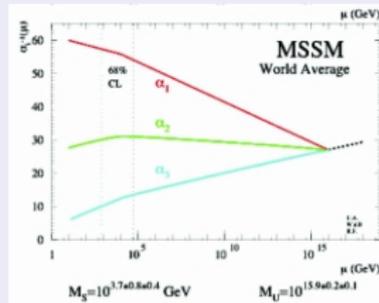
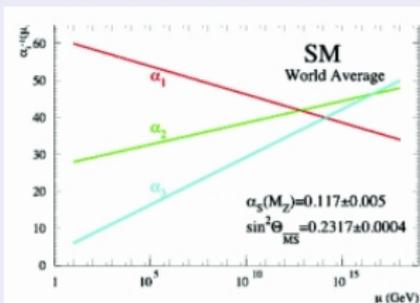
Un des arguments les plus forts pour l'existence de **supersymétrie** est que cela aide à la convergence des couplages $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ du modèle standard:



La non-commutativité alternative à la supersymétrie?

Si à une échelle (hypothétique) comprise entre l'échelle du Tev et l'échelle de Planck l'espace-temps ordinaire lui aussi devient non-commutatif, il faut sans doute utiliser le groupe de renormalisation non commutatif à partir de cette échelle.

Un des arguments les plus forts pour l'existence de **supersymétrie** est que cela aide à la convergence des couplages $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ du modèle standard:



Mais cette convergence pourrait aussi se produire en vertu d'un flot modifié par la **non-commutativité de l'espace-temps**.

Problèmes ouverts

Problèmes ouverts

Ils sont évidemment très nombreux:

Problèmes ouverts

Ils sont évidemment très nombreux:

- ▶ Modèles covariants non-orientables

Problèmes ouverts

Ils sont évidemment très nombreux:

- ▶ Modèles covariants non-orientables
- ▶ Modèles covariants autoduaux

Problèmes ouverts

Ils sont évidemment très nombreux:

- ▶ Modèles covariants non-orientables
- ▶ Modèles covariants autoduaux
- ▶ Constructions non perturbatives

Problèmes ouverts

Ils sont évidemment très nombreux:

- ▶ Modèles covariants non-orientables
- ▶ Modèles covariants autoduaux
- ▶ Constructions non perturbatives
- ▶ Théories de jauge (Yang-Mills, Chern-Simons)

Problèmes ouverts

Ils sont évidemment très nombreux:

- ▶ Modèles covariants non-orientables
- ▶ Modèles covariants autoduaux
- ▶ Constructions non perturbatives
- ▶ Théories de jauge (Yang-Mills, Chern-Simons)
- ▶ Applications à la matière condensée du nouveau groupe de renormalisation découvert

Problèmes ouverts

Ils sont évidemment très nombreux:

- ▶ Modèles covariants non-orientables
- ▶ Modèles covariants autoduaux
- ▶ Constructions non perturbatives
- ▶ Théories de jauge (Yang-Mills, Chern-Simons)
- ▶ Applications à la matière condensée du nouveau groupe de renormalisation découvert
- ▶ Généralisations à d'autres géométries que Moyal...

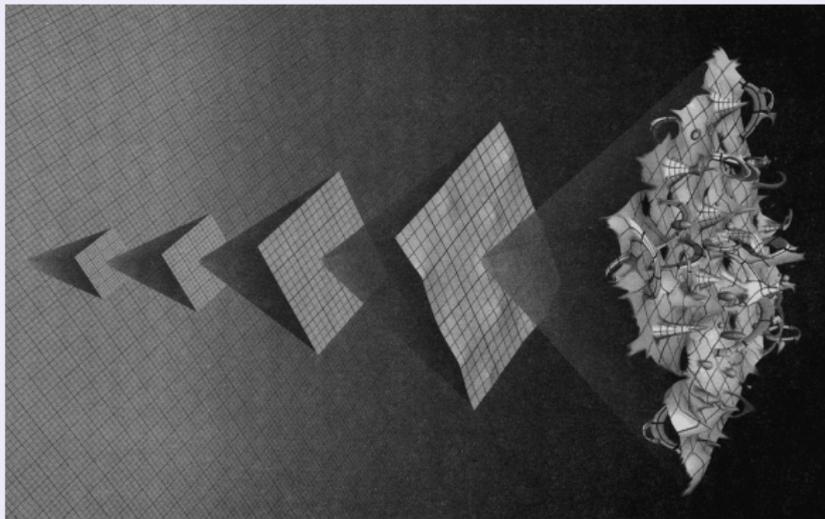
Vers un espace quantique?

Vers un espace quantique?

Les aspects quantiques de l'espace-temps quantique devraient apparaître de plus en plus au fur et à mesure que nous explorerons la **terra incognita** en direction de l'échelle de Planck.

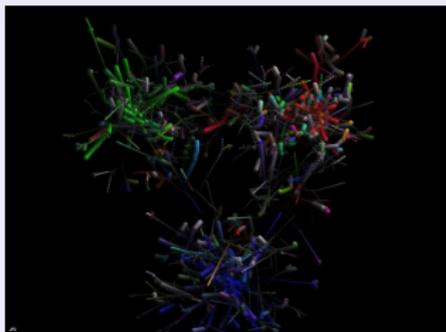
Vers un espace quantique?

Les aspects quantiques de l'espace-temps quantique devraient apparaître de plus en plus au fur et à mesure que nous explorerons la **terra incognita** en direction de l'échelle de Planck.

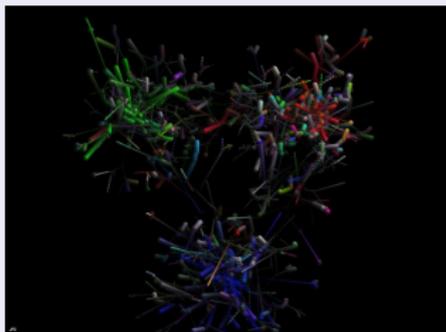


En résumé...

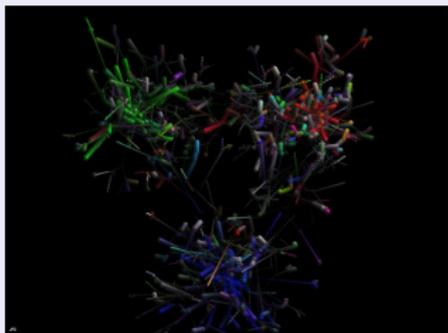
En résumé...



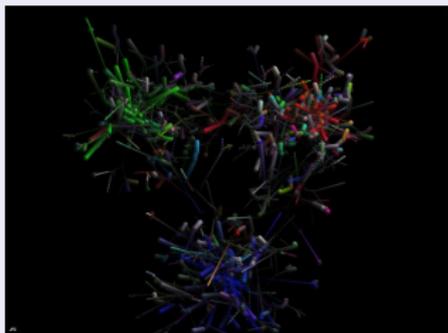
En résumé...



En résumé...

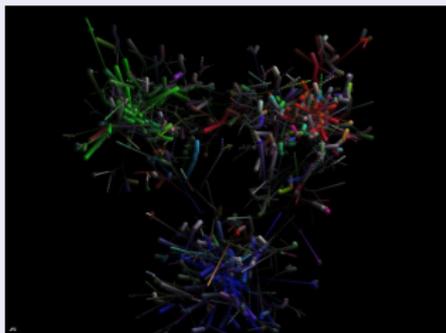


En résumé...



La théorie des champs

En résumé...



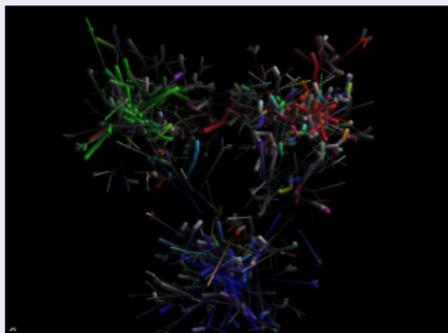
La théorie des champs



aime



En résumé...



La théorie des champs

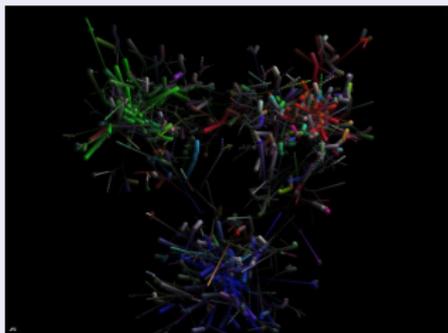


aime



la géométrie non-commutative!

En résumé...



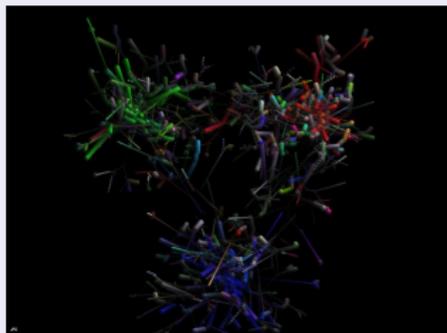
La théorie des champs

aime

la géométrie non-commutative!

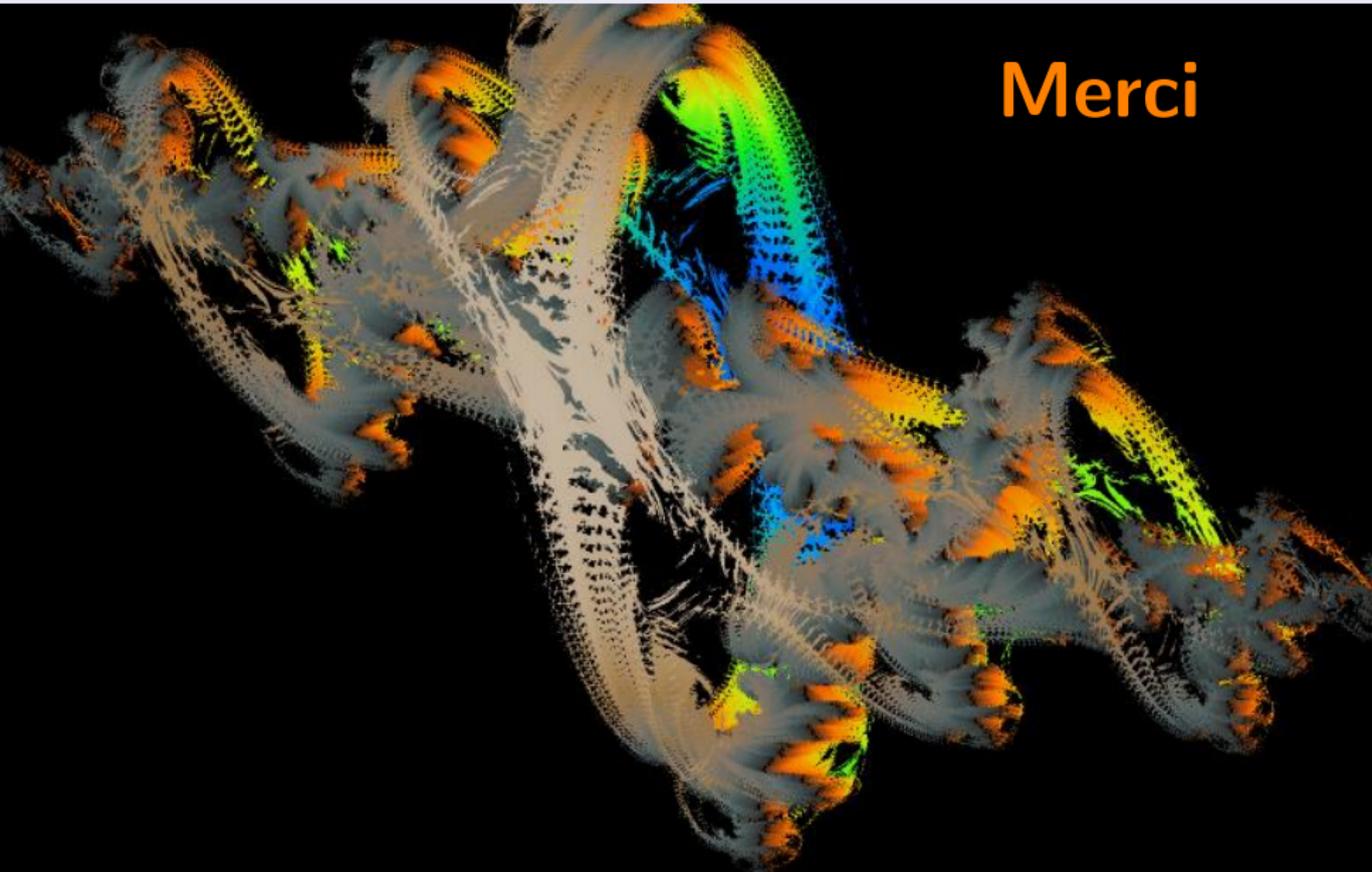
- ▶ Il faudrait sans doute rechercher davantage d'éventuels premiers effets de géométrie non-commutative (qui pourraient se révéler dès l'échelle bientôt observable par le LHC?)

En résumé...

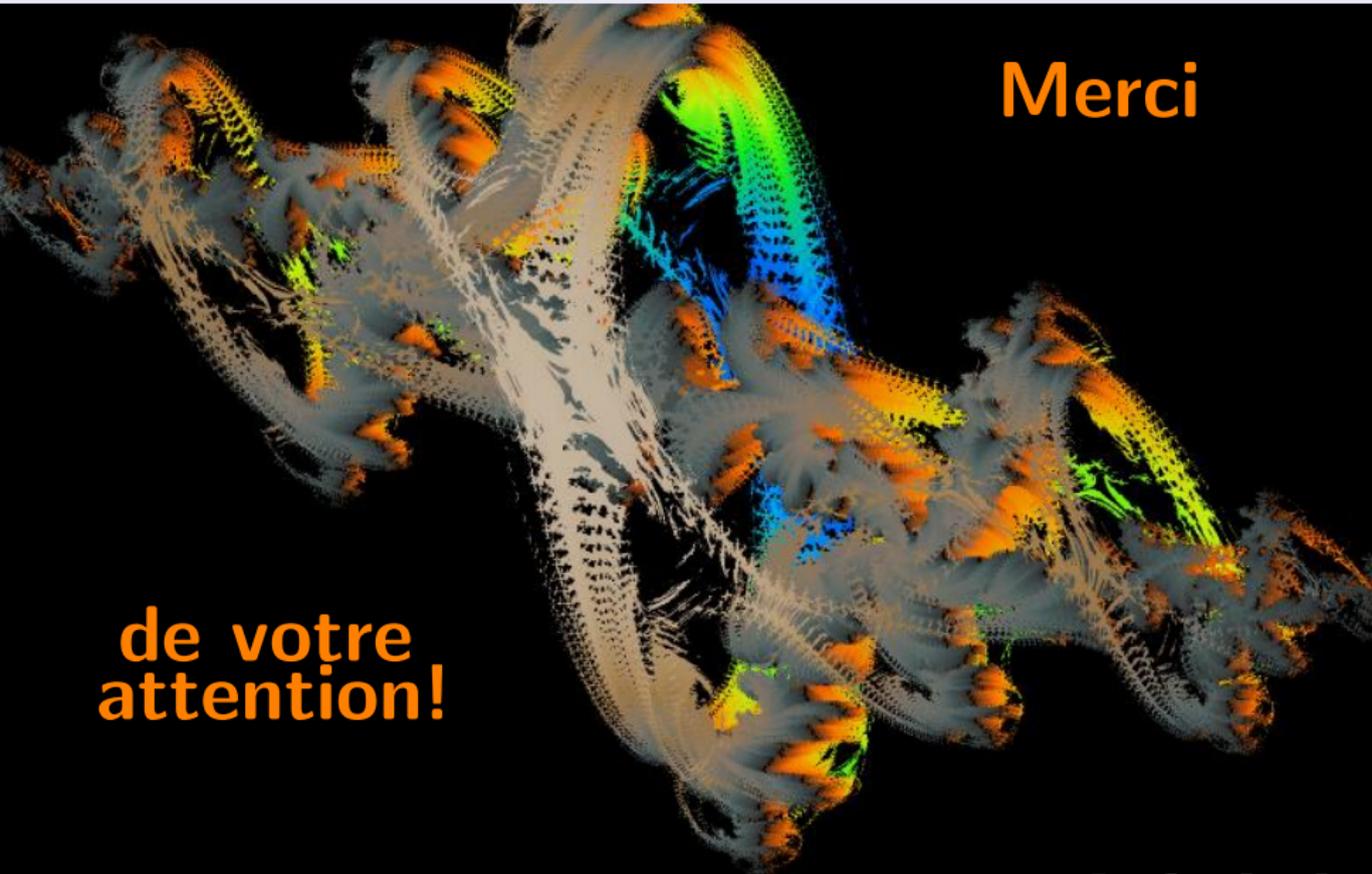


La théorie des champs aime la géométrie non-commutative!

- ▶ Il faudrait sans doute rechercher davantage d'éventuels premiers effets de géométrie non-commutative (qui pourraient se révéler dès l'échelle bientôt observable par le LHC?)
- ▶ Les techniques de géométrie non-commutative et de théorie non-commutative des champs nous semblent promises à un bel avenir en physique théorique.



Merci



Merci

**de votre
attention!**