

# Structure Fondamentale de La Matière

Samuel Wallon



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Mécanique analytique</b>	<b>5</b>
1.1	Principe de moindre action . . . . .	5
1.1.1	Equations d'Euler-Lagrange . . . . .	5
1.1.2	Principe de relativité galiléen : . . . . .	6
1.1.3	Fonction de lagrange pour un système de points matériels . . . . .	7
1.2	Intégrales du mouvement . . . . .	8
1.3	Equations canoniques . . . . .	9
1.3.1	Equations de Hamilton . . . . .	9
1.3.2	Fonction de Routh . . . . .	10
1.3.3	Crochets de Poisson . . . . .	11
1.4	L'action en fonction des coordonnées . . . . .	13
1.4.1	Variation de l'action pour deux trajectoires réelles voisines . . . . .	13
1.4.2	Théorème de Noether . . . . .	16
1.4.3	Principe de Maupertuis . . . . .	17
1.5	Transformations canoniques . . . . .	20
1.5.1	Fonction génératrice d'une transformation canonique . . . . .	20
1.5.2	Condition en terme de crochets de Poisson . . . . .	21
1.5.3	Théorème de Liouville . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Théorie classique des champs</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Formulation lagrangienne . . . . .	23
2.3	Equations d'Euler-Lagrange . . . . .	24
2.4	Les symétries globales . . . . .	25
2.4.1	seconde variation de l'action . . . . .	25
2.4.2	théorème de Noether . . . . .	26
2.4.3	Applications . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Symétries en Mécanique Quantique</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Description des états . . . . .	32
3.3	Lois de symétrie . . . . .	32
3.4	Théorème de Wigner . . . . .	34
3.5	Conséquence du théorème de Wigner . . . . .	34

<b>4</b>	<b>Groupes et algèbres de Lie</b>	<b>37</b>
4.1	Généralités . . . . .	37
4.1.1	Groupe continu, groupe de Lie, algèbre de Lie . . . . .	37
4.1.2	Générateurs . . . . .	38
4.1.3	Algèbre de Lie . . . . .	38
4.1.4	Quelques définitions utiles . . . . .	40
4.2	Quelques résultats sur les groupes et algèbres de Lie . . . . .	42
4.2.1	Lien entre groupe de Lie et algèbre de Lie correspondante . . .	42
4.2.2	Structure des algèbres de Lie et groupes de Lie ; caractérisation de Cartan . . . . .	44
4.2.3	Algèbre de Lie compacte . . . . .	46
4.2.4	Classification . . . . .	49
4.3	Représentations . . . . .	54
4.3.1	Généralités . . . . .	54
4.3.2	Représentations réductibles et irréductibles . . . . .	57
4.3.3	Lemme de Schur . . . . .	58
4.3.4	Unitarité des représentations . . . . .	60
4.3.5	Représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Groupe des Rotations</b>	<b>65</b>
5.1	Définition . . . . .	65
5.2	Algèbre de Lie de $SO(3)$ . . . . .	66
5.3	Groupe $SU(2)$ : définition et paramétrisation . . . . .	66
5.4	Homomorphisme du groupe $SU(2)$ sur le groupe $SO(3)$ . . . . .	69
5.4.1	Théorème . . . . .	69
5.4.2	Caractérisation . . . . .	69
5.4.3	Formules d'inversion . . . . .	70
5.4.4	Elements conjugués . . . . .	70
5.5	Forme infinitésimale . . . . .	71
5.6	Représentations de $SU(2)$ . . . . .	72
5.7	Représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ . . . . .	75
5.7.1	Spectre . . . . .	75
5.7.2	Vecteurs propres de $J^2$ et $J_3$ et construction des sous-espaces invariants $\mathcal{E}^{(j)}$ . . . . .	77
5.8	Angles d'Euler . . . . .	78
5.9	Définition des matrices de rotation . . . . .	81
5.10	Transformation des états et des observables sous une rotation . . . .	82
5.11	Représentation à une phase près de $SO(3)$ . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Représentations spinorielles de <math>SU(2)</math></b>	<b>89</b>
6.1	Spineurs . . . . .	89
6.1.1	Action contravariante . . . . .	89
6.1.2	Métrique . . . . .	89
6.2	Calcul tensoriel . . . . .	91
6.2.1	spineur covariant . . . . .	91

6.2.2	action d'une rotation sur un spineur covariant . . . . .	92
6.2.3	Equivalence des représentations $U$ et $\bar{U}$ . . . . .	92
6.2.4	Norme sur les spineurs . . . . .	93
6.3	Tenseurs spinoriels . . . . .	94
6.3.1	Tenseurs de rang quelconque . . . . .	94
6.3.2	Tenseurs antisymétriques . . . . .	95
6.3.3	Norme sur les tenseurs spinoriels . . . . .	95
6.3.4	Opérations sur les tenseurs spinoriels . . . . .	95
6.4	Représentations irréductibles de $SU(2)$ . . . . .	96
6.4.1	Lien avec les tenseurs spinoriels . . . . .	96
6.4.2	Lien avec les représentations $D^j$ . . . . .	98
6.5	Retour sur le morphisme $SU(2) \rightarrow SO(3)$ . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Notion de groupe de recouvrement</b> . . . . .	<b>101</b>
7.1	Quelques définitions . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Le groupe de Lorentz</b> . . . . .	<b>107</b>
8.1	Intervalle d'espace-temps . . . . .	107
8.2	Groupe de Poincaré et groupe de Lorentz . . . . .	109
8.2.1	Caractérisation de $\mathcal{P}$ . . . . .	109
8.2.2	Structure du groupe de Lorentz . . . . .	111
8.2.3	Vecteurs contravariants et covariants . . . . .	113
8.2.4	Transformation d'un vecteur covariant . . . . .	114
8.2.5	Calcul tensoriel . . . . .	115
8.3	Algèbre de Lie du groupe de Lorentz restreint $L_+^\uparrow$ . . . . .	116
8.3.1	Forme non covariante de générateurs . . . . .	116
8.3.2	Algèbre de Lie . . . . .	118
8.3.3	Transformation de Lorentz pure . . . . .	119
8.3.4	Rotation . . . . .	121
8.3.5	Forme covariante de l'algèbre de Lie de $L_+^\uparrow$ . . . . .	122
8.3.6	Représentation sur les fonctions scalaires (représentation ap- pelée régulière) . . . . .	124
8.3.7	Forme réelle compacte . . . . .	125
<b>9</b>	<b>Représentations spinorielles du groupe de Lorentz</b> . . . . .	<b>129</b>
9.1	Introduction . . . . .	129
9.2	Homomorphismes du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe $L_+^\uparrow$ . . . . .	130
9.2.1	Préliminaires . . . . .	130
9.2.2	Théorème . . . . .	130
9.3	Représentations spinorielles de $L_+^\uparrow$ . . . . .	133
9.3.1	Identification des représentations spinorielles . . . . .	133
9.3.2	Représentations de $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	134
9.4	Spineurs quadridimensionnels . . . . .	135
9.4.1	Spineurs contravariants et covariants . . . . .	135
9.4.2	Produit scalaire invariant . . . . .	136

9.4.3	Spineurs d'ordre supérieur . . . . .	137
9.4.4	Représentation irréductibles de $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	137
9.4.5	Application : lien entre spineurs mixtes et quadrivecteurs . . .	138
9.5	Inversion d'espace et bispineurs . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Le groupe de Poincaré</b>	<b>143</b>
<b>11</b>	<b>L'équation de Klein-Gordon</b>	<b>145</b>
<b>12</b>	<b>L'équation de Dirac</b>	<b>147</b>

# Chapitre 1

## Mécanique analytique

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques concepts essentiels de mécanique analytique, en décrivant les approches hamiltonienne et lagrangienne, pour les systèmes comportant un nombre fini de degrés de liberté. On trouvera un exposé détaillé de ces notions dans le Landau de mécanique [1] dont ce chapitre s'inspire fortement.

### 1.1 Principe de moindre action

#### 1.1.1 Equations d'Euler-Lagrange

Dans la mécanique lagrangienne (Lagrange, 1787), tout système mécanique est caractérisé par sa fonction de Lagrange (ou lagrangien)  $L(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t)$ , notée par la suite  $L(q, \dot{q}, t)$ .  $q_1, q_2, \dots, q_s$  représentent les  $s$  coordonnées généralisées du système. Ces coordonnées, qui ne sont pas forcément cartésiennes, caractérisent complètement la position d'un système à  $s$  degrés de liberté. Leurs dérivées par rapport aux temps  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$  sont les vitesses généralisées du système. Le fait que la connaissance à un instant donné des positions et des vitesses d'un système suffise à caractériser complètement son évolution ultérieure vient du fait que de façon générale, les équations du mouvement d'un système sont des équations différentielles du second ordre.

Supposons que la position du système soit bien déterminée aux instants  $t_1$  et  $t_2$ . On note  $q^{(1)}, q^{(2)}$  ces positions.

Le principe d'Hamilton, ou principe de moindre action, postule que le système se déplace de telle sorte que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.1)$$

soit minimale (plus généralement extrémale pour l'ensemble de la trajectoire, la condition de minimalité n'étant valable que pour des portions suffisamment petites de la trajectoire). La trajectoire du système peut alors être déterminée en résolvant les équations d'Euler-Lagrange, qui s'établissent par une méthode variationnelle.

Soit  $q(t)$  la fonction (supposée unique) qui rend  $S$  extrémale. Considérons une variation  $\delta q(t)$  de la trajectoire, qui vérifie  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Cette variation est

supposée petite, dans un sens que l'on peut préciser mathématiquement à condition de définir correctement l'espace de fonction sur lequel agit la fonctionnelle action, et de le munir d'une norme [2]. Nous laissons de côté ici tout soucis de rigueur mathématique. La variation de l'action s'écrit alors

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.\end{aligned}\quad (1.2)$$

En utilisant le fait que  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$  et en intégrant par partie, on obtient

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0, \quad (1.3)$$

pour toute variation  $\delta q$ . On obtient donc les équations d'Euler Lagrange (pour un système à  $s$  degrés de liberté)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, s). \quad (1.4)$$

Ce sont les équations du mouvement du système : si  $L$  est connu, alors les équations (1.4) permettent de relier accélérations, vitesses et coordonnées. Elles forment un système de  $s$  équations différentielles du second ordre à  $s$  fonctions inconnues  $q_i(t)$ . Leur solution générale contient  $2s$  constantes arbitraires qui doivent être précisées par les conditions initiales.

### exercice 1.1

Montrer que les équations du mouvement ne sont pas modifiées si l'on ajoute au lagrangien la dérivée totale d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps.

Considérons à titre d'exemple le cas d'un point matériel libre. Plaçons nous dans un référentiel galiléen, dans lequel par définition l'espace est homogène et isotrope, et le temps uniforme. Il est alors clair que le lagrangien du point matériel ne peut dépendre que du carré de sa vitesse.

### exercice 1.2

En déduire le principe d'inertie, à savoir que le mouvement d'un point matériel libre dans un référentiel galiléen est rectiligne et uniforme.

## 1.1.2 Principe de relativité galiléen :

Il existe une infinité de référentiels galiléens, qui sont animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement rectiligne et uniforme, dans lesquels les propriétés du

temps et de l'espace sont les mêmes, ainsi que les lois de la dynamique. Les lois de transformation sont données par un groupe à 10 paramètres :

$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ x'_i = R_{ij} x_j + V_i t + a_i \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $R_{ij}$  est une matrice orthogonale et  $V_i$  représente les 3 composantes de la vitesse.

### exercice 1.3

En utilisant le principe de relativité galiléenne, montrer que le lagrangien d'un point matériel libre est de la forme

$$L = av^2. \quad (1.6)$$

On pourra considérer deux référentiels galiléens qui se déplacent l'un par rapport à l'autre avec une vitesse infiniment petite, et utiliser le résultat de l'exercice 1.1.

Par convention, on fixe  $a = m/2$ , ce qui définit la masse  $m$  du point matériel. Cette quantité doit être positive d'après le principe de moindre action

### 1.1.3 Fonction de lagrange pour un système de points matériels

Pour un système fermé de points matériels en interaction, le lagrangien s'écrit

$$L = T - U \quad (1.7)$$

où  $T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{x}_a^2$  est l'énergie cinétique, la somme portant sur les points du système matériel, et  $U(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots)$  est l'énergie potentielle. Si au lieu de coordonnées cartésiennes on utilise des coordonnées généralisées pour décrire le mouvement du système, il faut effectuer la transformation

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (1.8)$$

et donc

$$\dot{x}_a = f_a(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s). \quad (1.9)$$

La fonction de Lagrange aura alors la forme

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q), \quad (1.10)$$

où les fonctions  $a_{i,j}$  ne dépendent que des coordonnées. Ainsi dans un système de coordonnées généralisées, l'énergie cinétique est toujours fonction quadratique des vitesses, mais elle peut dépendre aussi des coordonnées.

### exercice 1.4

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, retrouver la relation fondamentale de la dynamique entre force et accélération.

## 1.2 Intégrales du mouvement

Nous avons vu plus haut (voir 1.1.1) que la solution des équations du mouvement d'un système fermé à  $s$  degrés de libertés fait intervenir  $2s$  constantes. En fait, à cause de l'uniformité du temps, une des constantes du mouvement peut être éliminée, de sorte qu'il reste  $2s - 1$  équations du mouvement. Nous allons considérer ici successivement trois types d'intégrales premières tout à fait fondamentales : l'énergie, l'impulsion et le moment cinétique, qui sont directement reliées respectivement aux propriétés d'uniformité du temps, de l'espace, et d'isotropie spatiale, dans les référentiels galiléens.

Nous verrons plus loin grâce au théorème de Noether comment de façon générale toute symétrie continue de l'action entraîne l'existence d'une quantité conservée.

### exercice 1.5

En utilisant l'uniformité du temps pour un système fermé et en se servant des équations d'Euler-Lagrange, montrer que l'énergie définie par

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \quad (1.11)$$

est conservée.

### exercice 1.6

En utilisant l'uniformité de l'espace pour un système fermé et en se servant des équations d'Euler-Lagrange, montrer que l'impulsion définie par

$$\vec{p} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_a} \quad (1.12)$$

est conservée (la somme sur  $a$  représente la somme sur tous les points du matériels système). On pourra considérer une translation globale infinitésimale du système et calculer la variation correspondante du lagrangien. Quelle est l'expression de l'impulsion dans le cas d'une particule libre? Ecrire les équations d'Euler-Lagrange en terme des impulsions et des forces.

Dans le cas où l'on utilise des coordonnées généralisées  $q_i$  ( $i=1, \dots, s$ ), les impulsions généralisées sont définies par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.13)$$

et les forces généralisées par

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.14)$$

Dans le cas de coordonnées cartésiennes en mécanique, les coordonnées  $p_i$  sont simplement les composantes du vecteur  $\vec{p}_a$ . Mais dans le cas général, l'impulsion est une

fonction linéaire homogène des vitesses généralisée qui ne se ramène pas au produit d'une masse par une vitesse.

### exercice 1.7

En utilisant l'isotropie de l'espace pour un système fermé et en utilisant les équations d'Euler-Lagrange, montrer que le moment cinétique défini par

$$\vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a \quad (1.15)$$

est conservé. On pourra considérer une rotation globale infinitésimale du système et calculer la variation correspondante du lagrangien.

## 1.3 Equations canoniques

### 1.3.1 Equations de Hamilton

Dans l'approche lagrangienne étudiée plus haut, les lois de la mécanique sont formulées en supposant que l'état du système est décrit par les coordonnées et les vitesses généralisées de celui-ci. Il est possible de passer d'un choix de variables indépendantes à un autre en effectuant une transformation de Legendre. Elle consiste à remplacer une variable dynamique par sa variable conjuguée. Considérons pour cela la différentielle totale du lagrangien :

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i. \quad (1.16)$$

En utilisant la définition des impulsions généralisées et les équations d'Euler-Lagrange, on peut remplacer cette expression par

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i. \quad (1.17)$$

On définit la fonction de Hamilton (ou hamiltonien) du système par la transformée de Legendre du lagrangien par rapport au couple  $(p_i, \dot{q}_i)$

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (1.18)$$

C'est l'énergie du système. On constate que la différentielle de  $H$  s'écrit

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i, \quad (1.19)$$

ce qui est exactement le but recherché : on a remplacé la description du système en terme de coordonnées et de vitesses  $(q_i, \dot{q}_i)$  par une description en terme de coordonnées et d'impulsion  $(q_i, p_i)$ .

Cette transformation est très utilisée en thermodynamique par exemple, lorsque l'on remplace l'étude de l'énergie interne par celle de l'enthalpie (passage du couple de variables  $(S, \Omega, N)$  au couple de variable  $(T, \Omega, N)$  (où  $S$  est l'entropie,  $\Omega$  est le volume,  $N$  le nombre de particules, et  $T$  la température).

Les équations du mouvement dans ce nouveau couple de variables sont maintenant

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.20)$$

comme on peut le voir immédiatement d'après l'expression de la différentielle de  $H$  (1.19). Ces équations dites d'Hamilton (ou canoniques à cause de leur simplicité et de leur symétrie) forment un système de  $2s$  équations différentielles du premier ordre à  $2s$  fonctions inconnues  $q(t)$  et  $p(t)$ , qui remplacent les  $s$  équations du second ordre d'Euler-Lagrange.

### exercice 1.8

Montrer que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Retrouver ainsi la loi de conservation de l'énergie.

Dans le cas où le système dépend également d'un paramètre  $\lambda$  qui n'est pas une variable dynamique (exemple : champ extérieur dans lequel le point matériel est plongé, voir chapitre 2), montrer que

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right|_{p,q} = - \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right|_{q,\dot{q}} \quad (1.22)$$

En déduire que dans le cas où le lagrangien dépend explicitement du temps,

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{p,q} = - \left. \frac{\partial L}{\partial t} \right|_{q,\dot{q}} \quad (1.23)$$

### 1.3.2 Fonction de Routh

Il est parfois utile de n'effectuer la transformation de Legendre précédente que pour certains couples de variables  $(\dot{q}, p)$ . Supposons par exemple que la dynamique du système est décrite par deux variables  $q$  et  $\xi$ , et effectuons une transformée de Legendre par rapport au couple  $(\dot{q}, p)$  uniquement. Il est alors naturel d'introduire la fonction de Routh

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L. \quad (1.24)$$

### exercice 1.9

Montrer que la fonction de Routh est une fonction de Hamilton par rapport à la coordonnée  $q$  et une fonction de Lagrange par rapport à la coordonnée  $\xi$  :

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q} \quad (1.25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \quad (1.26)$$

Montrer que l'énergie s'écrit

$$E = R - \dot{\xi} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \quad (1.27)$$

La généralisation au cas de plus de 2 variables est immédiate. L'intérêt de cette fonction de Routh apparaît dans les systèmes possédant une coordonnée cyclique. On dit que  $q$  est une coordonnée cyclique si elle n'entre pas explicitement dans le lagrangien. Il est alors immédiat que l'impulsion  $p$  est constante, comme on peut le voir d'après les équations canoniques (1.25) ou d'après l'équation d'Euler-Lagrange pour la coordonnée  $q$ . Les équations d'Euler-Lagrange pour les coordonnées  $\xi_i$  (1.26) se réduisent alors simplement à des équations contenant les coordonnées  $\xi_i$  (notées symboliquement  $\xi$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \xi}. \quad (1.28)$$

Les coordonnées cycliques disparaissent donc complètement des équations du mouvement,  $p$  jouant simplement le rôle d'un paramètre. La méthode consiste donc à trouver les fonctions  $\xi(t)$  solutions des équations (1.28) puis à obtenir la coordonnée cyclique  $q(t)$  par intégration de l'équation canonique

$$\dot{q} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial p}. \quad (1.29)$$

### 1.3.3 Crochets de Poisson

Il est intéressant de reformuler les équations canoniques à l'aide des crochets de Poisson. Ce formalisme s'avère en particulier très utile pour comprendre le passage de la dynamique classique à la dynamique quantique, que le système possède un nombre fini de degrés de liberté, comme c'est le cas dans ce chapitre, ou qu'il possède un nombre infini de degrés de liberté, situation que nous examinerons dans le chapitre 2.

On définit le crochet de Poisson de deux fonctions  $f$  et  $g$  agissant sur l'espace  $R^{2s}$  par

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (1.30)$$

#### exercice 1.10

Montrer que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (1.31)$$

Une condition pour que  $f$  soit intégrale première du mouvement est donc que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0, \quad (1.32)$$

soit, dans le cas où cette intégrale première ne dépend pas explicitement du temps,

$$\{f, H\} = 0. \quad (1.33)$$

### exercice 1.11

Montrer que l'ensemble des fonctions  $f(p, q)$  différentiable sur l'espace  $R^{2s}$  muni de l'opérateur crochet de Poisson définit une algèbre de Lie de dimension  $\infty$ .

Montrer que

$$\{f, \text{constante}\} = 0 \quad (1.34)$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (1.36)$$

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (1.37)$$

$$\{q, f\} = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \{p, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q} \quad (1.38)$$

$$\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt} = \{q, H\}, \quad \dot{p} \equiv \frac{dp}{dt} = \{p, H\}. \quad (1.39)$$

### Théorème de Poisson

Si  $f$  et  $g$  sont des intégrales premières, alors  $\{f, g\}$  est aussi une intégrale première.

### exercice 1.12

Démontrer ce théorème. On pourra utiliser la propriété (1.35) et l'identité de Jacobi satisfaite par le crochet de Poisson (voir exercice 1.11).

### exercice 1.13

1- Calculer les crochets de Poisson formés à partir des composantes du moment cinétique.

2- Calculer les crochets de Poisson formés à partir des composantes du moment cinétique et de l'impulsion.

3- Montrer que le crochet de Poisson d'une fonction scalaire des coordonnées et des impulsions avec les composantes du moment cinétique est nul.

4- Soit  $\vec{n}$  un vecteur unitaire. Montrer que

$$\{f, \vec{L} \cdot \vec{n}\} = \vec{n} \wedge \vec{f}, \quad (1.40)$$

où  $\vec{f}$  est une fonction vectorielle des coordonnées et des impulsions.

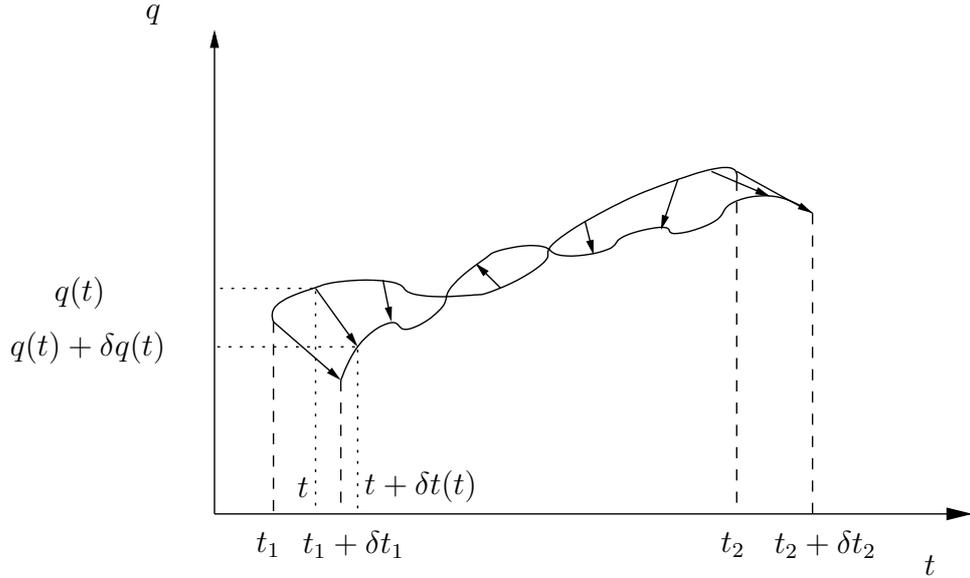
## 1.4 L'action en fonction des coordonnées

### 1.4.1 Variation de l'action pour deux trajectoires réelles voisines

Lorsque nous avons formulé le principe de moindre action dans la partie 1.1, nous avons envisagé des variations de l'action entre deux valeurs fixées  $q(t_1)$  et  $q(t_2)$  des coordonnées du système considéré à deux instants fixés  $t_1$  et  $t_2$ . La trajectoire réelle correspond alors à celle qui minimise l'action  $S$ , les contraintes précédentes étant satisfaites.

Nous allons maintenant étudier les variations de l'action lorsque l'on considère différentes trajectoires réelles. On peut tout d'abord considérer la variation de l'action lorsque l'on impose aux trajectoires de passer par la même position  $q(t_1) = q^{(1)}$  au même instant  $t_1$  mais en des positions différentes à l'instant  $t_2$ . On peut également considérer l'action comme une fonction explicite du temps, c'est à dire étudier ses variations lorsque l'on impose aux trajectoires réelles de passer par la même position  $q(t_1) = q^{(1)}$  au même instant  $t_1$ , et à la même position  $q^{(2)}$  mais en des instants différents  $t_2$ .

Nous allons ici directement envisager une transformation générale infinitésimale de la trajectoire, pour laquelle les coordonnées et le temps varient tous deux à la fois au début et à la fin du mouvement.



Soit donc  $q(t)$  la trajectoire définie de  $t_1$  à  $t_2$ , solution des équations d'Euler-Lagrange. Considérons une transformation générale infinitésimale de cette trajectoire de la forme

$$\begin{aligned} t' &= t + \delta t(t) \\ q'(t') &= q(t) + \delta q(t) . \end{aligned} \quad (1.41)$$

Notons  $\bar{\delta}q(t)$  la différence entre les coordonnées de la trajectoire transformée et la trajectoire initiale mesurées au même instant  $t$ .

$$\begin{aligned} \bar{\delta}q(t) &= q'(t) - q(t) \\ &= q(t - \delta t) + \delta q(t - \delta t) - q(t) \\ &= \delta q(t) - \dot{q}(t) \cdot \delta t + \dots (\text{termes d'ordre supérieur en } \delta t) \end{aligned} \quad (1.42)$$

L'action de la trajectoire initiale s'écrit, en notant  $\delta t_{1,2} = \delta t(t_{1,2})$ ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt . \quad (1.43)$$

Après la transformation (1.41), elle s'écrit, le long de la trajectoire ainsi obtenue,

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} L(q'(t), \dot{q}'(t), t) dt \\ &= \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} L(q'(t), \dot{q}'(t), t) dt + \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} L(q'(t), \dot{q}'(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_2} L(q'(t), \dot{q}'(t), t) dt , \end{aligned} \quad (1.44)$$

soit encore, en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $\delta t$ ,

$$\begin{aligned} S' &= \delta t L(q(t), \dot{q}(t), t)|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} L(q'(t), \dot{q}'(t), t) dt \\ &= \delta t L(q(t), \dot{q}(t), t)|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \bar{\delta}q(t), \dot{q}(t) + \bar{\delta}\dot{q}(t), t) dt . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Examinons le dernier terme. Il s'écrit encore, en développant au premier ordre en  $\bar{\delta}q$  et  $\bar{\delta}\dot{q}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L}{\partial q} \bar{\delta}q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}\dot{q} \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \bar{\delta}q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \bar{\delta}q \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}q \right) \\ &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}q \right|_{t_1}^{t_2} + S + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} \bar{\delta}q dt \end{aligned} \quad (1.46)$$

Le dernier terme de l'équation précédente s'annule puisque  $q(t)$  est solution des équations du mouvement. Ainsi

$$dS = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}q + L \delta t \right) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.47)$$

Il est intéressant de remarquer que dans le calcul menant à l'expression précédente, on a uniquement utilisé le fait que la trajectoire initiale est solution des équations du mouvement. Il semble au premier abord que la trajectoire transformée puisse être quelconque. En fait, puisque  $S$  est extrémale dans l'espace des trajectoires pour la trajectoire réelle initiale qui va de  $(q^{(1)}, t_1)$  à  $(q^{(2)}, t_2)$ , une trajectoire voisine quelconque (i.e a priori non solution des équations du mouvement) ne différant que d'une "petite" quantité  $\bar{\delta}q$  (au sens de la norme dans l'espace sur lequel agit la fonctionnelle action) rendra l'action extrémale (à des termes en  $\bar{\delta}q^2$  près), et sera donc solution des équations du mouvement à l'ordre  $\bar{\delta}q$  considéré.

Ceci se traduit par le fait que la contribution correspondante au calcul précédent est d'ordre  $\bar{\delta}q^2$ . La seule contribution à la variation de l'action ne peut provenir que des termes de bord, comme le montre effectivement l'équation (1.47). Celle-ci peut encore s'écrire, en restaurant la dépendance explicite dans les  $2s$  degrés de liberté, et en utilisant la définition du hamiltonien et de l'impulsion,

$$dS = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \delta t \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_i p_i \delta q_i - H \delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.48)$$

Considérons une transformation qui ne met en jeu que les coordonnées  $q = q^{(2)}$  et l'instant  $t = t_2$  finals. De l'expression correspondante

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt \quad (1.49)$$

on voit alors immédiatement que les dérivées partielles de l'action par rapport aux coordonnées sont égales aux impulsions correspondantes :

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad (1.50)$$

et que la dérivée partielle de l'action par rapport au temps est égale à l'opposé du hamiltonien :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad (1.51)$$

Le fait que l'expression (1.49) doivent être une différentielle impose des contraintes sur les mouvements possibles. En particulier, les lois de l'optique géométrique peuvent s'établir de cette façon. On trouvera un exposé détaillé de ces techniques dans le Landau de théorie des champs, §53-55 [3].

#### exercice 1.14

En utilisant l'expression (1.49) pour calculer l'action et en considérant les coordonnées et les impulsions comme des variables indépendantes, montrer que le principe de moindre action conduit aux équations de Hamilton.

### 1.4.2 Théorème de Noether

Ce théorème constitue une conséquence importante de la formule (1.48) donnant la variation de l'action sous une transformation continue quelconque : à toute transformation générale continue qui laisse invariante l'action stationnaire correspond une constante du mouvement.

En effet si l'action est invariante sous la transformation infinitésimale (1.41), on en déduit que

$$p\delta q - H\delta t \quad (1.52)$$

est une constante du mouvement, et la généralisation pour toute transformation *continue* laissant l'action invariante est immédiate. Notons que le lagrangien lui-même n'est pas forcément invariant sous la transformation. On exige uniquement l'invariance de l'action.

#### exercice 1.15

1- En appliquant le théorème précédent, retrouver la loi de conservation de l'énergie pour un hamiltonien indépendant du temps.

2- En utilisant l'uniformité de l'espace pour un système fermé dans un référentiel galiléen, retrouver la conservation de l'impulsion.

2- En utilisant l'isotropie de l'espace pour un système fermé dans un référentiel galiléen, retrouver la conservation du moment cinétique.

Nous verrons sa généralisation aux systèmes comportant un nombre infini de degrés de liberté dans le chapitre 2. Ce théorème joue un rôle central en théorie quantique des champs car il permet, connaissant les symétries d'un système, de deviner la forme du lagrangien possédant une telle symétrie au niveau classique. Cette

symétrie peut éventuellement disparaître au niveau quantique, lorsque l'on quantifie le champ, laissant alors apparaître des anomalies.

### exercice 1.16

Montrer que la quantité conservée  $Q = \sum_i p_i \delta q_i - H \delta t$  est le générateur des transformations infinitésimales :

$$\{Q, q_j\} = -\bar{\delta} q_j \quad (1.53)$$

et

$$\{Q, p_j\} = -\bar{\delta} p_j . \quad (1.54)$$

### 1.4.3 Principe de Maupertuis

Nous avons vu que le principe de moindre action détermine complètement le mouvement d'un système mécanique. En résolvant les équations du mouvement, on obtient ainsi la relation entre les coordonnées et le temps. En particulier on peut obtenir la forme des trajectoires. Si l'on s'intéresse seulement à la détermination des trajectoires, il est possible de simplifier le principe de moindre action. Nous allons supposer dans ce qui suit que le lagrangien, et donc l'hamiltonien, *ne dépendent pas explicitement du temps*. Alors l'énergie du système se conserve

$$H(p, q) = E = cste . \quad (1.55)$$

Si l'on considère la variation de l'action pour des valeurs initiales et finale des coordonnées données et pour une valeur initiale donnée  $t_1$  du temps, avec un temps final  $t$  variable, on obtient, d'après l'équation (1.48),

$$\delta S = -H \delta t , \quad (1.56)$$

qui s'écrit encore, si l'on se restreint aux trajectoires satisfaisant à la conservation de l'énergie,

$$\delta S + E \delta t = 0 . \quad (1.57)$$

De même, la restriction aux trajectoires qui conservent l'énergie donne pour l'action l'expression

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E(t - t_1) \quad (1.58)$$

d'après l'expression générale (1.48) de la différentielle totale de l'action comme fonction des coordonnées et du temps à la limite supérieure de l'intégrale. En substituant l'expression précédente dans l'équation (1.57) il vient

$$\delta S_0 = 0 , \quad (1.59)$$

où l'action réduite est définie par

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i . \quad (1.60)$$

Ainsi nous pouvons énoncer le Principe de Maupertuis : l'action réduite possède un minimum sur l'ensemble des trajectoires satisfaisant à la conservation de l'énergie et passant par le point final donné à un instant arbitraire. Cet énoncé répond donc bien à la question initiale puisqu'il nous dit comment déterminer la trajectoire, indépendamment du mouvement effectif du système. Le problème se ramène finalement à trouver le minimum ne dépendant que des variables  $q$  et de leurs différentielles  $dq$ , avec l'énergie comme paramètre.

D'après la définition de  $p$ ,

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \left( q, \frac{dq}{dt} \right) . \quad (1.61)$$

La conservation de l'énergie s'écrit

$$E \left( q, \frac{dq}{dt} \right) = E , \quad (1.62)$$

d'où l'on tire l'expression de la différentielle  $dt$  en fonction de  $q$  et  $dq$ ,

$$dt = f(q, dq) . \quad (1.63)$$

De l'équation (1.61) on tire alors  $p = g(q, dq, E)$ , où  $E$  joue le rôle d'un paramètre. Examinons en particulier comment cette suite de transformations s'opère dans le cas du lagrangien d'un système de points matériels (1.10). Partant de

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q) , \quad (1.64)$$

on tire

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j a_{ij}(q) \dot{q}_j \quad (1.65)$$

et

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q) , \quad (1.66)$$

d'où

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{ij} a_{ij}(q) dq_i dq_j}{2(E - U)}} \quad (1.67)$$

et

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_{ij} a_{ij}(q) \frac{dq_j}{dt} dq_i . \quad (1.68)$$

Ceci permet donc d'écrire l'action réduite sous la forme

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i = \int \sqrt{2(E - U) \sum_{ij} a_{ij} dq_i dq_j}. \quad (1.69)$$

Prenons l'exemple d'un point matériel, dont la partie cinétique du lagrangien est donnée par l'expression (1.6)

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{dl}{dt} \right)^2, \quad (1.70)$$

où  $dl$  est l'élément de longueur sur la trajectoire. D'après l'équation (1.59),

$$\delta \int \sqrt{2m(E - U)} dl = 0, \quad (1.71)$$

l'intégrale étant prise entre deux points donnés de l'espace. Dans le cas du mouvement libre,  $U = 0$  donc l'équation (1.71) devient

$$\delta \int dl = 0, \quad (1.72)$$

c'est-à-dire que la particule suit le plus court chemin, qui est un segment de droite.

Si l'on revient à l'expression

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E(t - t_1) = S_0 - E(t - t_1), \quad (1.73)$$

et que l'on fait une variation du paramètre  $E$ , on obtient

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E} \delta E - (t - t_1) \delta E - E \delta t. \quad (1.74)$$

Or  $\delta S + E \delta t = 0$  donc

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_1. \quad (1.75)$$

En utilisant l'expression (1.69) on obtient donc

$$t - t_1 = \int \sqrt{\frac{\sum_{ij} a_{ij}(q) dq_i dq_j}{2(E - U)}}, \quad (1.76)$$

qui n'est autre que l'intégrale de l'expression (1.67) obtenue pour  $dt$ .

Ainsi nous avons obtenu non seulement la trajectoire du système, mais également la loi de son mouvement au cours du temps, puisque nous avons pu exprimer  $t$  comme fonction des positions du système au même instant.

## 1.5 Transformations canoniques

Les transformations

$$(q_1, q_2, \dots, q_s) \rightarrow (Q_1, Q_2, \dots, Q_s) \quad (1.77)$$

ne modifient pas les équations d'Euler-Lagrange. Plus généralement, les transformations, dites ponctuelles, du type  $Q_i = Q_i(q, t)$  laissent les équations du mouvement invariantes.

Elles laissent aussi les équations d'hamilton invariantes. En fait ces équations d'Hamilton ont une classe d'invariance beaucoup plus grande. Considérons donc une transformation du type

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(p, q, t) \\ P_i = P_i(p, q, t) \end{cases} . \quad (1.78)$$

A quelle condition cette transformation laisse-t-elle invariante la forme canonique des équations du mouvement ?

### 1.5.1 Fonction génératrice d'une transformation canonique

La condition s'exprime par le fait que  $Q_i$  et  $P_i$  doivent vérifier

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \end{cases} . \quad (1.79)$$

Or les équations d'Hamilton découlent du principe variationnel

$$\delta \int (\sum_i p_i dq_i - H dt) = 0, \quad (1.80)$$

d'après l'exercice (1.14). On doit donc également avoir

$$\delta \int (\sum_i P_i dQ_i - H' dt) = 0, \quad (1.81)$$

c'est-à-dire que les expressions sous le signe somme ne doivent différer que par une différentielle totale  $dF$  :

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF . \quad (1.82)$$

$F$  est la fonction génératrice de la transformation, dite *canonique*. De l'expression

$$dF = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H)dt \quad (1.83)$$

on tire

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \\ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{cases} \quad (1.84)$$

pour  $F = F(q, Q, t)$ . Si la transformation est écrite en terme de  $q, P, t$ , il suffit d'effectuer une transformation de Legendre :

$$d(F + \sum_i P_i Q_i) = \sum_i p_i dq_i + \sum_i Q_i dP_i + (H' - H) dt. \quad (1.85)$$

En posant  $\Phi(q, P, t) = F + \sum_i P_i Q_i$ , on obtient donc

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \\ H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases}. \quad (1.86)$$

Ces résultats appellent plusieurs remarques :

i) Si l'on prend  $\Phi = \sum_i f_i(q, t) P_i$ , on retrouve la classe des transformations ponctuelles  $Q_i = f_i(q, t)$ .

ii) Si la fonction génératrice ne dépend pas du temps, alors  $H' = H$ , donc il suffit de remplacer dans  $H$  les quantités  $p, q$  exprimées en fonction de  $P$  et  $Q$ .

iii) Considérons  $F = \sum_i q_i Q_i$ . Alors  $Q_i = p_i$  et  $P_i = -q_i$ . Cet exemple montre donc que la distinction coordonnées / impulsions est arbitraire. Mieux vaut donc parler pour  $(p_i, q_i)$  de grandeurs canoniquement conjuguées.

### 1.5.2 Condition en terme de crochets de Poisson

Montrons que condition pour que la transformation soit canonique peut s'écrire

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}, \quad (1.87)$$

pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ .

Avant de démontrer ce résultat, notons que le temps  $t$  joue le rôle d'un paramètre dans les transformations canoniques, donc il suffit pour démontrer le résultat de considérer  $f$  et  $g$  ne dépendant pas explicitement de  $t$ .

Considérons  $g$  comme une fonction de hamilton. Alors

$$\frac{df}{dt} = \{f, g\}_{p,q}. \quad (1.88)$$

$\frac{df}{dt}$  ne peut dépendre que des propriétés du mouvement, et non du choix de variables. Donc

$$\frac{df}{dt} = \{f, g\}_{P,Q}. \quad (1.89)$$

Ainsi  $\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}$ , ce qui prouve le résultat. Conséquence immédiate :

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\}_{p,q} = 0 \\ \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0 \\ \{P_i, Q_j\}_{p,q} = \delta_{ij} \end{cases} \quad (1.90)$$

On peut montrer que la variation de  $p$  et  $q$  lors du mouvement est une transformation canonique. En effet, notons  $q_t, p_t$  les coordonnées et les impulsions du système à l'instant  $t$ , et  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$  leur valeur à l'instant  $t + \tau$ . Alors la transformation

$$\begin{cases} q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau) \\ p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau) \end{cases} \quad (1.91)$$

est canonique. En effet, pour  $t$  et  $t + \tau$  donnés, la différentielle de l'action s'écrit

$$dS = \sum p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t. \quad (1.92)$$

En comparant avec

$$dF = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (1.93)$$

on constate que  $F = -S$  (et  $H = H'$ ) : on a bien effectué une transformation canonique, la fonction génératrice de la transformation étant l'action elle-même.

### 1.5.3 Théorème de Liouville

L'élément de volume de l'espace des phases  $d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$  est invariant sous les transformations canoniques.

Preuve : on veut montrer que  $\int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s$ . Or cette dernière intégrale peut encore s'écrire, par changement de variable,

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = \int \dots \int \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s. \quad (1.94)$$

En notant  $J$  le jacobien de la transformation précédente, il nous faut donc montrer que  $J = 1$ . Or

$$J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)} / \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)} // = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)} \Big|_{P=cste} / \frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \Big|_q$$

En écrivant la transformation canonique à l'aide de la fonction génératrice  $\Phi(q, P)$  on peut écrire

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k}. \quad (1.96)$$

Le déterminant de ces deux matrices est donc identique. Donc  $J = 1$ , ce qui prouve le résultat annoncé.

Remarque : comme nous avons vu que la variation de  $p$  et  $q$  au cours du temps est une transformation canonique, on déduit du théorème de Liouville que le volume d'une portion d'espace des phases que l'on suit dans son mouvement est constant.

Ce résultat se généralise à n'importe quelle  $p$ -forme définie sur des variétés  $p$ -dimensionnelles de l'espace des phases. Exemple :  $\int \int \sum_i dq_i dp_i$ .

# Chapitre 2

## Théorie classique des champs

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons examiner comment généraliser le formalisme de la mécanique analytique aux systèmes comportant un nombre infini de degrés de liberté. Un champ est un système possédant un nombre infini de degrés de liberté. C'est le cas par exemple de la mécanique des fluides ou encore de l'électromagnétisme. Dans la suite, nous allons nous intéresser aux théories des champs relativistes, pour lesquels le groupe de symétrie d'espace-temps sera le groupe de Poincaré. Notons cependant que la forme des équations du mouvement pour le champ, de même que l'écriture de la seconde variation de l'action, ne font pas explicitement intervenir le groupe de symétrie d'espace temps envisagé (groupe de Galilée pour la mécanique des fluides non relativistes par exemple). Le passage de la mécanique analytique à la théorie des champs consiste à remplacer les coordonnées  $q_i(t)$ , en nombre fini (indexées par  $i$ ) par une collection infinie de coordonnées, indexées par un paramètre qui pourra être discret (exemple : théorie des champs sur réseau) ou continu. Dans la suite, on supposera que ces coordonnées sont indexées par les coordonnées spatiales supposées continues, et pour simplifier les notations, on discutera le cas d'un champ scalaire, qui sera noté génériquement  $\phi(\vec{x}, t)$ . Dans le cas relativiste, notera  $\phi(x)$  ce champ. Bien entendu, le champ pourra être vectoriel, spinoriel, tensoriel... Les lois de transformation des tels champs sous le groupe de symétrie d'espace-temps seront discutées en détail dans les chapitres suivants.

### 2.2 Formulation lagrangienne

On se limitera dans tout ce qui suit aux théories des champs *locales*, pour lesquelles l'action pourra s'écrire sous la forme

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \tag{2.1}$$

où  $\mathcal{L}(x)$  est la densité lagrangienne qui sera supposée ne dépendre que d'un nombre *fini* de dérivées des champs (en pratique, en général  $\mathcal{L}(x)$  ne dépendra que des champs

et de leur dérivée première). Ceci interdit par définition la non localité : pour que  $\mathcal{L}(x)$  dépende de la valeur des champs au point  $y$  distinct de  $x$  il faudrait que l'on puisse reconstruire, par développement en série, le champ  $\phi(y)$  à partir de  $\phi(x)$  et de ses dérivées en  $x$ , ce qui bien sûr nécessite en général un nombre infini de dérivées.  $\mathcal{L}(x)$  sera donc de la forme

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_n \phi_i(x), x). \quad (2.2)$$

L'indice  $i$  permet d'étiqueter les champs de différente nature ou, si les champs ne sont pas scalaire, leur composantes (exemple :  $A_\mu(x)$  dans le cas de l'électromagnétisme). En général, on supposera que les champs s'annulent assez vite à l'infini, ce qui permet de se débarasser des termes de bord lors des manipulation habituelles basées sur des intégrations par partie (exception notable : théories topologiques).

### 2.3 Equations d'Euler-Lagrange

On note  $\Omega$  le volume d'espace temps sur lequel on intègre la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  pour obtenir l'action  $S$ . La méthode pour obtenir les équations du mouvement est exactement la même qu'en mécanique : on varie cette fois l'action sur une trajectoire, en effectuant la transformation

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x). \quad (2.3)$$

qui conduit à une variation de l'action de la forme

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi_i(x)} \delta\phi_i(x) + \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} \delta(\partial_\mu\phi_i(x)) \right]. \quad (2.4)$$

En intégrant par partie, on obtient donc

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} \right] \delta\phi_i(x) + \int_{\partial\Omega} \delta\phi_i(x) \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} d^3\sigma_\mu \quad (2.5)$$

où  $\partial\Omega$  est le bord de  $\Omega$  et  $d^3\sigma_\mu$  est l'élément d'intégration sur ce bord. Le dernier terme de l'équation précédente est nul par hypothèse de décroissance des champs à l'infini. L'action devant être stationnaire au voisinage des solutions des équations du mouvement (donc pour toute variation  $\delta\phi_i(x)$ ), on déduit de (2.5) que

$$\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} = 0 \quad (2.6)$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange pour les champs  $\phi_i(x)$ . Notons que l'ajout d'une divergence totale à la densité lagrangienne ne modifie pas l'action.

## 2.4 Les symétries globales

### 2.4.1 seconde variation de l'action

Le calcul de la seconde variation de l'action est à mettre en parallèle avec celui effectué en mécanique. De la même façon, ce calcul permet d'obtenir la variation de l'action sous une transformation quelconque des coordonnées d'espace-temps et des champs, que ces transformations soient ou non des symétries de l'action.

Considérons donc une transformation quelconque

$$\begin{aligned} x^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi'(x') &= \phi(x) + \delta\phi(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

qui est l'analogie de la transformation (1.41). On obtient alors la variation locale du champ

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\phi(x) &= \phi'(x) - \phi(x) \\ &= \phi(x - \delta x) + \delta\phi(x - \delta x) - \phi(x) \\ &= \delta\phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) + \dots (\text{termes d'ordre supérieur}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'action pour les champs solutions des équations du mouvement qui s'écrit, avant transformation,

$$S = \int_{\Omega} d^4\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) \quad (2.9)$$

devient donc

$$S' = \int_{\Omega'} d^4\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x), x) \quad (2.10)$$

où  $\Omega'$  est le transformé de  $\Omega$  par (2.7).  $S'$  s'écrit encore

$$S' = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x) + \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x), \quad (2.11)$$

ce qui donne, par développement de Taylor à l'ordre 1, et en négligeant les termes d'ordre 2,

$$S' = S + \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu \bar{\delta}\phi \right) + \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) + \dots \quad (2.12)$$

En intégrant par partie, on obtient alors

$$\begin{aligned} S' &= S + \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \right) \bar{\delta}\phi + \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \bar{\delta}\phi \right) \\ &\quad + \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le second terme s'annule puisque les champs satisfont les équations du mouvement. En intégrant le troisième terme, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} S' &= S + \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \bar{\delta}\phi + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) + \dots \\ &= S + \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu \phi \delta x^\nu + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

En utilisant (2.8), on obtient finalement

$$\delta S = \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - g^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right) + \dots,$$

où l'on a utilisé le fait que  $g^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu$  : voir chapitre 8).

### 2.4.2 théorème de Noether

Dans le cas particulier où les transformations considérées laissent invariante l'action, on obtient alors le théorème de Noether, qui énonce qu'à *tout groupe continu de symétrie de l'action est associé une quantité conservée*. Le courant conservé correspondant à cette symétrie s'écrit

$$j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - g^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \quad (2.15)$$

puisque d'après la relation (2.15),

$$\delta S = 0 = \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_\mu j^\mu = \int_\Omega d^4x \partial_\mu j^\mu$$

quelque soit  $\Omega$ , ce qui montre que le courant  $j^\mu$  est conservé :

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

La charge conservée correspondante s'écrit

$$Q = \int d^3x j^0(x). \quad (2.16)$$

En effet,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int d^3x \partial_0 j^0(x) = - \int d^3x \partial_i j^i(x) = 0$$

pour des champs rapidement décroissants à l'infini. On peut plus généralement définir la charge conservée par la relation

$$Q = \int_{N_3} d^3\sigma_\mu j^\mu(x), \quad (2.17)$$

où  $N_3$  est une 3-surface de genre espace.

Les transformations envisagées précédemment sont a priori globales (appelées encore *rigides*). Aucune hypothèse sur le caractère *local* de ces transformations n'est ici nécessaire. Le fait d'imposer une invariance de l'action sous les transformations locales est une exigence supplémentaire que l'on impose dans le cas des théories de jauge, ce qui fournit un principe dynamique pour construire le lagrangien (exemple : électromagnétisme, théories de Yang-Mills).

### 2.4.3 Applications

#### Invariance par translation

Si la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement de  $x^\mu$  (invariance par translation d'espace-temps), alors on peut considérer les transformations particulières

$$\begin{aligned}\delta x^\mu(x) &= \text{constante} = \delta x^\mu \\ \delta\phi &= 0.\end{aligned}\tag{2.18}$$

On en déduit que le courant

$$\left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta x^\nu\tag{2.19}$$

est conservé, pour tout  $\delta x^\nu$  constant arbitraire, c'est-à-dire que le tenseur

$$T^{\mu\nu} = \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right),\tag{2.20}$$

appelé tenseur canonique d'énergie-impulsion du champ, est conservé. Par analogie immédiate avec la définition de l'impulsion en mécanique analytique, l'impulsion du champ est définie par

$$\Pi = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\phi)}\tag{2.21}$$

d'où l'on déduit que

$$T^{0\nu} = \Pi \partial^\nu\phi - g^{0\nu}\mathcal{L}\tag{2.22}$$

et

$$T^{00} = \Pi \partial^0\phi - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H}.\tag{2.23}$$

ce qui permet d'interpréter la charge  $\int T^{00} d^3x$  comme l'énergie totale du champ. Ainsi

$$P^\nu = \int T^{0\nu} d^3x,\tag{2.24}$$

qui se transforme comme un quadrivecteur, peut être identifié au quadrivecteur énergie-impulsion totale du champ.

De façon plus générale, on dispose à présent d'une formule générale pour le courant conservé par une transformation laissant invariante l'action : en combinant (2.15) et (2.20) on obtient en effet

$$j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - T^{\mu\nu} \delta x_\nu.\tag{2.25}$$

### cas des lagrangiens indépendants des champs

Le cas des lagrangiens indépendants des champs présente un intérêt particulier. C'est le fait par exemple des champs de jauge, qui sont de masse nulle (on verra plus loin qu'un terme de masse dans le lagrangien briserait l'invariance de jauge ; les bosons massifs ne peuvent acquérir leur masse que par un mécanisme de brisure spontanée de symétrie d'un champ auxiliaire scalaire : c'est le mécanisme de Higgs).

Considérons par exemple le cas de QED en l'absence de matière. Le lagrangien correspondant s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.26)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.27)$$

Sous la transformation globale

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= 0 \\ \delta A^\mu(x) &= \text{constante} = \delta A^\mu, \end{aligned} \quad (2.28)$$

l'action du champ est laissée invariante, d'où l'on déduit la conservation du courant

$$j^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu$$

pour tout  $\delta A^\mu$  constant, ce qui conduit donc à la conservation de

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)}.$$

Le calcul de ce courant pour le lagrangien (2.26) est élémentaire en utilisant l'écriture

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu \quad (2.29)$$

qui mène immédiatement à

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}.$$

La conservation de ce courant s'écrit

$$\partial^\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.30)$$

ce qui constitue la forme covariante du premier couple d'équations de Maxwell dans le vide. Notons que la même équation s'obtient en écrivant l'équation du mouvement satisfaite par le champ  $A^\mu$ .

**invariance de Lorentz**

Si le lagrangien est invariant sous les transformations de Lorentz, alors on peut envisager (dans le cas des champs scalaires) la transformation

$$\begin{aligned}\delta x^\nu &= \omega^{\nu\mu} x_\mu \\ \delta\phi &= 0,\end{aligned}\tag{2.31}$$

qui laisse invariante l'action, pour tout tenseur infinitésimal  $\omega^{\nu\mu}$  antisymétrique. D'après le théorème de Noether, on peut donc immédiatement en déduire que le courant

$$\left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \omega_{\nu\rho} x^\rho\tag{2.32}$$

est conservé, ou encore, puisque  $\omega^{\nu\rho}$  est antisymétrique et en utilisant la définition du tenseur d'énergie-impulsion (2.20), que

$$(T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \omega^{\nu\rho}\tag{2.33}$$

est conservé, pour tout  $\omega^{\nu\rho}$ . On en tire finalement la conservation du tenseur de moment cinétique

$$J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}.\tag{2.34}$$

La charge correspondante s'écrit

$$J^{\nu\rho} = \int d^3x J^{0,\nu\rho} = \int d^3x (x^\nu T^{0\rho} - x^\rho T^{0\nu}).\tag{2.35}$$

C'est le moment angulaire total du champ, qui s'obtient bien, comme on pouvait s'y attendre, en intégrant la contribution en chaque point  $x$  du moment orbital. L'écriture explicite de la conservation de  $J^{\mu,\nu\rho}$  est instructive. En utilisant la conservation du tenseur  $T^{\mu\nu}$ , on obtient

$$\partial_\mu J^{\mu,\nu\rho} = \partial_\mu (x^\nu T^{\mu\rho}) - \partial_\mu (x^\rho T^{\mu\nu}) = g_\mu^\nu T^{\mu\rho} - g_\mu^\rho T^{\mu\nu}\tag{2.36}$$

soit encore

$$T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} = 0.\tag{2.37}$$

ce qui prouve que la conservation de  $J^{\mu,\nu\rho}$  a pour conséquence la symétrie de  $T^{\nu\rho}$ . Dans le cas général d'un champ qui n'est pas scalaire, la loi de transformation du champ sous le groupe de Lorentz  $\phi'(x') = \phi(x)$  doit être généralisée en  $\phi'_a(x') = S(\Lambda)_{ab}\phi_b(x)$  où  $S(\Lambda)$  est la matrice de la représentation considérée (spinorielle, vectorielle, ...), qui se réduit à l'identité dans le cas des champs scalaires. La structure du tenseur moment cinétique obtenu est alors de la forme

$$J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu\rho}\tag{2.38}$$

où  $\Delta^{\mu\nu\rho}$  est antisymétrique en  $\nu$  et  $\rho$ , et correspond à la contribution du moment cinétique intrinsèque, i.e du spin. Le tenseur canonique d'énergie-impulsion n'est alors plus symétrique dans le cas général d'un champ de spin arbitraire. Or le tenseur

d'énergie-impulsion n'est pas défini de manière univoque : de façon plus générale, le courant  $j^\mu$  associé à une symétrie continue de l'action peut être modifié sans changer la charge associée.

### exercice 2.1

Vérifier que le courant  $j^\mu = j^\mu + \partial_\rho X^{\rho\mu}$  (où  $X^{\rho\mu}$  est un tenseur antisymétrique fonction des champs et des coordonnées d'espace-temps, supposé s'annuler rapidement à grande distance) est également conservé, et que les charges associées à ces deux courants sont identiques.

Il est possible de préserver l'écriture (2.34) de la densité de moment cinétique du champ en fonction de la densité d'impulsion (uniquement valable pour un champ scalaire a priori), pour un champ de spin quelconque, en redéfinissant le tenseur énergie-impulsion. Le tenseur moment cinétique est alors également modifié, mais la relation entre ce tenseur modifié et la densité d'impulsion modifiée est la même que dans le cas scalaire. Il faut pour cela rendre le tenseur d'énergie-impulsion symétrique. (on a vu en effet plus haut que c'est une condition nécessaire à la conservation du tenseur moment cinétique correspondant). Le tenseur d'énergie-impulsion obtenu porte le nom de tenseur de Belinfante.

# Chapitre 3

## Symétries en Mécanique Quantique

### 3.1 Introduction

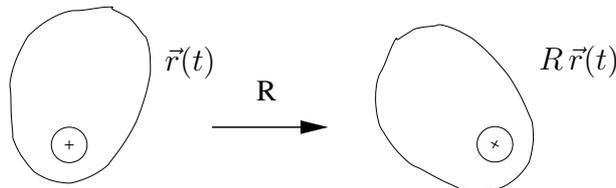
La première description du concept de symétrie due à Galilée. Dans “Dialogue sur les deux plus grands systèmes du monde, celui de Ptolémée et celui de Copernic” publié à Florence en 1632, il introduit cette notion en prenant comme exemple le mouvement d’un objet à l’intérieur d’un bateau. Il montre que le mouvement ne dépend pas du fait que le bateau est immobile ou bien en mouvement uniforme.

De façon moderne, il montre l’invariance des lois de la mécanique sous les transformations de Galilée  $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t$ . C’est le premier exemple d’une symétrie d’espace-temps.

Le lien entre les propriétés d’invariance et les lois de conservation a été formalisé beaucoup plus tard par E. Noether (1882-1935). Elle a montré comment exploiter les propriétés de symétrie dans le cadre Lagrangien : à une transformation de symétrie d’espace temps ou interne on peut associer des quantités conservées  $\vec{P}$ ,  $\vec{J}$ ,  $Q$ .

Ce théorème trouve son application aussi bien en physique classique qu’en physique quantique. Il existe cependant des différences considérables entre la mécanique classique et la mécanique quantique pour ce qui est du rôle joué par les symétries.

1) En mécanique classique les symétries des équations du mouvement permettent de construire de nouvelles solutions. Exemple : si les équations sont invariantes par rotation (cas du mouvement sous l’action d’une force centrale) et si  $\vec{r}(t)$  est une solution alors  $R\vec{r}(t)$  est encore solution



2) En mécanique quantique cette propriété reste vraie : si  $|\psi\rangle$  est solution,  $R|\psi\rangle$  est encore solution. La nouveauté par rapport au cas classique est le principe

de superposition qui n'a pas d'équivalent en mécanique classique. On peut ainsi considérer l'état  $|\psi\rangle + R|\psi\rangle$ . En particulier, l'état  $|\phi\rangle = \sum_R R|\psi\rangle$  est invariant par rotation :

$$R'|\psi\rangle = \sum_R R'R|\psi\rangle = \sum_{R''} R''|\psi\rangle = |\phi\rangle .$$

On obtient ainsi une représentation irréductible particulière du groupe des rotations (c'est la représentation scalaire). Wigner a montré qu'on pouvait considérer n'importe quel état comme une superposition d'états élémentaires se transformant selon une représentation irréductible du groupe de symétrie.

3) Les symétries discrètes  $P$ ,  $T$ , qui ne peuvent être obtenues continûment à partir de l'identité jouent un rôle essentiel (règles de sélection).

## 3.2 Description des états

Pour décrire un système physique en mécanique quantique on introduit un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . L'état du système est décrit par un vecteur  $\psi \in \mathcal{H}$  de norme unité, i.e vérifiant  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ .

A toute grandeur physique mesurable on associe un opérateur autoadjoint  $A$  (i.e. tel que  $A = A^+$ ).

$$\left[ \begin{array}{l} \text{rappel : opérateur linéaire : } A(\lambda|\psi\rangle + \mu|\phi\rangle) = \lambda A|\psi\rangle + \mu A|\phi\rangle \\ \text{adjoint d'un opérateur linéaire : } \langle \phi | A^+ \psi \rangle = \langle A\phi | \psi \rangle = \langle \psi | A\phi \rangle^* \end{array} \right.$$

L'élément de matrice  $\langle \psi | A \psi \rangle = \langle A \psi | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$  représente donc la valeur moyenne de cette grandeur physique dans l'état  $|\psi\rangle$ . La probabilité de transition  $W_{12}$  d'un état  $|\psi_1\rangle$  à un état  $|\psi_2\rangle$  est donnée par  $W_{12} = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2$ .

## 3.3 Lois de symétrie

Une opération de symétrie est une correspondance entre vecteurs d'états définis à une phase près qui conserve les probabilités de transition : la transformation  $S$

$$\begin{aligned} \omega_1 |\psi_1\rangle &\longrightarrow {}^S \omega_1 |{}^S \psi_1\rangle \\ \omega_2 |\psi_2\rangle &\longrightarrow {}^S \omega_2 |{}^S \psi_2\rangle , \end{aligned}$$

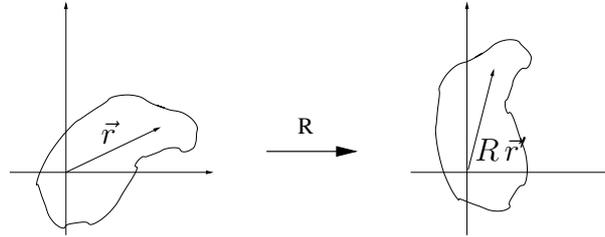
où  $|\omega_1| = |{}^S \omega_1| = |\omega_2| = |{}^S \omega_2| = 1$ , est telle que  $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = |\langle {}^S \psi_1 | {}^S \psi_2 \rangle|^2$ .

L'arbitraire de phase sur les vecteurs d'états sous-conduit à définir un **rayon**  $|\underline{\psi}\rangle$  comme l'ensemble des vecteurs d'états qui ne diffèrent entre eux que par une phase  $e^{i\alpha}$ .

Une symétrie  $S$  est donc une correspondance entre rayons satisfaisant la contrainte  $|\langle \underline{\psi}_1 | \underline{\psi}_2 \rangle|^2 = |\langle {}^S \underline{\psi}_1 | {}^S \underline{\psi}_2 \rangle|^2$ .

*Exemple :*

On considère une particule non relativiste de spin 0. Elle est décrite par sa fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$ . Considérons une rotation active du système



Dans une telle rotation la fonction d'onde se transforme selon

$${}^R\psi(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) \quad \text{où} \quad \vec{r}' = R\vec{r},$$

et l'on a donc

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{R} {}^R\psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}).$$

Une telle transformation satisfait manifestement à la conservation des probabilités de transition

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \int \psi_1^*(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ \langle {}^R\psi_1 | {}^R\psi_2 \rangle &= \int \psi_1^*(R^{-1}\vec{r}) \psi_2(R^{-1}\vec{r}) d^3\vec{r} \\ &= \int \psi_1^*(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) d^3\vec{r} = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle . \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, on a en fait un résultat plus fort, à savoir la conservation des amplitudes de transition elles-mêmes

$$\langle {}^R\psi_1 | {}^R\psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle .$$

Introduisons l'opérateur  $U(R) \in H$  (ensemble des opérateurs linéaires sur  $\mathcal{H}$ ) tel que  $U(R)|\psi\rangle = |{}^R\psi\rangle$ . Alors

$$\langle {}^R\psi | = \langle \psi | U^+(R) .$$

et l'on a donc

$$\langle \psi_1 | U^+(R) U(R) | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle .$$

$U(R)$  est donc un opérateur unitaire.

Toutefois, exiger de façon générale qu'à toute loi de symétrie soit associée un opérateur unitaire est une exigence beaucoup trop forte. On peut aussi se contenter de  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle {}^S\psi_1 | {}^S\psi_2 \rangle^*$ .

### 3.4 Théorème de Wigner

Soit  $S$  une transformation des rayons de  $\mathcal{H}$  qui conserve les probabilités de transition. Alors il existe un opérateur  $U(S)$  agissant sur  $\mathcal{H}$  qui

1) induit la transformation  $S$ . Ceci signifie que si  $|\psi\rangle$  est un représentant du rayon  $\underline{|\psi\rangle}$ , alors  $U(S)|\psi\rangle$  est un représentant du rayon  $|\underline{S\psi}\rangle$ .

2) cet opérateur est soit unitaire et linéaire :

$$U(S)(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1 U(S)|\psi_1\rangle + \lambda_2 U(S)|\psi_2\rangle$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle U(S)\psi_1 | U(S)\psi_2 \rangle$$

soit antiunitaire et antilinéaire

$$U(S)(\lambda|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1^* U(S)|\psi_1\rangle + \lambda_2^* U(S)|\psi_2\rangle$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle^* = \langle U(S)\psi_1 | U(S)\psi_2 \rangle$$

remarque : l'adjoint d'un opérateur  $A$  est défini par

$$\langle \psi_1 | A^+ \psi_2 \rangle = \langle A\psi_1 | \psi_2 \rangle .$$

Cette condition ne peut être vérifiée par un opérateur antilinéaire car le membre de droite serait linéaire en  $|\psi_1\rangle$  alors que le membre de gauche est antilinéaire en  $|\psi_1\rangle$ , d'où la définition  $\langle \psi_1 | A^+ \psi_2 \rangle = \langle A\psi_1 | \psi_2 \rangle^* = \langle \psi_2 | A\psi_1 \rangle$ .

Quelques remarques :

- $U(S)$  est défini à une phase globale près.
- Dans les deux cas,  $U(S)U^+(S) = U^+(S)U(S) = \mathbb{1}$ .
- La symétrie triviale  $\underline{|\psi\rangle} \rightarrow \underline{|\psi\rangle}$  est représentée par l'opérateur identité  $U = \mathbb{1}$ , qui est linéaire et unitaire. Par continuité toute symétrie qui peut être rendue triviale par changement continu de paramètres (ex : angle pour une rotation, distance pour une translation, vitesse pour une transformation de Lorentz pure) doit être représentée par un opérateur linéaire et unitaire.

Les symétries représentées par un opérateur antilinéaire et antiunitaire font intervenir le renversement du temps.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans le tome 1 du livre de S. Weinberg, chapitre 2, appendice A [4].

### 3.5 Conséquence du théorème de Wigner

Considérons un système physique qui admet un groupe de symétrie  $G$ . Soit  $g_1, g_2, \dots$  les éléments de  $G$ . D'après le théorème de Wigner à tout élément  $g \in G$  correspond un opérateur  $U(g)$  agissant sur  $\mathcal{H}$  qui est soit unitaire soit antiunitaire. Nous disposons donc de deux représentants du rayon  $|\underline{g_1 g_2 \psi}\rangle$  qui sont  $U(g_1)U(g_2)|\psi\rangle$  et  $U(g_1 g_2)|\psi\rangle$ . Ces deux représentants ne peuvent différer que par un facteur de

phase, donc  $U(g_1)U(g_2)|\psi\rangle = e^{i\varphi_\psi(g_1, g_2)}U(g_1, g_2)|\psi\rangle$ . En fait la phase  $\varphi_\psi(g_1, g_2)$  ne dépend pas (sauf exception due à une règle de supersélection) de l'état  $|\psi\rangle$ .

*Preuve:*

Soient  $|\psi_a\rangle, |\psi_b\rangle$  deux états qui ne sont pas proportionnels entre eux. Considérons l'état  $|\psi_{ab}\rangle = |\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle$ . Par linéarité (ou antilinéarité) de  $U$ ,

$$e^{i\varphi_{ab}}U(g_1g_2)(|\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle) = U(g_1)U(g_2)(|\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= U(g_1)U(g_2)|\psi_a\rangle + U(g_1)U(g_2)|\psi_b\rangle \\ &= e^{i\varphi_a}U(g_1g_2)|\psi_a\rangle + e^{i\varphi_b}U(g_1g_2)|\psi_b\rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Comme tout opérateur unitaire ou antiunitaire possède un inverse (son adjoint), lui-même unitaire ou antiunitaire, en multipliant l'équation précédente par  $U^{-1}(g_1g_2)$  on obtient

$$e^{\pm i\varphi_{ab}}(|\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle) = e^{\pm i\varphi_a}|\psi_a\rangle + e^{\pm i\varphi_b}|\psi_b\rangle$$

où le signe + (resp.-) correspond au cas linéaire (resp. antilinéaire). Comme  $|\psi_a\rangle$  et  $|\psi_b\rangle$  sont linéairement indépendants, on en déduit que  $e^{i\varphi_{ab}} = e^{i\varphi_a} = e^{i\varphi_b}$ .

Ainsi on peut écrire

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\varphi(g_1, g_2)}U(g_1g_2) \quad (3.3)$$

*Quelques remarques :*

- si  $\varphi = 0$ ,  $U(g)$  fournit par définition une représentation du groupe  $G$
- dans le cas général on parle de représentation à une phase près, ou représentation projective.

*Exemple:* particule chargée plongée dans un champ magnétique bidimensionnel  $\rightarrow$  représentation projective du groupe des translations (niveaux de Landau).

- la démonstration précédente est prise en défaut s'il n'est pas possible de préparer le système dans l'état  $|\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle$ . Par exemple on ne peut préparer un système à partir de la somme de deux états de moment angulaire total entier et demi-entier respectivement.

Il existe alors une règle de supersélection qui divise les états en différentes sous-classes. Les phases  $\varphi(g_1, g_2)$  peuvent alors dépendre de la classe sur laquelle  $U(g_1)U(g_2)$  et  $U(g_1g_2)$  agissent.

En fait, tout groupe de symétrie qui possède intrinsèquement des représentations projectives peut toujours être étendu (groupe de recouvrement) de façon à ce que ses représentations puissent être définies comme non projectives.

*Exemple:* voir plus loin le cas de  $SO(3)$  et  $SU(2)$ .



# Chapitre 4

## Groupes et algèbres de Lie

Nous avons vu dans le chapitre précédent le rôle particulier joué par les symétries en mécanique quantique. Nous proposons à présent de donner quelques éléments de théorie des groupes, utiles dans de nombreux domaines de la physique. Les groupes discrets jouent un rôle important dans de nombreux domaines de la physique (cristallographie par exemple), y compris en physique des hautes énergies (groupe de permutation et principe de Pauli). Les groupes continus ont cependant joué un rôle particulier dans l'histoire de la physique subatomique, et nous allons essentiellement nous limiter à leur étude dans ce chapitre. L'exposé sera loin d'être systématique, tant sur le plan de l'exhaustivité que de la rigueur mathématique. On pourra se référer aux ouvrages cités en référence pour plus de détail, en particulier à l'ouvrage de Barut et Raczká[5] qui est très exhaustif et rigoureux tout en étant accessible à un physicien.

### 4.1 Généralités

#### 4.1.1 Groupe continu, groupe de Lie, algèbre de Lie

$G$  est un groupe continu de dimension  $n$  si et seulement si

- il existe une correspondance bi-univoque entre  $G$  et un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  :  $g \in G \leftrightarrow \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ . *ex.* : rotation de  $\mathbb{R}^3$  caractérisée par un angle et un vecteur unitaire

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ , si  $g(\vec{\alpha}), g(\vec{\beta}) \in G$ ,  $g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta}) \in G$ . Il existe donc  $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n$  t.q.  $g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta}) = g(\vec{\gamma})$   $\vec{\gamma} = \phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ . Par hypothèse,  $\phi$  est une fonction **continue** de  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

- $g^{-1}(\vec{\alpha})$  peut s'écrire  $g(\vec{\alpha}')$  avec  $\vec{\alpha}' = f(\vec{\alpha})$  où par hypothèse  $f$  est fonction **continue** de  $\vec{\alpha}$

$G$  est un groupe de Lie si et seulement si  $G$  est un groupe continu pour lequel  $\phi$  et  $f$  sont analytiques. Pour simplifier les notations, on notera  $\alpha$  le vecteur  $\vec{\alpha}$ .

Notons que les définitions qui viennent d'être donnée ne sont pas les plus générales. On s'est en fait limité ici aux groupes linéaires. Pour un mathématicien, un groupe se définit sur une *variété*. Pour donner une image géométrique simple de cette notion, imaginons que le groupe considéré soit de dimension 2, et que sa variété soit la sphère  $S^2$ . Cela signifie qu'un élément donné du groupe et son voisinage peuvent être repérés de façon continue et bijective (on dira qu'il y a homéomorphisme) par une sous partie de  $\mathbb{R}^2$ . Ce voisinage et la bijection correspondante jouent le rôle d'une *carte* permettant de se repérer au voisinage d'un point de la sphère. Bien entendu, au voisinage d'un autre point de la sphère, il faudra utiliser une autre carte. L'ensemble des cartes constitue un atlas (c'est le même vocabulaire qu'en géographie!). Pour une groupe de Lie, les changements de cartes associées à la variété constituée par le groupe sont supposés analytiques. Dans de nombreux domaines de la physique, une telle définition est trop générale, et se limiter au cas où la variété est  $\mathbb{R}^n$  lui-même suffit (l'atlas est alors constitué d'une seule carte sur  $\mathbb{R}^n$  en entier, et on parle alors de groupe linéaire). Le lecteur attentif pourra cependant constater qu'une grande partie des résultats énoncés dans ce chapitre sont des résultats basés sur des propriétés *locales* des groupes de Lie, pour lesquelles le passage des groupes de Lie linéaires au cas général est uniquement un jeu d'écriture.

remarque :

un choix usuel pour l'application de  $\mathbb{R}^n$  sur  $G$  est de choisir que  $g(0) = e$  où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ , que l'on notera également 1 en utilisant une notation multiplicative pour la loi de groupe.

### 4.1.2 Générateurs

D'après la définition donnée ci-dessus d'un groupe de Lie, ayant fixé un élément de  $\mathbb{R}^n$  et l'élément correspondant du groupe, on peut effectuer un développement en série localement au voisinage de ce point de  $\mathbb{R}^n$  et donc de l'élément correspondant du groupe. A cause de la structure de groupe, il suffira de mettre en pratique cette idée au voisinage de l'identité. On pose donc

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^a T_a + O(\alpha^2). \quad (4.1)$$

Les  $T_a$  (au nombre de  $n$  puisque l'on peut différentier dans  $n$  directions possibles sur  $\mathbb{R}^n$ ) sont appelés *générateurs* du groupe. Avec cette définition, ils sont hermitiens si le groupe est unitaire, ce qui sera souvent le cas en physique.

### 4.1.3 Algèbre de Lie

Notons  $\vec{e}^a = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$  les vecteurs de base de  $\mathbb{R}^n$ , où le coefficient non nul est en  $a$ -ième position. Dans la limite où  $|t| \ll 1$ , considérons le produit

$$\begin{aligned} & g(\sqrt{t} \vec{e}^b) g(\sqrt{t} \vec{e}^a) g^{-1}(\sqrt{t} \vec{e}^b) g^{-1}(\sqrt{t} \vec{e}^a) \\ &= \left[ 1 + i\sqrt{t} T_b + O(t) \right] \left[ 1 + i\sqrt{t} T_a + O(t) \right] \left[ 1 - i\sqrt{t} T_b + O(t) \right] \left[ 1 - i\sqrt{t} T_a + O(t) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

où l'on a utilisé le fait que si  $g(\alpha) = 1 + i\alpha^a T_a + O(\alpha^2)$ , alors  $g^{-1}(\alpha) = 1 - i\alpha^a T_a + O(\alpha^2)$ .

A l'ordre  $t$ , le produit (4.2) est égal à  $1 + t(T_a T_b - T_b T_a)$ . Comme ce produit appartient lui-même au groupe  $G$ , il existe  $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n$  t.q.

$$g\left(\sqrt{t} \vec{e}^b\right) g\left(\sqrt{t} \vec{e}^a\right) g^{-1}\left(\sqrt{t} \vec{e}^b\right) g^{-1}\left(\sqrt{t} \vec{e}^a\right) = g(t\vec{\gamma})$$

En composant membre à membre, on obtient donc

$$1 + t(T_a T_b - T_b T_a) + o(t) = 1 + it\gamma^c T_c + o(t)$$

i.e.  $T_a T_b - T_b T_a = \gamma^c T_c$ . Le coefficient  $\gamma^c$  dépend de  $a$  et  $b$  : on le notera donc  $f_{ab}^c$ , d'où

$$\boxed{[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c} \quad (4.3)$$

Les coefficients  $f_{ab}^c$  sont appelés *constantes de structure du groupe*.

**L'ensemble des générateurs  $T_a$ , muni du commutateur  $[\cdot, \cdot]$  qui joue le rôle d'un produit, forme une  $\mathbb{R}$ -algèbre, appelée algèbre de Lie du groupe.**

### Identité de Jacobi

On déduit immédiatement de la définition (4.3), en utilisant les propriétés d'antisymétrie du commutateur, que

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0$$

i.e., en terme des constantes de structure du groupe :

$$f_{bc}^e f_{ae}^d + f_{ca}^e f_{be}^d + f_{ab}^e f_{ce}^d = 0$$

*Remarques :*

- d'après la définition (4.3),  $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$

- contrairement au nom "constante de structure", les  $f_{ab}^c$  ne sont pas des constantes : elles dépendent de la base  $T_1, \dots, T_n$  choisie pour l'algèbre  $g$ . Soient  $X, Y \in g$  avec  $X = \alpha^a T_a$  et  $Y = \beta^b T_b$

↑ ↑

coord. vecteur de base

Posons  $Z = [X, Y]$ . Alors  $Z = [\alpha^a T_a, \beta^b T_b] = \alpha^a \beta^b i f_{ab}^c T_c = \gamma^c T_c$ , d'où  $\gamma^c = i f_{ab}^c \alpha^a \beta^b$ .

$\left. \begin{array}{l} \alpha^a : \text{coordonnée} = \text{vecteur contravariant} \\ T_a : \text{vecteur de base} = \text{vecteur covariant} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{se transforment par changement de base} \\ \text{(voir plus loin l'exemple du groupe de} \\ \text{Lorentz pour la notion de calcul covariant)} \end{array}$

#### 4.1.4 Quelques définitions utiles

Nous présentons ici quelques structures qui seront utiles dans la suite, en particulier pour comprendre l'importance de la compacité discutée plus loin.

##### Algèbre de Lie réelle :

$\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $g$  de dimension  $n$  ( $n \geq 1$ ) muni d'un produit bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.  $[\cdot, \cdot]$  doit donc vérifier :

- 1)  $[a, b] \in g \quad \forall a, b \in g$
- 2)  $\forall (a, b, c) \in g^3, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad [\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c]$
- 3)  $[a, b] = -[b, a] \quad \forall (a, b) \in g^2$
- 4) identité de Jacobi :  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

On parle alors d'algèbre de Lie abstraite, puisqu'il n'est pas nécessaire de la construire à partir d'un groupe de Lie.

**Théorème :** toute algèbre de Lie abstraite est isomorphe à une algèbre de Lie de matrices dont le crochet de Lie est défini par le crochet de Lie usuel  $[a, b] = ab - ba$ . La théorie des algèbres de Lie abstraite ne fait donc pas apparaître de nouvelles structures.

##### Algèbre de Lie complexe :

$\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $g$  de dimension  $n$  ( $n \geq 1$ ) muni d'un produit bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.

Cela signifie que dans le point 2) de la définition d'une algèbre de Lie réelle, il faut maintenant considérer  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ .

*Conséquence :* les constantes de structure peuvent maintenant être complexes.

exemple de  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie :  $SO(3)$  et  $SU(2)$  ont pour algèbre de Lie  $su(2)$  :

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$$

*Remarques :*

- autres notations, utilisées en particulier en mathématiques :

$$X_a = \frac{\partial}{\partial t_a} X(0, \dots, t_a, \dots, 0) \Big|_{t_a=0} = iT_a$$

$$[X_a, X_b] = [iT_a, iT_b] = C_{ab}^c T_c = C_{ab}^c iT_c \quad \text{donc } f_{ab}^c = -C_{ab}^c$$

donc

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c \xleftrightarrow{X_a = iT_a} [T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c, \text{ avec } f_{ab}^c = -C_{ab}^c.$$

Les  $T_a$  sont des générateurs hermitiens pour un groupe unitaire

De manière équivalente, on peut définir une algèbre de Lie comme l'espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) engendré par les  $X_a$ .

• **lexique** : lorsque l'on ne précise pas le corps de l'algèbre de Lie considérée, il est sous-entendu que l'on considère la  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie.

### Extension complexe $g^c$ d'une algèbre de Lie $g$ :

1)  $g^c$  est l'extension complexe de l'espace vectoriel  $g$ , i.e. formée des éléments  $z = x + iy$  pour  $x, y \in g$

2) Le crochet de lie dans  $g^c$  est

$$\begin{aligned} Z &= [Z_1, Z_2] = [X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] \\ &= [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i[X_1, Y_2] + i[Y_1, X_2] \\ &\equiv X + iY \end{aligned}$$

$g$ , algèbre de Lie **complexe** de dimension  $\mathbf{n}$ , de base  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , peut être considérée comme une algèbre de Lie **réelle** de dimension  $\mathbf{2n}$ , de base  $\{X_1, iX_1, \dots, X_n, iX_n\}$ . On note cette algèbre de Lie  $g^R$ .

### Forme réelle $g^r$ d'une algèbre de Lie $g^c$ :

algèbre de lie dont l'extension complexe est  $g^c$  ( $g^r$  et  $g^c$  ont même dimension, l'une par rapport à  $\mathbb{R}$ , l'autre par rapport à  $\mathbb{C}$ ). Une algèbre de lie sur  $\mathbb{C}$  possède de nombreuses formes réelles!

On se servira un peu plus loin de cette liberté, en particulier pour la notion de compacité.

*Remarque* : dans le cas où l'on considère l'algèbre de Lie sur  $\mathbb{R}$ , le changement  $X_a \leftrightarrow iT_a$  consiste simplement à prendre deux formes réelles de la même algèbre de Lie sur  $\mathbb{C}$ . Ceci n'a aucun effet sur la structure (en particulier cela ne change pas la compacité : voir plus loin cette notion).

## 4.2 Quelques résultats sur les groupes et algèbres de Lie

### 4.2.1 Lien entre groupe de Lie et algèbre de Lie correspondante

Nous avons construit la notion d'algèbre de Lie comme un espace tangent au groupe. réciproquement, on peut se demander si l'on peut reconstruire tout ou partie du groupe connaissant son algèbre de Lie. Nous allons successivement examiner cette question localement puis globalement.

#### Sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie

C'est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie  $G$  constitué des éléments  $T(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$  variant entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , t.q.  $\forall s, t, T(s)T(t) = T(s+t)$ .

$T(t)T(s) = T(s)T(t)$  donc tout sous-groupe à un paramètre est abélien

*Exemple:*  $SO(3)$  Considérons les matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Posons  $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $a_1^{2k+1} = (-1)^k a_1$  et  $a_1^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
donc  $A(t) = \exp t a_1$

Ce résultat est général :

#### **Théorème :**

Tout sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie  $G$  formé de matrices  $n \times n$  s'obtient par exponentiation de matrices  $n \times n$  :  $A(t) = \exp t \dot{A}(0)$ .

*Preuve :* soit  $B(t) = A(t) \exp[-t \dot{A}(0)]$

Alors  $\dot{B}(t) = (\dot{A}(t) - A(t) \dot{A}(0)) \exp[-t \dot{A}(0)]$  Or

$$\dot{A}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A(t+s) - A(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} A(t) \frac{A(s) - A(0)}{s} = A(t) \dot{A}(0)$$

Ainsi  $\forall t, \dot{B}(t) = 0$ , et donc  $B(t) = B(0) = 1$ , d'où  $A(t) = \exp t \dot{A}(0)$ .

#### Relation entre l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie $G$ et ses

**sous-groupes à un paramètre :****Théorème :**

$\forall a \in g, A(t) = \exp t a$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) forme un sous-groupe à un paramètre de  $G$ .

**Théorème :**

Tout élément d'un groupe de Lie  $G$  dans un petit voisinage de l'identité appartient à un sous-groupe à un paramètre de  $G$ . Cela signifie que tout élément de  $G$  peut s'écrire comme l'exponentielle d'un élément de son algèbre de Lie. Cette correspondance est bi-univoque.

Les théorèmes suivants permettent d'étendre le résultat à l'ensemble du sous-groupe connexe de  $G$  (problème **global**).

**composante connexe d'un groupe de Lie  $G$  :**

C'est l'ensemble des éléments du groupe qui peuvent être obtenus l'un de l'autre par variation continue de ses paramètres.

**Théorème :**

La composante connexe  $H$  de  $G$  qui contient l'identité est un sous-groupe invariant de  $G$ , i.e.  $\forall A \in H, \forall X \in G, XAX^{-1} \in H$ . On l'appelle souvent le sous-groupe connexe de  $G$ .

Venons en maintenant au problème **global** :

**Théorème :**

Si  $G$  est un groupe de Lie compact, tout élément  $X$  de son sous-groupe connexe s'écrit sous la forme  $X = \exp a$  où  $a \in g$ . En particulier si  $G$  est compact et connexe, tout élément de  $G$  est l'exponentielle d'un élément de  $g$ .

*Remarque :* la correspondance n'est pas forcément bi-univoque : on peut avoir  $e^a = e^b$  pour  $a \neq b$ .

*Exemple :* pour  $\text{SO}(3)$ ,  $\exp(\theta a_1) = \exp[(\theta + 2\pi n)a_1]$  pour  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

**Théorème :**

Tout élément du sous-groupe connexe d'un groupe de Lie  $G$  peut s'écrire comme le produit **fini** d'exponentielles de son algèbre de Lie réelle  $g$ .

*Exemple :* groupe de Lorentz restreint  $L_+^\uparrow$ .

### 4.2.2 Structure des algèbres de Lie et groupes de Lie ; caractérisation de Cartan

Commençons par donner quelques définitions et propriétés concernant les structures des groupes et algèbres de Lie.

**groupe abélien** :  $\forall X_1, X_2 \in G, X_1X_2 = X_2X_1$

**algèbre de Lie abélienne** :  $\forall a, b \in g, [a, b] = 0$

**sous-algèbre de Lie  $g'$  d'une algèbre de Lie  $g$  :**

sous-ensemble de  $g$ , de base  $e_1, \dots, e_k$ , muni du même crochet de Lie et formant lui-même une algèbre :  $c_{ij}^s = 0, i, j \leq k, s > k$ .  $g'$  est dite propre si au moins un élément de  $g \notin g'$ , i.e.  $\dim g' < \dim g$

**sous-algèbre invariante  $g'$  d'une algèbre  $g$  :** (ou idéal)

$\forall a \in g'$  et  $\forall b \in g, [a, b] \in g'$ , soit encore  $c_{ij}^s = 0, i \leq k, s > k, j$  quelconque

**Théorème :**

Si  $G$  et  $G'$  sont deux groupes de Lie et  $g$  et  $g'$  leurs algèbres de Lie correspondantes, et si  $G'$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $g'$  est une sous-algèbre de  $g$ .

Si  $G'$  est un sous-groupe invariant de  $G$ , alors  $g'$  est une sous-algèbre invariante de  $g$ .

*Preuve :*

Soient  $b$  un vecteur tangent à la courbe analytique  $B(t)$  de  $G$  et  $a'$  un vecteur tangent à la courbe analytique  $A(t)$  de  $G'$ .

Alors  $[a', b]$  est tangent à la courbe  $C(t) = A(\sqrt{t})B(\sqrt{t})A(\sqrt{t})^{-1}B(\sqrt{t})^{-1}$ . Comme  $G'$  est un sous-groupe invariant,  $B(\sqrt{t})A(\sqrt{t})^{-1}B(\sqrt{t})^{-1} \in G'$ , et donc  $C(t)$  est une courbe analytique de  $G'$ . Ceci prouve que  $[a', b]$  est tangent à une courbe analytique de  $G'$ , et donc que  $[a', b] \in G'$ .

**Théorème :**

Soit  $g$  l'algèbre de Lie réelle correspondant au groupe de Lie linéaire  $G$ . Alors chaque sous-algèbre de  $g$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie connexe de  $G$ .

**algèbre de Lie simple** :  $g$  est dite simple si elle n'est pas abélienne et ne possède pas de sous-algèbre de Lie propre invariante.

**algèbre de Lie semi-simple** :  $g$  est dite semi-simple si elle ne possède pas de sous-algèbre de Lie abélienne invariante.

**groupe de Lie simple :** il ne possède pas de sous-groupe connexe de Lie propre invariant.  $G$  peut donc posséder des sous-groupes discrets invariants (par définition  $H$  est discret si et seulement si  $H$  est un groupe fini ou si  $H$  possède un nombre infini dénombrable d'éléments entourés chacun d'un voisinage sans éléments dans  $H$ ).

*Exemple :*  $SU(N)$

L'élément  $g = e \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$  appartient à  $SU(N)$ .  $g$  engendre un sous-groupe discret cyclique invariant d'ordre  $N$ ,  $Z_N$ .

**groupe de Lie semi-simple :** il ne possède pas de sous-groupe de Lie abélien propre connexe et invariant.

*Exemples :*

- Le groupe de Poincaré n'est pas semi-simple, puisque le sous-groupe des translations est invariant

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\rho] &= 0 \\ [P_\rho, J_{\mu\nu}] &= i(g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu) \end{aligned}$$

- $SO(3)$  est simple
- $SO(4) = SO(3) \times SO(3)$  est semi-simple.

Nous allons maintenant présenter une caractérisation, due à Cartan, des algèbres de Lie semi-simples.

### Tenseur de Cartan-Killing

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= C_{\rho\alpha}^\beta C_{\sigma\beta}^\alpha \\ & (= -f_{\rho\alpha}^\beta f_{\sigma\beta}^\alpha) \end{aligned}$$

Notons que ce tenseur est égal à  $Tr(adX_\rho adX_\sigma)$  en terme de la représentation adjointe définie plus loin par  $\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow adX \\ adX(Y) = [X, Y] \end{array} \right.$

**Théorème :** (Cartan) Une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si  $\det g \neq 0$  (cf Barut p. 15-16).

*Preuve* de  $\det g \neq 0 \Rightarrow$  algèbre de Lie semi-simple :

Montrons que si  $H$  est une sous-algèbre abélienne invariante de  $L$  alors  $\det g = 0$ .

On indexe par un indice latin  $i, j, \dots \leq p$  les éléments de  $H$

$$\begin{aligned} g_{\alpha i} &= C_{\alpha\beta}^i C_{i\gamma}^\beta \\ C_{i\gamma}^\beta &= 0 \text{ si } \beta > p \text{ donc } g_{\alpha i} = C_{\alpha j}^\gamma C_{i\gamma}^j \\ C_{\alpha j}^\gamma &= 0 \text{ si } \gamma > p \text{ donc } g_{\alpha i} = C_{\alpha j}^k C_{ik}^j \end{aligned}$$

Comme  $H$  est abélienne,  $C_{ik}^j = 0$  donc  $\forall i, \forall j \leq p, g_{\alpha i} = 0$ . D'où  $\det g = 0$ .

$g$  permet de définir un calcul covariant. Ainsi  $C_{\rho\sigma\tau} = g_{\alpha\tau} C_{\rho\sigma}^\alpha$ .

### 4.2.3 Algèbre de Lie compacte

**Définition :** Une algèbre de Lie  $L$  est dite compacte s'il existe sur  $L$  une forme quadratique  $(\ , \ )$  définie positive qui satisfait  $([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = 0$ .

La forme de Cartan-Killing  $(X, Y) = \text{Tr}(adX \ adY) = g_{\ell s} x^\ell y^s$  ( $X = x^\ell X_\ell$ ,  $Y = y^s X_s$ ) satisfait cette condition.

**Ainsi, si le tenseur  $g$  de Cartan-Killing d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  semi-simple est positive (ou négative) définie, alors  $L$  est compacte.**

**Théorème :** L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact (au sens topologique) est compacte. (cf Barut 3-8 (p 109)) (**rappel :** sur  $\mathbb{R}^n$  un compact est un fermé borné).

De façon générale, une forme quadratique définie sur une algèbre de Lie complexe est indéfinie. Donc (puisque c'est le cas en particulier pour la forme associée à  $g$ ), toute algèbre de Lie complexe est non compacte.

#### exercice 4.1

On considère les transformations  $E_2$  du plan euclidien dans lui-même

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b \end{cases}$$

Introduisant le vecteur  $X = (x, y, 1)$ , on a  $X' = MX$  où  $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & a \\ \sin \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que les générateurs s'écrivent

$$X_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et qu'il vérifient

$$\begin{cases} [X_\theta, X_a] = X_b \\ [X_\theta, X_b] = -X_a \\ [X_a, X_b] = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et que  $E_2$  n'est pas semi-simple.

#### exercice 4.2

Montrer que  $C = g^{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma$  est un opérateur de Casimir, c'est-à-dire qu'il commute avec tous les éléments de l'algèbre de Lie

## 4.2. QUELQUES RÉSULTATS SUR LES GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE 47

$$\begin{aligned}
 [C, X_\tau] &= g^{\rho\sigma} [X_\rho X_\sigma, X_\tau] = g^{\rho\sigma} X_\rho [X_\sigma, X_\tau] + g^{\rho\sigma} [X_\rho, X_\tau] X_\sigma \\
 &= g^{\rho\sigma} X_\rho C_{\sigma\tau}^\lambda X_\lambda + g^{\rho\sigma} C_{\rho\tau}^\lambda X_\lambda X_\sigma = g^{\rho\sigma} C_{\sigma\tau}^\lambda X_\rho X_\lambda + g^{\sigma\rho} C_{\sigma\tau}^\lambda X_\lambda X_\rho \\
 &= g^{\rho\sigma} C_{\sigma\tau}^\lambda (X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho) = g^{\rho\sigma} \underbrace{g^{\lambda\nu} C_{\nu\sigma\tau}}_{\text{antisymétrique en } \rho, \lambda} \underbrace{(X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho)}_{\text{symétrique en } \rho, \lambda} = 0
 \end{aligned}$$

Une algèbre de Lie compacte est une forme réelle particulière  $L^r$  d'une algèbre de Lie complexe.

**Théorème :**

Pour une algèbre de Lie compacte semi-simple,  $C_{rs}^\ell$  peut être représenté par un tenseur d'ordre 3 covariant, complètement antisymétrique.

*Preuve :*

$$\begin{aligned}
 C_{rs\ell} &= C_{rs}^t g_{t\ell} \\
 &= C_{rs}^t C_{tm}^n C_{\ell n}^m = -C_{sm}^t C_{tr}^n C_{\ell n}^m - C_{mr}^t C_{ts}^n C_{\ell n}^m \\
 &= C_{sm}^t C_{rt}^n C_{\ell n}^m + C_{mr}^t C_{ts}^n C_{\ell n}^m
 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est invariante sous les permutations circulaires, et antisymétrique en  $r, s$ . Donc  $C_{rs\ell}$  est complètement antisymétrique.

D'autre part, puisque  $L$  est compacte, il est toujours possible par changement de base d'écrire  $g_{t\ell} = \delta_{t\ell}$  (en effet  $g$  est symétrique, réelle et définie positive), et donc  $C_{rs\ell} = C_{rs}^\ell$ .

Dans le cas plus général d'une algèbre de lie semi-simple complexe quelconque, par une transformation réelle orthogonale on peut toujours diagonaliser  $g$ , qui a des valeurs propres non nulles. Il suffit ensuite de multiplier tous les générateurs qui correspondent dans cette base à des éléments diagonaux de  $g$  négatifs par  $i$  pour obtenir  $g$  sous la forme  $g_{t\ell} = \delta_{t\ell}$ . Ceci correspond à prendre une forme réelle particulière de l'algèbre de Lie initiale.

*Exemple :*  $O(3,1) \rightarrow O(4)$

figure  
 hyperboloïde à 3 + 1 dimensions                      ellipsoïde à 4 dimensions

Le chapitre 8 sera consacré à l'étude détaillée du **groupe de Lorentz**. En particulier, nous construirons son algèbre de Lie. Elle est constituée de 6 générateurs :

$J_1, J_2, J_3$             générateurs des rotations

$K_1, K_2, K_3$             générateurs des boosts

qui satisfont les relations de commutation  $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k \end{aligned}$$

Cette  $\mathbb{R}$ -algèbre est non compacte. Ceci est directement relié au fait que le groupe de Lorentz est non compact : les rapidités  $\phi$  qui codent les boosts  $e^{\phi\vec{n}\cdot\vec{k}}$  suivant l'axe  $\vec{n}$  varient de  $-\infty$  à  $+\infty$ , qui est un domaine non compact de  $\mathbb{R}$ .

On pose

$$\left. \begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{J} + i\vec{K}) \\ \vec{N} &= \frac{1}{2} (\vec{J} - i\vec{K}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{avec } \vec{M} \text{ et } \vec{N} \text{ on construit une algèbre de Lie sur } \mathbb{R}. \\ \text{C'est une } \mathbf{\text{forme réelle compacte}} \text{ de même} \\ \text{extension complexe que } \text{SO}(3,1) \end{array}$$

L'algèbre de Lie ainsi obtenue satisfait les relations de commutation suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k \\ [N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}N_k \\ [M_i, N_j] = 0 \end{array} \right.$$

C'est l'algèbre de Lie de  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ . La construction des représentations correspondantes est alors standard (voir chapitres 5, 6 et 9).

**Résumé :**

groupe $\text{SO}(3,1) \rightarrow$ algèbre $\text{so}(3,1)$ :	• non compacte	
(sur $\mathbb{R}$ )	• possède des représentations projectives	$\searrow$ complexification
		$\text{so}(4, \mathbb{C})$
algèbre $\text{su}(2) \times \text{su}(2)$ (sur $\mathbb{R}$ )	• compacte	$\nearrow$ complexification
	• ne possède que des vraies représentations	

Nous espérons avoir convaincu le lecteur sur cet exemple que l'introduction de notions aussi complexes (dans tous les sens du terme) est pertinente physiquement !

La compacité est donc un outil puissant :

- elle permet d'obtenir **toute** la composante connexe de l'identité d'un groupe à partir de l'exponentielle de son algèbre de Lie (dans le cas général on a seulement accès à un voisinage de l'identité)
- l'étude des représentations des groupes compacts est beaucoup plus simple (voir plus loin)

En outre, tous les résultats classiques valables pour les groupes finis (application à la cristallographie par exemple) s'étendent sans difficulté aux groupes compacts. En effet, la somme sur les éléments d'un groupe fini peut être remplacée par une

intégrale : pour tout groupe  $G$  compact, il existe une **mesure** de Haar unique t.q.

$$1) \forall f \text{ continue sur } G, \forall h \in G, \int_G f(g)dg = \int_G f(hg)dg = \int_G f(gh)dg$$

$$2) \int_G dg = 1 : \text{le volume du groupe est fini}$$

**Les théories de jauge non abéliennes sont basées sur les groupes compacts.**

#### 4.2.4 Classification

**Théorème :**  $\forall g, g = \oplus$  générateurs abéliens  $\oplus$  sous-algèbres simples

Les algèbres de Lie simples complexes sont complètement classifiées (Killing, Cartan). Nous illustrons cette classification à l'aide de quelque groupes de Lie classiques.

• **Transformations unitaires :**  $U(N)$  et  $SU(N)$

Soient  $\xi$  et  $\eta \in \mathbb{C}^N$  qui se transforment sous l'action de matrices complexes  $N \times N$  (notées  $GL(N, \mathbb{C})$ ) suivant

$$\eta^a \rightarrow \eta'^a = U^a_b \eta^b$$

$$\xi^a \rightarrow \xi'^a = U^a_b \xi^b$$

$$\begin{array}{c} \text{matrice} \\ \uparrow \\ U^a_b = (U)_{ab} \quad ({}^tU)_{ab} = U^b_a \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{notation} \\ \text{covariante} \end{array}$$

Par définition,  $U(N)$  est l'ensemble des matrices qui laissent invariant  $\bar{\eta}^a \xi^a (= {}^t \bar{\eta} \xi)$ .

Sous l'action d'une matrice de  $U(N)$ ,  $\bar{\eta}^a \xi^a$  devient  $\bar{\eta}'^a \xi'^a = \bar{U}^a_b \bar{\eta}^b U^a_c \xi^c = \bar{\eta}^a \xi^a$  donc  $\bar{U}^a_b U^a_c = \delta^a_c$  soit encore  ${}^t \bar{U}^b_a U^a_c = \delta^b_c$ , ce qui signifie matriciellement que  ${}^t \bar{U} U = \mathbb{1}$  i.e.  $U^+ U = 1$ . On montre de la même façon que  $U U^+ = 1$ .

*Remarque :* il n'est bien sûr pas indispensable d'utiliser les notations covariantes pour ce calcul élémentaire. Le seul intérêt est ici de se familiariser avec ces manipulations, utiles pour l'étude générale des représentations irréductibles de  $SU(N)$  à l'aide des tableaux de Young. Nous verrons en détail dans le chapitre 6 le cas particulier des spineurs de  $SU(2)$ , qui présentent un grand intérêt en physique quantique.

L'algèbre de Lie de  $U(N)$  s'obtient aisément en écrivant la condition d'unitarité sous la forme  $(1 + iT_a)(1 - iT_a^+) \approx 1 + i(T_a - T_a^+)$  qui conduit donc à  $T_a = T_a^+$  :

les **générateurs de  $U(N)$**  sont donc formés des **matrices hermitiennes**, au nombre de  $N^2$ .

Les transformations particulières  $\xi^a \rightarrow e^{i\alpha}\xi^a$  appartiennent à  $U(N)$ , et correspondent au sous-groupe  $U(1)$ , de générateur

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{N \times N}.$$

On se ramène à un groupe **simple**, en imposant que les générateurs soient orthogonaux à  $\mathbb{1}_{N \times N}$ , i.e.  $\delta_{bc}(T_a)_{bc} = 0$  soit  $(T_a)_{bb} = 0$  ou encore  $Tr T_a = 0$ .

Ceci définit l'algèbre de Lie de  $SU(N)$ , qui est formée de  $N^2 - 1$  générateurs (voir ci-dessous).

*Remarque :* à la condition  $Tr T_a = 0$  au niveau de l'algèbre correspond la condition  $\det U = 1$  pour le groupe. Pour  $U(N)$ ,  $U^+U = 1$  conduit à  $(\det U)^2 = 1$  donc  $\det U = \pm 1$ .

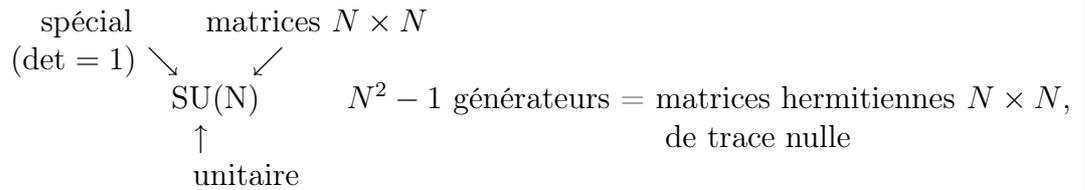
Nombre de générateurs :

$$\left. \begin{array}{l} N \text{ coefficients réels diagonaux} \\ \frac{N(N-1)}{2} \text{ coefficients non diagonaux complexes} \end{array} \right\} \Rightarrow N + 2 \frac{N(N-1)}{2} = N^2 \text{ paramètres,}$$

ce qui donne le nombre de générateurs de  $U(N)$ ,

Pour  $SU(N)$ , la condition supplémentaire  $\det U = 1$ , qui est équivalente à  $Tr T = 0$ , correspond donc à un paramètre en moins, ce qui laisse finalement  $N^2 - 1$  paramètres réels.

### Résumé



La  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie correspondant à l'extension complexe de la  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie que nous venons de construire est ainsi constituée des matrices complexes  $N \times N$  de trace nulle. Elle est notée  $sl(N, \mathbb{C})$  ou encore  $A_{N-1}$ . C'est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie  $gl(N, \mathbb{C})$  constituée des matrices complexes  $N \times N$ .

### • Transformations orthogonales : $O(N)$ et $SO(N)$

Soient  $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ .

Par définition,  $O(N)$  est l'ensemble des matrices réelles  $A$  qui laissent invariant  $\eta^a \xi^a$  ( $= {}^t \eta \xi$ )

## 4.2. QUELQUES RÉSULTATS SUR LES GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE 51

Ceci s'écrit  $\rightarrow^t AA = A^t A = 1$ , c'est-à-dire, au niveau de l'algèbre de Lie,  $T^a + {}^t T^a = 0$ , qui correspondent aux **matrices antisymétriques**  $N \times N$ .

*Remarque* :  $O(N)$  contient des transformations discrètes, qui n'ont pas d'analogue dans l'algèbre de Lie. On se débarrasse de ces transformations en considérant  $SO(N)$  qui impose la contrainte  $\det A = 1$

### Nombre de générateurs :

Chaque élément de  $O(N)$  possède  $N^2$  éléments de matrice.

La contrainte  $\rightarrow^t AA = A^t A = 1$  impose donc  $\frac{N(N-1)}{2}$  conditions d'orthogonalité  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$  ( $i \neq j$ ).

Les  $N$  conditions d'orthogonalité  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$  réduisent le nombre de générateurs : au total,  $o(N)$  possède

$$N^2 - \left[ N + \frac{N(N-1)}{2} \right] = \frac{N(N-1)}{2} \text{ générateurs.}$$

La  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie correspondante est donc constituée des matrices complexes  $N \times N$  anti-symétriques, et notée  $o(N, \mathbb{C})$ . Dans la classification de Cartan,  $o(2N+1, \mathbb{C})$  est notée  $B_N$  et  $o(2N, \mathbb{C})$  est notée  $D_N$ .

*Remarque:*

- $O(N)$  n'est pas connexe (à cause des symétries miroirs, discrètes)
- $SO(N)$  est connexe
- $SO(N)$  n'est pas simplement connexe pour  $N \geq 3$

On a vu dans le chapitre 3 qu'en mécanique quantique, les états physiques sont décrits par des rayons (qui sont par définition des vecteurs de l'espace de Hilbert à une phase près). Les opérations de symétrie, qui préservent par définition les probabilités de transition (mais pas forcément les amplitudes de probabilité), sont codées sur l'espace de Hilbert par des opérateurs unitaires ou anti-unitaires (c'est le théorème de Wigner). L'espace de Hilbert fournit alors un espace de représentation **à une phase près** du groupe de symétrie  $G$ , ce qui est très pénible mathématiquement. On étudie plutôt, comme on le verra dans le chapitre 7, le groupe de recouvrement  $\tilde{G}$  du groupe de symétrie qui est (en un sens à préciser mathématiquement) le groupe le plus simple qui ait la même algèbre de Lie que  $G$ , et qui est **simplement connexe** (tous les chemins sur le groupe peuvent se contracter en un point). On montre alors que les **représentations de  $\tilde{G}$**  induisent automatiquement les **représentations projectives de  $G$** .  $\tilde{G}$  peut en principe posséder lui-même des représentations projectives, s'il possède ce que l'on appelle des charges centrales. Une telle situation n'arrive pas dans le cas des algèbres de Lie semi-simples.

*Exemples* : (qui seront détaillés respectivement aux chapitres 5,6 et 8,9)

non simplement connexe	simplement connexe
$SO(3)$	$SU(2)$
spin entier = représentation	spin entier = représentation
spin demi-entier $\neq$ représentation	spin demi-entier = représentation

$SO(3,1)$	$SL(2, \mathbb{C}) \leftrightarrow SU(2) \times SU(2)$								
(groupe de Lorentz)	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">spineurs</td> <td style="text-align: center;">spineurs</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>(\frac{1}{2}, 0)</math></td> <td style="text-align: center;"><math>(0, \frac{1}{2})</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;"> <math>\underbrace{\hspace{10em}}</math> </td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;"> <math>\downarrow</math> </td> </tr> </table>	spineurs	spineurs	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$\underbrace{\hspace{10em}}$		$\downarrow$	
spineurs	spineurs								
$(\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$								
$\underbrace{\hspace{10em}}$									
$\downarrow$									
	bispineurs (indispensables si l'on rajoute la symétrie P) $\rightarrow$ équations d'onde relativistes (ex. : éq. de Dirac)								

- **Groupes symplectiques** :  $N$  pair      $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$

$S_p(N) \equiv$  groupe des matrices qui préserve le produit scalaire antisymétrique

$$\eta^a E_{ab} \xi^b \quad E_{ab} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline - & - \\ \hline -\mathbf{1} & 0 \end{array} \right)$$

$\swarrow \quad \nearrow$   
 blocs  $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$

L'algèbre de Lie correspondante possède  $\frac{N(N+1)}{2}$  générateurs.  
 La  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie est notée  $sp(N, \mathbb{C})$ , ou encore  $C_N$  dans la classification de Cartan.

exemple d'application : crochets de Poisson

- **Groupes exceptionnels** :  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ .

Utilisés dans certains modèles d'unification des interactions fondamentales, par exemple en théorie des cordes.

Bien entendu, nous n'avons pas épuisé, comme le lecteur attentif l'aura compris, toute les  $\mathbb{R}$ -algèbres de Lie simples dans ce qui vient d'être présenté. En effet, à chaque  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie simple que nous venons de décrire correspondent plusieurs formes réelles. On trouvera le détail de cette classification dans Barut (Chap. 1, 5).

## 4.3 Représentations

### 4.3.1 Généralités

Définition :

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n$ .  
Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  dans  $V$  est un homomorphisme  $T$  de  $G$  dans le groupe  $GL(n)$  des opérateurs linéaires et inversibles de  $V$ . On a donc

$$\boxed{\forall g_1, g_2 \in G, T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2).}$$

En particulier  $T(e) = \mathbb{1}$  et  $T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$ ,

où  $e$  et  $\mathbb{1}$  sont les éléments neutres de  $G$  et de  $GL(n)$ .

$V$  est appelé espace de représentation, et  $n = \dim V$  est la dimension de la représentation.  $T(g)$  s'écrit donc comme une matrice  $n \times n$ . Il faut surtout pas confondre cet dimension avec celle du groupe. De façon générale, un groupe donné possède plusieurs représentations, de dimensions différentes.

### Représentations unitaires

Si  $\forall g \in G$ , les opérateurs  $T(g)$  sont unitaires, la représentation est dite unitaire.

### Représentations équivalentes

Deux représentations  $T$  et  $T'$  sont dites équivalentes si et seulement si il existe un opérateur  $S$  inversible t.q.

$$\forall g \in G, T'(g) = S^{-1} T(g) S.$$

$S$  est appelé opérateur d'entrelacement.

*Exemples de représentation :*

1)  $S_2$  : groupe de permutations de deux objets.  
Une représentation de dimension 2 est fournie par

$$e \rightarrow D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p \rightarrow D(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

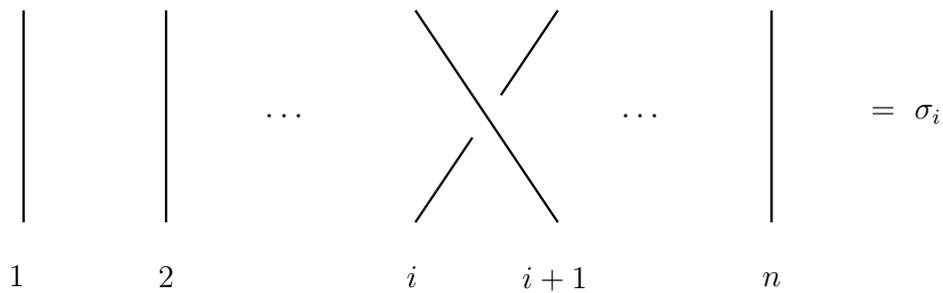
2) groupe des tresses  $B_n$

$n - 1$  générateurs  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$

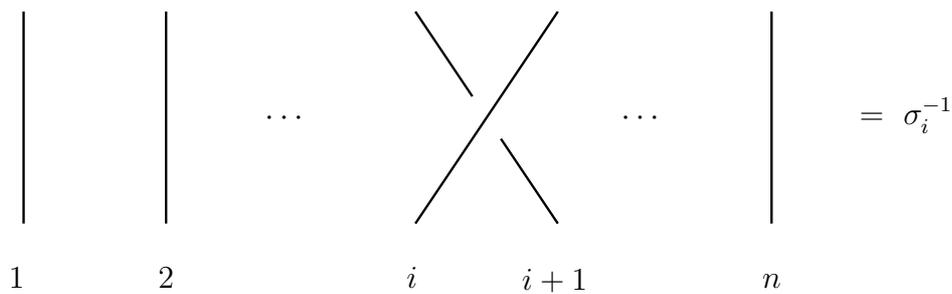
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i < n - 1$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = e$$

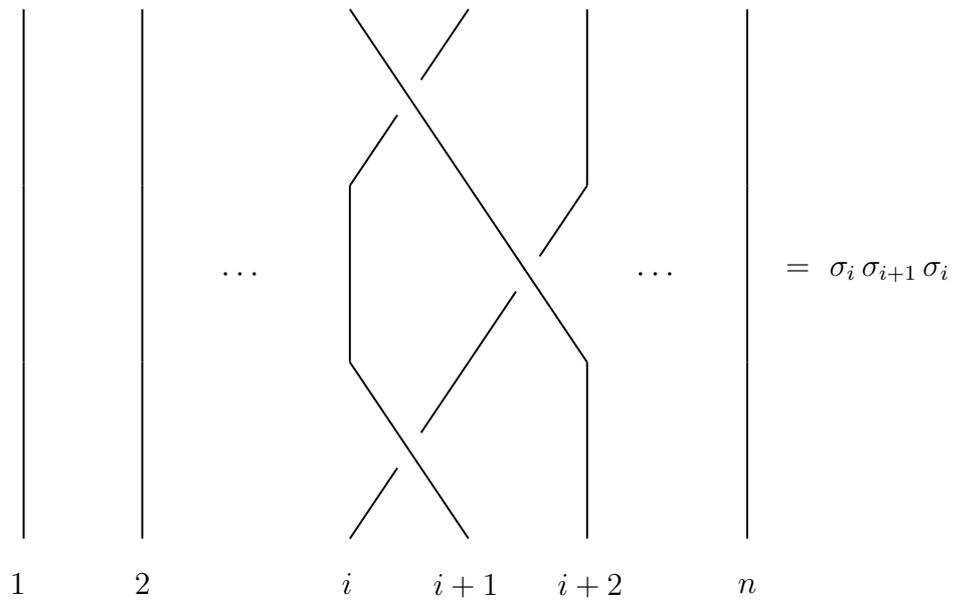


qui correspond géométriquement à l'échange des brins  $i$  et  $i + 1$ .

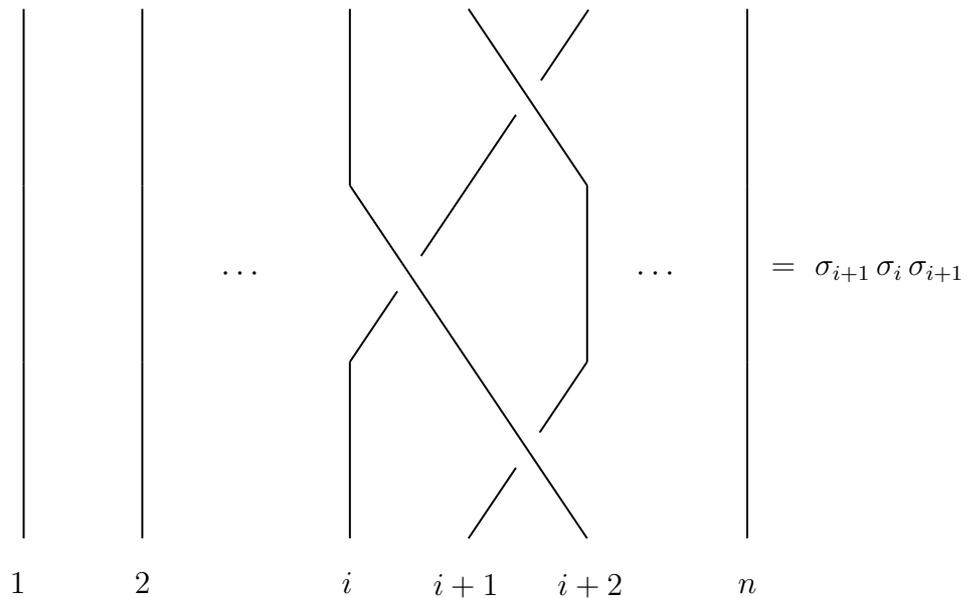


qui code l'opération inverse.

On vérifie alors aisément que les relations algébriques de définition du groupe des tresses a bien l'interprétation géométrique attendue. En particulier, la première des relations correspond à l'équivalence topologique des deux successions d'échanges  $i \leftrightarrow i + 1$ ,  $i + 1 \leftrightarrow i + 2$  puis  $i \leftrightarrow i + 1$  d'une part, et  $i + 1 \leftrightarrow i + 2$ ,  $i \leftrightarrow i + 1$  puis  $i + 1 \leftrightarrow i + 2$  d'autre part, comme on peut le constater sur la figure ci-dessous :



est identique à



Ce groupe des tresses joue un rôle important dans de nombreux domaines de la physique, en particulier dans la théorie des modèles intégrables.

On vérifiera qu'une représentation de  $B_3$  est fournie par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & -t \end{pmatrix}$$

### Somme directe de deux représentations :

Soient  $T_1(g)$  et  $T_2(g)$  deux représentations d'un même groupe  $G$  de dimensions  $p_1, p_2$ . La somme directe de ces représentations est donnée par les matrices

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}$$

de dimension  $p_1 + p_2$ .

$T(g)$  agit dans l'espace somme directe  $\xi_1 \oplus \xi_2$ .

### Produit tensoriel de deux représentations :

Le produit tensoriel des représentations  $T_1$  et  $T_2$ , caractérisées par les éléments de matrice  $\langle n_1 | T_1(g) | n'_1 \rangle$  et  $\langle n_2 | T_2(g) | n'_2 \rangle$  est donnée par les matrices produit tensoriel  $T(g) = T_1(g) \otimes T_2(g)$ , soit encore

$$\langle n_1 n_2 | T(g) | n'_1 n'_2 \rangle = \langle n_1 | T_1(g) | n'_1 \rangle \langle n_2 | T_2(g) | n'_2 \rangle$$

## 4.3.2 Représentations réductibles et irréductibles

### Définitions :

Une représentation d'un groupe  $G$  est dite réductible si elle est équivalente à une représentation  $T$  de  $G$  qui peut s'écrire,  $\forall g \in G$ ,

$$T(g) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

$A$  est une matrice  $n_A \times n_A$  donc il existe un sous-espace de  $V$  de dimension  $n_A$  invariant sous  $T(g)$ ,  $\forall g \in G$ .

### Irréductibilité d'une représentation :

Une représentation d'un groupe  $G$  est dite irréductible si elle n'est pas réductible (!), ce qui se traduit encore par le fait qu'il n'existe pas de sous-espace invariant par  $T(g)$ ,  $\forall g \in G$ , autre que  $\emptyset$  et  $V$ .

### Complète réductibilité d'une représentation :

Une représentation est dite complètement réductible si elle est équivalente à une représentation de la forme

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_{11}(g) & & O \\ & T_{22}(g) & \\ O & & T_{nn}(g) \end{pmatrix}, \forall g \in G,$$

où  $T_{11}, T_{22}, \dots$  sont irréductibles, i.e. si elle est équivalente à une représentation qui est une somme directe de représentations irréductibles de  $G$ .

**Théorème**

Si  $G$  est un **groupe fini** ou un groupe de Lie **compact**, alors toute représentation réductible est complètement réductible. La propriété est également vraie pour toute représentation réductible d'un groupe de Lie connexe, non compact et semi-simple, de même que pour toute représentation réductible **unitaire** d'un groupe quelconque.

**4.3.3 Lemme de Schur**

1) Soient deux représentations irréductibles  $T$  et  $T'$ . S'il existe un opérateur  $V$  tel que  $\forall g \in G, VT(g) = T'(g)V$ , alors soit  $V$  est un isomorphisme (et alors  $V^{-1}T'V = T$  i.e.  $T$  et  $T'$  sont équivalentes), soit  $V = 0$ .

**Corollaire :**

2) Soit une représentation irréductible sur  $\mathbb{C}$ . Si  $M$  commute avec toutes les matrices de cette représentation, alors  $M = \lambda I$  ( $M$  est une homothétie).

*Preuve :*

$$2) \forall g \in G, T(g)M = MT(g).$$

Soit  $E_\lambda$  le sous-espace propre de  $M$  pour la valeur propre  $\lambda$  (existe car le corps est  $\mathbb{C}$ ).  $\forall v \in E_\lambda, MT(g)v = T(g)Mv = \lambda T(g)v$  donc  $T(g)(E_\lambda)$  est stable par  $M, \forall g$ .

$$\text{Donc } T(g) = \begin{pmatrix} \text{---} & | & \text{---} \\ 0 & | & \end{pmatrix}, \text{ et si } E_\lambda \neq E, \text{ la représentation est réductible,}$$

$\uparrow$   
 si  $E_\lambda \neq E$

ce qui est absurde. Donc  $E_\lambda = E$ , i.e.  $M = \lambda E$ .

1) Supposons que  $V \neq 0$ .

Alors  $VT(g) = T'(g)V \Rightarrow \forall x \in \text{Ker } V, VT(g)(x) = T'(g)V(x) = 0$ . Donc  $T(g)\text{Ker } V \subset \text{Ker } V$  :  $\text{Ker } V$  est un sous-espace invariant de  $E$ . Comme  $T(g)$  est irréductible,  $\text{Ker } V = 0$  (sinon  $\text{Ker } V = E$ , et alors  $V = 0$ , ce qui est absurde).

De même  $\forall g \in \text{Im } V, \exists x$  t.q.  $y = Vx$  donc  $T'(g)Vx = T'(g)y = VT(g)x$ . Ainsi  $T'(g)y = Vy'$  avec  $y' = T(g)x$  i.e.  $T'(g)\text{Im } V \subset \text{Im } V$ .  $\text{Im } V$  est donc un sous-espace invariant par  $T'(g)$  (pour tout  $g$ ). Comme  $V \neq 0, \text{Im } V \neq \emptyset$ . L'irréductibilité de  $T'$  implique que  $\text{Im } V = E$ . Donc  $V$  est bijective.

**Réciproque :**

Soit une représentation  $T$  unitaire (ou plus généralement satisfaisant aux conditions du théorème de complète irréductibilité).

Si  $\forall M, \forall g \in G, [T(g), M] = 0 \Rightarrow M = \lambda I$ , alors  $T$  est irréductible.

On a ainsi un critère puissant pour prouver l'irréductibilité d'une représentation.

*Preuve :*

Si la représentation est réductible, elle l'est complètement par hypothèse, et  $\exists H \subset E$  invariant par  $T(g), \forall g \in G$  tel que

$$\forall g, T(g) = \left( \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & \\ 0 & \end{array} \right).$$

Les matrices qui commutent avec les  $T(g)$  sont de la forme  $\left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 I & 0 \\ \hline & \\ 0 & \lambda_2 I \end{array} \right)$  qui diffère de  $\lambda I$  en général. Donc la représentation ne peut pas être réductible.

---

*autre preuve de 2) :* sur  $\mathbb{C}$ ,  $M$  a au moins une valeur propre  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$  car  $M$  est inversible d'après le lemme de Schur).

$$MT = TM \text{ donc } (M - \lambda \mathbb{1})T = T(M - \lambda \mathbb{1})$$

Mais comme  $M - \lambda \mathbb{1}$  est singulier,  $M = \lambda \mathbb{1}$  d'après le lemme de Schur.

### Corollaire

**3) Une représentation irréductible sur  $\mathbb{C}$  d'un groupe abélien est nécessairement de dimension 1.**

En effet, soit  $g' \in G$ . Alors  $[T(g'), T(g)] = 0, \forall g \in G$ . Donc  $T(g') = \lambda(g')\mathbb{1}$ . La représentation se décompose donc en  $\dim D$  copies de la représentation de dimension 1 :  $g \mapsto \lambda(g)$ .

*Rem. :* il est essentiel que le corps soit  $\mathbb{C}$  (algébriquement clos) et non  $\mathbb{R}$ .

Contre-exemple : la représentation sur  $\mathbb{R}$  de  $SO(2)$  par  $D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  est irréductible (pourtant  $\forall \alpha, [D(\alpha), D(\theta)] = 0$ ).

### 4.3.4 Unitarité des représentations

**Théorème 1 :** Si  $G$  est un groupe fini ou un groupe de Lie compact, alors toute représentation de  $G$  est équivalente à une représentation unitaire. De plus toute représentation irréductible est de dimension finie.

**Théorème 2 :** Si  $G$  est un groupe de Lie simple non compact, alors  $G$  ne possède pas de représentation unitaire de dimension finie en dehors de la représentation triviale  $D(A) = 1, \forall A \in G$ .

**Théorème 3 :** Si  $G$  est un groupe de transformations de  $\mathbb{R}^3$  et si la représentation  $D$  possède un système de fonctions de base, alors  $D$  est unitaire si les fonctions de base forment un système orthonormal.

**Théorème 4 :**

★ Si  $D$  et  $D'$  sont deux représentations équivalentes de  $G$  t.q.  $D'(A) = S^{-1}D(A)S$  ( $\forall A \in G$ ) et si  $D$  est unitaire et  $S$  est unitaire, alors  $D'$  est unitaire.

★ Réciproquement si  $D$  et  $D'$  sont toutes deux unitaires, alors  $S$  peut toujours être choisie unitaire.

### 4.3.5 Représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On dit que  $D$  est une représentation linéaire de  $\mathfrak{g}$  dans l'espace vectoriel  $V$  si

$$\begin{aligned} [D(A), D(B)] &= D([A, B]) \\ D(\alpha A + \beta B) &= \alpha D(A) + \beta D(B) \end{aligned}$$

**Théorème :**

Une représentation  $D_G$  d'un groupe  $G$  induit par différentiation une représentation  $D_A$  de son algèbre de Lie.

*Preuve:*

Il suffit de définir  $D_A(T_a)$  par  $D_G(1 + tT_a + o(t)) = 1 + tD_A(T_a) + o(t)$ , ce qui est équivalent à poser que

$$D_A(T_a) = \left. \frac{d}{dt} D_G(e^{tT_a}) \right|_{t=0}.$$

Pour montrer que l'on a ainsi construit une représentation de  $\mathfrak{g}$ , considérons la courbe  $C(t) = A(\sqrt{t})B(\sqrt{t})A(\sqrt{t})^{-1}B(\sqrt{t})^{-1} = 1 + t[T_a, T_b] + o(t)$ , où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont des courbes analytiques de  $G$  de vecteurs tangents respectifs  $T_a$  et  $T_b$ . On a donc  $D_G(C(t)) = D_G(1 + t[T_a, T_b] + o(t))$ , soit encore

$$D_A([T_a, T_b]) = \left. \frac{d}{dt} D_G(C(t)) \right|_{t=0}.$$

Or par morphisme de  $D_G$ ,

$$D_G(C(t)) = D_G(A(\sqrt{t})) D_G(B(\sqrt{t})) D_G^{-1}(A(\sqrt{t})) D_G^{-1}(B(\sqrt{t}))$$

qui s'écrit encore, après développement en série,

$$D_G(C(t)) = 1 + t [D_A(T_a), D_A(T_b)] + o(t),$$

d'où

$$\left. \frac{d}{dt} D_G(C(t)) \right|_{t=0} = [D_A(T_a), D_A(T_b)],$$

ce qui prouve que  $D_A([T_a, T_b]) = [D_A(T_a), D_A(T_b)]$ .

*Deux exemples importants de représentations :*

- **représentation fondamentale** : (pour un groupe de matrices)

Pour un groupe de matrices sous-groupe de  $GL(N, \mathbb{R})$  (ou de  $GL(N, \mathbb{C})$ ), elle est définie par  $D(A) = A$ . L'espace vectoriel de la représentation est donc  $\mathbb{R}^N$  (ou  $\mathbb{C}^N$ ), et sa dimension est  $N$ , qu'il ne faut pas confondre avec la dimension du groupe. Cette relation définit aussi bien la représentation fondamentale du groupe que de son algèbre.

- **représentation adjointe** :

- ★ **sur le groupe** :

Sur le groupe  $G$ , l'application  $g \rightarrow ad g$  définie par  $ad g(h) = ghg^{-1}$  est une représentation de  $G$  sur lui-même.

*Preuve:*

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in G, \forall h \in G, ad(g_1 g_2)(h) &= (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1} \\ &= ad_{g_1}(ad_2(h)) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'on a bien construit un morphisme.

*Remarque:*

Le lecteur attentif aura constaté que l'éventuelle structure linéaire du groupe (si le groupe est un groupe de matrices) ne joue ici aucun rôle : dans le cas général, on dira que l'on a une représentation (linéaire ou non) du groupe.

- ★ **sur l'algèbre** :

A cette représentation sur le groupe correspond la représentation  $X \rightarrow adX$  définie par  $adX(Y) = [X, Y]$ .

*Preuve:*

Il suffit de différentier  $\exp(tX)Y \exp(-tX)$  en  $t = 0$  pour en déduire l'expression de la représentation adjointe sur l'algèbre de Lie. Le théorème précédent assure que l'on a bien une représentation. Il est cependant instructif de le vérifier directement de deux façons différentes :

- de manière intrinsèque, il faut montrer que  $[adX_1, adX_2] = ad[X_1, X_2]$ .

$$\begin{aligned} \forall Y \in g, [adX_1, adX_2](Y) &= adX_1 adX_2(Y) - adX_2 adX_1(Y) \\ &= [X_1, [X_2, Y]] - [X_2, [X_1, Y]] = [X_1, [X_2, Y]] + [X_2, [Y, X_1]] = -[Y, [X_1, X_2]] \end{aligned}$$

soit encore  $[adX_1, adX_2](Y) = [[X_1, X_2], Y]$ , ce qui prouve le résultat.

- matriciellement, en définissant les constantes de structure par  $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$  dans la base  $X_a$  on peut construire cette représentation par  $[D(X_i)]^k_j = C_{ij}^k$ , soit  $\sum_k [D(X_i)]^k_j X_k = [X_i, X_j]$  qui se visualise sous la forme

$$\left( \begin{array}{c} j \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \right)_{n \times n} = D(X_i)$$

↙  
 $\sum_k [D(X_i)]^k_j X_k = \text{image du vecteur } X_j$

Sous cette forme, il suffit donc de vérifier que  $[D(X_i), D(X_j)]^\alpha_\beta = D([X_i, X_j])^\alpha_\beta$ .

*Preuve:*

$$D([X_i, X_j])^\alpha_\beta = [D(C_{ij}^k X_k)]^\alpha_\beta = C_{ij}^k [D(X_k)]^\alpha_\beta.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } D(X_i)^\alpha_\gamma D(X_j)^\gamma_\beta - D(X_j)^\alpha_\gamma D(X_i)^\gamma_\beta &= C_{i\gamma}^\alpha C_{j\beta}^\gamma - C_{j\gamma}^\alpha C_{i\beta}^\gamma \\ &= -C_{\gamma i}^\alpha C_{j\beta}^\gamma - C_{\gamma j}^\alpha C_{\beta i}^\gamma \\ &= C_{ij}^\gamma C_{\gamma\beta}^\alpha = C_{ij}^\gamma [D(X_\gamma)]^\alpha_\beta \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

Avec les notations des physiciens, correspondant à  $[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c$ ,  $D(T_a)^b_c = if_{ac}^b$  ou encore  $ad T_a(T_b) = [T_a, T_b]$ .

*Remarque:*

• Pour une algèbre de Lie semi-simple compacte, comme on l'a vu plus haut, on pourra écrire plus simplement

$$D(T_a)_{bc} = -if_{abc} \quad \swarrow A \text{ comme adjoint} \\ \text{que l'on note aussi } (T_a^A)_{bc} = -if_{abc}$$

• **La dimension de la représentation adjointe est égale à la dimension du groupe.** En revanche les générateurs  $X_a$  peuvent être dans une représentation complètement arbitraire. La seule chose qui compte finalement est que leur nombre soit la dimension du groupe (qu'il ne faut surtout pas confondre avec la dimension  $d$  de la représentation des générateurs  $X_a$  (i.e. les  $X_a$  sont des matrices  $d \times d$ ). On obtient ainsi différentes formes isomorphes de la représentation adjointe.

*Exemple :* SU(2) (qui sera étudié en détail dans le chapitre 5)

représentation fondamentale : matrices  $\frac{\vec{\sigma}}{2}$  (3 matrices  $2 \times 2$ )

représentation adjointe : c'est la représentation vectorielle que l'on peut aussi fabriquer à partir des rotations infinitésimales  $(J_k)_{ij} = -\varepsilon_{kij} = -i\varepsilon_{ijk}$  (3 matrices  $3 \times 3$ ).

En tant que matrice,  $T_a^A$  agit comme une matrice  $n \times n$  ( $n =$  dimension du groupe). En revanche si l'on décide de décrire  $T_a^A$  comme un opérateur construit à partir d'une représentation donnée (en général la représentation fondamentale) de dimension  $d$ , alors

$$T_a^A(T_b) = [T_a, T_b] \quad T_a : \text{pour } a \text{ fixé, c'est une matrice } d \times d \\ \swarrow n \text{ indices possibles}$$

Notations usuelles dans la littérature :  $ad \Leftrightarrow T^A \Leftrightarrow T$  pour l'adjointe  
 $T^f \Leftrightarrow t$  pour la fondamentale

Il est assez usuel d'utiliser les indices  $i, j, k$  pour les coefficients des générateurs de la (des) représentation(s) fondamentale(s), et  $a, b, c$  pour les coefficients des générateurs de la représentation adjointe.

Dans les théories de Yang-Mills, nous verrons que les champs de jauge apparaissent naturellement comme se transformant sous le groupe de jauge suivant la représentation adjointe du groupe.

### Normalisation

$$g_{ab} = Tr (T_a^A T_b^A) \quad \text{par définition de } g$$

Dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple compacte, on a vu que l'on peut toujours choisir les générateurs pour que  $g_{ab}$  soit multiple de l'identité :

$$Tr (T_a^A T_b^A) = C(A) \delta_{ab}$$

On peut montrer que pour toute représentation  $r$ , le fait d'avoir fait ce choix pour les générateurs de la représentation adjointe conduit à ce que

$$\text{Tr}(T_a^r T_b^r) = C(r) \delta_{ab}.$$

Ceci repose sur le fait que  $\text{Tr}T_a^r T_b^r$  est une forme invariante. Or un théorème montre que la seule forme invariante (à un facteur multiplicatif près) est la forme de Killing.

*Remarque* :  $[T_a^r, T_b^r] = i f_{abc} T_c^r$  donc  $f_{abc} = -\frac{i}{C(r)} \text{Tr} \{ [T_a^r, T_b^r] T_c^r \}$

# Chapitre 5

## Groupe des Rotations

### 5.1 Définition

Par définition, le groupe des rotations  $SO(3)$  est le groupe des transformations de  $\mathbb{R}^3$  qui préservent le produit scalaire et l'orientation :

$$\bullet \det R = 1 \quad \leftarrow S$$

$$\bullet \forall x, y \quad R_{ik}x_k R_{i\ell}y_\ell = x_k y_\ell \delta_{k\ell}$$

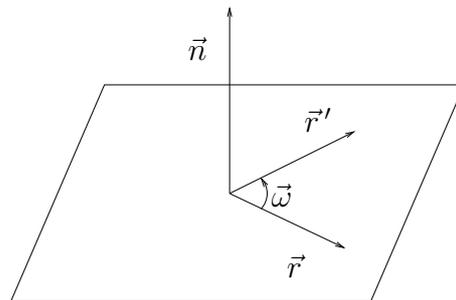
$$\Leftrightarrow R_{ik}R_{i\ell} = \delta_{k\ell} \Leftrightarrow {}^t R R = \mathbb{1} \quad \leftarrow O$$

*Remarque:*

$O(N)$  est définie de manière équivalente en exigeant que  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ , la norme de  $x$  est invariante, ou en exigeant que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$ , le produit scalaire  $x \cdot y$  est invariant.

#### Forme explicite :

Considérons une rotation autour de  $\vec{n}$  d'angle  $\omega$



Dans le cas où  $\vec{r}$  est perpendiculaire à l'axe de rotation,

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \cos \omega + \sin \omega \vec{n} \wedge \vec{r}_{\perp}.$$

Dans le cas général, en utilisant la décomposition

$$\vec{r} = \vec{r}_{//} + \vec{r}_{\perp} \text{ avec } \vec{r}_{//} = \vec{n} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \text{ et } \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{n}(\vec{r} \cdot \vec{n}),$$

la rotation d'axe  $\vec{n}$  laisse invariante  $\vec{r}_{//}$  et l'on a donc

$$\vec{r}' - \vec{n}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) = [\vec{r} - \vec{n}(\vec{r} \cdot \vec{n})] \cos \omega + \sin \omega \vec{n} \wedge [\vec{r} - \vec{n}(\vec{r} \cdot \vec{n})]$$

soit

$$\boxed{\vec{r}' = \vec{n}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \cos \omega [\vec{r} - \vec{n}(\vec{r} \cdot \vec{n})] + \sin \omega \vec{n} \wedge \vec{r}} \quad (5.1)$$

Une rotation est complètement déterminée par la donnée d'un angle  $\omega$  tel que  $0 \leq \omega \leq \pi$  et d'un vecteur unitaire  $\vec{n}$ .

*Remarque:*

$R_{\pi}(\vec{n}) = R_{\pi}(-\vec{n})$ . La variété du groupe est donc une boule de diamètre  $\pi$  dont on identifie les points diamétralement opposés.

## 5.2 Algèbre de Lie de $SO(3)$

Le groupe  $SO(3)$  est déterminé par les conditions  ${}^tRR = \mathbb{1}$  avec  $\det R = 1$ . D'après le chapitre 4, l'algèbre de Lie de  $SO(N)$  est constituée des matrices antisymétriques  $N \times N$ . On prendra comme base

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit  $(L_k)_{ij} = -\varepsilon_{ijk}$ . On vérifie que  $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}L_k$ . En terme des générateurs hermitiens,  $J_i = iL_i$ , et

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k}. \quad (5.2)$$

## 5.3 Groupe $SU(2)$ : définition et paramétrisation

Le groupe de Lie  $SU(N)$  est par définition le groupe des matrices unimodulaires  $N \times N$ , i.e.  $\begin{cases} U^+U = 1 \\ \det U = 1 \end{cases}$

Nous allons montrer qu'une paramétrisation de  $SU(2)$  est donnée par

$$\boxed{U = \cos \frac{\theta}{2} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2} = \exp -i\theta \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}} \quad (5.3)$$

où  $\theta$  est un angle réel,  $\vec{n}$  est vecteur tri-dimensionnel unitaire ( $\vec{n}^2 = 1$ ) et  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

On notera dans toute la suite

$$C = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Propriétés des matrices de Pauli :

- hermiticité :

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i \quad (5.5)$$

- produit :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (5.6)$$

d'où l'on déduit la relation très utile

$$\boxed{(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})} \quad (5.7)$$

puisque

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\sigma_i a_i)(\sigma_j b_j) = a_i b_j (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

- Propriétés de  $C$  :

$$C = C^* = -C^{-1} = -C^+ = -\tilde{C} \quad (5.8)$$

- Transposition et conjugaison complexe :

$$C^{-1} \tilde{\sigma}_i C = -\sigma_i \quad \text{et donc} \quad C^{-1} \sigma_i^* C = -\sigma_i \quad (5.9)$$

- pour toute matrice  $A$  ( $2 \times 2$ ), un calcul explicite permet de vérifier que

$$CAC^{-1} \tilde{A} = \det A \mathbb{1} \quad (5.10)$$

Donc pour un élément de  $SL(2, \mathbb{C})$ , la condition  $\det U = 1$  donne alors  $CUC^{-1} \tilde{U} = 1$ , soit encore, en multipliant à gauche par  $C^{-1}$  et à droite par  $C$ ,  $UC^{-1} \tilde{U}C = 1$ , d'où

$$U^{-1} = C^{-1} \tilde{U} C. \quad (5.11)$$

Dans le cas particulier où  $U \in SU(2)$ , on aura donc

$$U^\dagger = U^{-1} = C^{-1} \tilde{U} C. \quad (5.12)$$

Venons-en maintenant à la preuve de la paramétrisation (5.3).

D'après le chapitre 4, la forme exponentielle s'obtient aisément si l'on admet que le groupe est compact et connexe et qu'il peut donc s'obtenir par exponentiation de son algèbre de Lie. En anticipant sur ce qui va suivre, où l'on étudiera l'algèbre de Lie de  $SU(2)$ , considérons donc la courbe de  $SU(2)$  définie par  $t \mapsto e^{tA}$  avec  $e^{tA} e^{tA} = 1$ . On a, en différentiant en 0,  $A^+ + A = 1$  soit, en posant  $A = i\beta$ ,  $\beta = \beta^+$ . Une base des matrices hermitiennes est fournie par les matrices  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . On en déduit donc que  $U = \exp -i\theta \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}$ .

Il est instructif de montrer ce résultat de façon pédestre. Toute matrice  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  peut se mettre sous la forme  $U = a_0 - i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$  (indépendance linéaire de  $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sur le corps  $\mathbb{C}$ ). En utilisant la relation (5.12), on a donc

$$C^{-1}(a_0 - i\vec{a} \cdot \vec{\sigma})C = a_0^* + i\vec{a}^* \cdot \vec{\sigma}$$

soit  $a_0 + i\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = a_0^* + i\vec{a}^* \cdot \vec{\sigma}$ , d'où l'on déduit que  $a_0$  et  $\vec{a}$  sont réels. En écrivant explicitement

$$U = a_0\mathbb{1} - i\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} a_0 - ia_3 & -a_2 - ia_1 \\ a_2 - ia_1 & a_0 + ia_3 \end{pmatrix},$$

on vérifie immédiatement que  $\det U = a_0^2 + a_3^2 + a_1^2 + a_2^2$  soit encore  $a_0^2 + \vec{a}^2 = 1$ , ce qui montre que  $(a_0, \vec{a})$  appartient à la sphère  $S^3$ .

On peut donc poser

$$\begin{cases} a_0 = \cos \frac{\theta}{2} \\ \vec{a} = \vec{n} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5.13)$$

Notons que les transformations particulières de  $SU(2)$  correspondant à  $\theta = 2\pi$  et  $\vec{n}$  quelconque correspondent toutes à l'élément  $U = -\mathbb{1}$  qui n'est pas égal à l'identité, alors que la rotation correspondante, lorsqu'elle agit sur des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , est clairement égale à l'identité! Nous reviendrons plus loin sur ce paradoxe apparent.

D'après ce qui précède, la variété du groupe  $SU(2)$  est donc une boule de rayon  $2\pi$  dont on identifie tous les points du bord.  $SU(2)$  est donc un groupe à 3 paramètres réels :  $\theta, \vec{n}$ .

On peut relier les deux formes obtenues dans (5.3), ce qui permettra de justifier que l'angle  $\theta$  est le même. Pour évaluer le développement en série

$$\exp -i\theta \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-i\theta}{2} \right)^k \frac{(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^k}{k!},$$

il suffit de calculer les puissances successives de  $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})$ . En utilisant la relation (5.7), on obtient immédiatement que  $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{n}^2 = 1$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \exp -i\theta \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-i\theta}{2} \right)^{2k} \frac{1}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-i\theta}{2} \right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2k} \frac{1}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} - i \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat (5.3).

## 5.4 Homomorphisme du groupe $SU(2)$ sur le groupe $SO(3)$

### 5.4.1 Théorème

Il existe un homomorphisme (ou morphisme) du groupe  $SU(2)$  sur le groupe des rotations  $SO(3)$  défini par

$$\begin{array}{l} \pm U \rightarrow R(U) \text{ tel que} \\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vec{x}' = R(U) \vec{x} \\ \text{avec } \vec{x}' \cdot \vec{\sigma} = U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^{-1} \end{array} \quad (5.14)$$

*Preuve :*

Il s'agit de montrer que pour  $U \in SU(2)$  donné, la transformation  $R(U)$  définie ci-dessus est bien une rotation. On remarque que  $U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^{-1}$  peut s'écrire  $\vec{x}' \cdot \vec{\sigma}$  et non  $x_0 \mathbb{1} + \vec{x}' \cdot \vec{\sigma}$  puisque  $\text{Tr } U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^{-1} = 0$  alors que  $\text{Tr } \mathbb{1} \neq 0$ . La définition précédente a donc un sens. De plus, nous venons de voir dans la partie 5.3 que  $\vec{x}'^2 = -\det \vec{x}' \cdot \vec{\sigma}$ . On déduit donc de la définition de  $\vec{x}'$  que  $\vec{x}'^2 = -\det U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^{-1} = -\det \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \vec{x}^2$ . Ceci prouve que la transformation (3) conserve les longueurs, et donc qu'elle appartient à  $O(3)$ . Il reste à prouver qu'elle conserve aussi l'orientation des trièdres. On utilise pour cela la relation

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{2i} \text{Tr} [(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})(\vec{\sigma} \cdot \vec{y})(\vec{\sigma} \cdot \vec{z})].$$

*Preuve :*

$\text{Tr}(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})(\vec{\sigma} \cdot \vec{y})(\vec{\sigma} \cdot \vec{z}) = x_i y_j z_k \text{Tr } \sigma_i \sigma_j \sigma_k$ . Or  $\text{Tr } \sigma_i \sigma_j \sigma_k = \text{Tr}(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) \sigma_k = i\varepsilon_{ijk} \text{Tr } \sigma_k \sigma_k$ . Comme  $\text{Tr } \sigma_k \sigma_k = 2\delta_{kk}$ , on en déduit que  $\text{Tr}(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})(\vec{\sigma} \cdot \vec{y})(\vec{\sigma} \cdot \vec{z}) = 2i\varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k$  ce qui démontre le résultat.

On obtient alors immédiatement  $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}') = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  en utilisant l'invariance de la trace par permutation cyclique.

Il reste à vérifier la structure de morphisme, c'est-à-dire que  $\forall U, V \in SU(2), R(UV) = R(U)R(V)$ , ce qui se démontre immédiatement en comparant l'action de  $R(UV)$  et de  $R(U)R(V)$  sur un vecteur arbitraire de  $\mathbb{R}^3$ .

### 5.4.2 Caractérisation

$$\boxed{\text{A l'élément } U = \cos \frac{\theta}{i} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{i} \text{ de } SU(2) \text{ correspond la rotation d'angle } \theta \text{ autour de l'axe } \vec{n}.} \quad (5.15)$$

*Preuve:*

$[U, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}] = 0$  donc  $U \vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \vec{\sigma} \cdot \vec{n} U = 0$  soit encore  $U \vec{\sigma} \cdot \vec{n} U^{-1} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ , ce qui montre que  $\vec{n}$  est conservé dans la rotation.

Soit  $\vec{V} \perp \vec{n}$ . Alors  $\vec{V}$  se transforme sous l'action de  $R(U)$  en  $\vec{V}'$  tel que

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{V}' &= \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{V} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{V} + \frac{i}{2} \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{V}, \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right] \sin \theta + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{\sigma} \cdot \vec{V} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Le second terme se simplifie grâce à la relation  $[\vec{\sigma} \cdot \vec{V}, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}] = 2i \vec{V} \wedge \vec{n}$ . En utilisant la relation  $\vec{\sigma} \cdot \vec{V} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = i \vec{\sigma} \cdot \vec{V} \wedge \vec{n}$ , le dernier terme peut se réorganiser grâce à l'identité  $i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{\sigma} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{n}) = -\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n}))$ . On obtient donc finalement

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{V}' = \cos \theta \vec{\sigma} \cdot \vec{V} + \sin \theta \vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{V}),$$

d'où  $\vec{V}' = \cos \theta \vec{V} + \sin \theta \vec{n} \wedge \vec{V}$ , ce qui prouve que  $\vec{V}'$  se déduit de  $\vec{V}$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{n}$ .

La paramétrisation  $U = \exp -i\theta \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}$  a donc une interprétation géométrique immédiate.

### 5.4.3 Formules d'inversion

On pose  $\tilde{x} = x_i \sigma_i$ . Alors

$$\boxed{x_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_i \tilde{x}} \quad (5.16)$$

et

$$\boxed{R(U)^i_j = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger)}. \quad (5.17)$$

*Preuves:*

- la relation (5.16) est immédiate en utilisant la relation (5.6).
- la relation (5.17) se démontre en calculant l'image  $R(U) \vec{x}$  de  $\vec{x}$  par la rotation  $R(U)$  et en vérifiant qu'elle est bien donnée par  $\vec{x}'$  défini en accord avec (5.14) :

$$R(U)^i_j x^j = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger) x^j = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i U \tilde{x} U^\dagger) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i \tilde{x}') = \vec{x}'.$$

### 5.4.4 Elements conjugués

$\forall V \in SU(2)$ , les classes d'éléments conjugués s'écrivent

$$VU(\theta, \vec{n})V^{-1} = U(\theta, \vec{n}') \quad (5.18)$$

où  $\vec{n}'$  se déduit de  $\vec{n}$  par la rotation  $R(V) : \vec{n}' = R(V)\vec{n}$ .

*Preuve:*

$$\begin{aligned} VU(\theta, \vec{n})V^{-1} &= V \left( \cos \frac{\theta}{2} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) V^{-1} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}' \end{aligned}$$

où  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}' = V \vec{\sigma} \cdot \vec{n} V^{-1}$ .

Les classes d'éléments conjugués sont donc caractérisées par le même angle. Cette propriété est très utile en pratique pour écrire l'élément de  $SU(2)$  qui code une rotation d'angle donné et d'axe quelconque en fonction d'un élément déjà connu de  $SU(2)$  codant une rotation de même angle autour d'un autre axe.

## 5.5 Forme infinitésimale

Cherchons la forme des matrices unitaires  $2 \times 2$  infiniment voisines de l'identité. A partir de la forme exponentielle (5.3) déjà obtenue plus haut, le résultat est immédiat. Il est cependant instructif d'obtenir directement le résultat. Une matrice  $2 \times 2$  la plus générale est au voisinage de  $\mathbf{1}$  de la forme  $U = \mathbf{1} + \varepsilon_0 + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma}$  avec  $\varepsilon_0, \varepsilon \in \mathbb{C}$ . La contrainte  $\det U = 1$  conduit donc à  $\varepsilon_0 = 0$  à cause de la relation importante

$$\boxed{\det(1 + \varepsilon X) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} X + O(\varepsilon^2)}, \quad (5.19)$$

*Preuve :* Il suffit de diagonaliser la matrice  $X$ .

La contrainte d'unitarité s'écrit  $(\mathbf{1} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma})(\mathbf{1} + \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\sigma}) = \mathbf{1}$  soit encore  $\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^* = 0$ , d'où l'on déduit que  $\vec{\varepsilon}$  est imaginaire pur. Après redéfinition de  $\vec{\varepsilon}$ , on a donc

$$U = \mathbf{1} - i\vec{\varepsilon} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} = \mathbf{1} - i\varepsilon \vec{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (5.20)$$

que nous aurions bien sûr pu obtenir directement par développement au premier ordre de (5.3). Ce résultat correspond d'après la paramétrisation générale à une rotation infinitésimale d'angle  $\varepsilon$  autour de l'axe  $\vec{n}$ , qui s'écrit d'après (5.1)

$$\vec{V}' = R(U) \vec{V} = \vec{V} + \varepsilon \vec{n} \wedge \vec{V}$$

La relation (5.20) montre que les matrices de Pauli sont les générateurs de  $SU(2)$ . L'algèbre de Lie est donc définie par les relations de commutation

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (5.21)$$

Cette algèbre de Lie est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe  $SO(3)$ , comme on peut le voir par comparaison immédiate avec les relations de commutation (5.2) satisfaites par les générateurs de  $SO(3)$  (définis par  $R_{\vec{n}}(\omega) = 1 - i\vec{J} \cdot \vec{n} \omega$ ). Ce résultat ne doit pas nous étonner puisque nous avons montré dans la partie 5.4 qu'il existe un morphisme entre  $SU(2)$  et  $SO(3)$ , qui est bijectif dans un voisinage de l'identité (l'indétermination  $\pm U$  ne pose de problème que lorsque l'on s'éloigne suffisamment de l'identité).

## 5.6 Représentations de $SU(2)$

A l'élément  $U = \mathbb{1} - i\vec{\varepsilon} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$  voisin de l'identité dans  $SU(2)$  correspond

$$D(U(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = \mathbb{1} - i(\varepsilon_1 J_1 + \varepsilon_2 J_2 + \varepsilon_3 J_3)$$

dans la représentation  $D$ . Les  $J_1, J_2, J_3$  sont générateurs de la représentation (ils sont hermitiques puisque  $U$  et donc  $D(U)$  sont unitaires). Pour une rotation infinitésimale autour de l'axe  $\vec{n}$  on a

$$D(U(\vec{\varepsilon}, \vec{n})) = \mathbb{1} - i\varepsilon \vec{J} \cdot \vec{n}$$

Considérons une autre matrice  $V \in SU(2)$ , on a alors

$$VU(\varepsilon, \vec{n})V^{-1} = U(\varepsilon, \vec{n}') \quad \text{où} \quad \vec{n}' = R(V)\vec{n}$$

Dans la représentation  $D$  ceci s'écrit

$$\begin{aligned} D(V) D(U(\varepsilon, \vec{n})) D(V^{-1}) &= D(U(\varepsilon, \vec{n}')) \\ D(V)(\mathbb{1} - i\varepsilon \vec{J} \cdot \vec{n})D^{-1}(V) &= \mathbb{1} - i\varepsilon \vec{J} \cdot \vec{n}' \\ \text{i.e. } D(V)\vec{J} \cdot \vec{n} D^{-1}(V) &= \vec{J} \cdot \vec{n}' = \vec{J}R(V)\vec{n} \\ D(V) J_i n_i D^{-1}(V) &= J_i R_{ij} n_j \\ \boxed{D(V) J_j D^{-1}(V) = R_{ij} J_i} & \end{aligned} \tag{5.22}$$

Montrons réciproquement que la donnée de cette loi de transformation pour les opérateurs  $\vec{J}$  implique la structure d'algèbre de Lie. Soit  $V$  un élément de  $SU(2)$  codant une rotation infinitésimale d'angle  $\alpha$  autour de  $\vec{t}$ , i.e.

$$V = \mathbb{1} - i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{t} \text{ et donc } D(V) = \mathbb{1} - i\alpha \vec{J} \cdot \vec{t}$$

La relation (5.22) s'écrit au premier ordre en  $\alpha$

$$\left(\mathbb{1} - i\alpha \vec{J} \cdot \vec{t}\right) J_j \left(\mathbb{1} + i\alpha \vec{J} \cdot \vec{t}\right) = R_{ij} J_i.$$

Les éléments de matrice de  $R$  s'obtiennent facilement en écrivant que

$$\vec{q}' = R(V)\vec{q} = \vec{q} + \alpha \vec{t} \wedge \vec{q}$$

soit

$$q'_i = q_i + \alpha \varepsilon_{ikj} t_k q_j = R_{ij} q_j,$$

d'où

$$R_{ij} = \delta_{ij} - \alpha \varepsilon_{ijk} t_k.$$

On en déduit, en égalant les termes du 1er ordre, que

$$i\alpha[\vec{J} \cdot \vec{t}, J_j] = \alpha \varepsilon_{ijk} t_k J_i$$

soit encore

$$[J_k, J_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_i = i\varepsilon_{kji} J_i.$$

On retrouve les règles de commutation bien connues du moment cinétique :

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k. \quad (5.23)$$

Les constantes de structures sont données par  $f_{ij}^k = -C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$ . Ces règles sont valables quelle que soit la représentation considérée, par définition de la représentation d'une algèbre de Lie (cf. chapitre 4). En particulier, elles sont satisfaites par les générateurs de  $SU(2)$  (voir (5.2)) et de  $SO(3)$  (voir (5.21)), qui constituent deux représentations particulières de  $SU(2)$ , sur lesquelles nous allons revenir maintenant.

### Exemples de représentation de $SU(2)$ :

- représentation spinorielle :

L'espace de la représentation est à 2 dimensions : dans cette représentation

$$\boxed{D(U) = U \text{ et } \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}.} \quad (5.24)$$

- représentation adjointe, ou vectorielle :

Dans cette représentation de dimension 3, chaque élément de  $SU(2)$  agit sur lui-même suivant la représentation adjointe  $adU(V) = UVU^{-1}$ . Cette structure a déjà été examinée dans la relation (5.18) : elle provient directement du morphisme de  $SU(2)$  sur  $SO(3)$ . Dans la définition de ce morphisme, la relation

$$\vec{x}' \cdot \vec{\sigma} = U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^{-1}$$

peut encore s'écrire

$$\vec{x} \cdot \vec{\sigma}' = U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^{-1} \text{ soit } \vec{\sigma}' = U \vec{\sigma} U^{-1}$$

à condition de poser

$$\vec{\sigma}' = {}^tR(U) \vec{\sigma},$$

i.e. de considérer que les vecteurs de base  $\vec{\sigma}$  se transforment, de manière duale (c'est bien la propriété des vecteurs de base de façon générale!), comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sous l'action de  $SO(3)$ .

Ainsi la représentation adjointe est donnée par

$$\boxed{D(U) = R(U),} \quad (5.25)$$

d'où le nom de représentation vectorielle. Ceci est possible puisque l'algèbre de Lie  $su(2)$  a même dimension que  $\mathbb{R}^3$ .

Remarquons que la relation (5.22) est une généralisation de la relation

$$U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^{-1} = \vec{\sigma}' = {}^tR(U) \vec{\sigma},$$

comme nous en avons déjà fait la remarque page 63, la dimension de l'espace sur lequel les générateurs  $\vec{J}$  agissent ne joue aucun rôle dans la définition de la représentation adjointe du groupe (ici  $SU(2)$ ). L'équation (5.22) s'écrit toujours  $D(V) \vec{J} D^{-1}(V) = {}^t R(V) \vec{J}$ , quelque soit la forme explicite de  $\vec{J}$ . On obtient ainsi des réalisations isomorphes de la représentation adjointe.

Il n'est pas inutile de se convaincre de façon pédestre des résultats que nous venons d'obtenir. Pour une rotation infinitésimale on a

$$R_{ij} = \delta_{ij} - \alpha \varepsilon_{ijk} t_k$$

donc par comparaison avec  $D(U) = 1 - i\alpha \vec{J} \cdot \vec{t}$  on obtient  $(J_k)_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}$  en accord avec la définition vue page 63 de la représentation adjointe :

$$\begin{aligned} (J_k)_{ij} &= D(-iX_k)^i_j = -iC_{kj}^i = if_{kj}^i = +i\varepsilon_{kji} \\ &= -i\varepsilon_{ijk}. \end{aligned}$$

Autre forme équivalente des générateurs de la représentation adjointe, que l'on obtient facilement par changement de base :

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

• Moment orbital (représentation de dimension infinie) :

Considérons l'espace des fonctions d'ondes de carré intégrable  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . On définit la représentation

$${}^R\psi = D(R)\psi$$

telle que

$${}^R\psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}) \text{ (rotation active).}$$

Cette représentation est unitaire, puisque

$$\begin{aligned} \int |{}^R\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} &= \int |\psi(R^{-1}\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \\ &= \int |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r}_1 \quad (\vec{r}_1 = R^{-1}\vec{r}), \end{aligned}$$

comme nous l'avons déjà vérifié page 33. Pour une rotation infinitésimale, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} {}^R\psi(\vec{r}) &= \psi(\vec{r} - \alpha \vec{t} \wedge \vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \alpha (\vec{t} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \\ &= \psi(\vec{r}) - \alpha (\vec{r} \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{t} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\vec{J} = \frac{1}{i} \vec{r} \wedge \vec{\nabla} \quad \text{noté} \quad \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}.} \quad (5.27)$$

**Forme exponentielle :**

Pour finir, montrons que les opérateurs  $D(U)$  d'une représentation unitaire de  $SU(2)$  peuvent se calculer connaissant  $U$  et les générateurs de la représentation. On a

$$D(U(\varepsilon, \vec{n})) D(U(\theta, \vec{n})) = D(U(\varepsilon + \theta, \vec{n})) \quad (5.28)$$

donc

$$\begin{aligned} D(U(\varepsilon, \theta, \vec{n})) - D(U(\theta, \vec{n})) &= [D(U(\varepsilon, \vec{n})) - 1] D(U(\theta, \vec{n})) \\ &= -i\varepsilon \vec{J} \cdot \vec{n} D(U(\theta, \vec{n})) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{d\theta} D(U(\theta, \vec{n})) = -i\vec{J} \cdot \vec{n} D(U(\theta, \vec{n}))$$

et

$$\boxed{D(U(\theta, \vec{n})) = \exp -i\theta \vec{J} \cdot \vec{n}}. \quad (5.29)$$

*Remarque :* on n'aura pas l'équivalent de (5.28) pour le groupe de Lorentz restreint  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , ce qui explique pourquoi on ne pourra écrire tout élément de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  comme l'exponentielle d'un élément de son algèbre de Lie.

## 5.7 Représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$

$SU(2)$  est un groupe compact, donc d'après le théorème général énoncé page 4.3.4, **les représentations de  $SU(2)$  sont équivalentes à des représentations unitaires, et toute représentation irréductible est de dimension finie.**

### 5.7.1 Spectre

La structure d'algèbre de Lie

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \quad (5.30)$$

implique que le Casimir  $J^2 \equiv \vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$  commute avec tous les générateurs  $J_i$ , comme on peut le vérifier directement. C'est une conséquence immédiate du résultat général démontré dans l'exercice 4.2. D'après le Lemme de Schur,  $J^2$  est donc un multiple de l'identité, que l'on écrira sous la forme  $J^2 = j(j+1)\mathbb{1}$  avec  $j(j+1)$  positif. On peut choisir de prendre  $j$  réel positif sans perte de généralité.

L'algèbre de Lie de  $SU(2)$  que nous avons considéré est l'algèbre de Lie *réelle* définie par les constantes de structure (5.30). Il est techniquement pratique d'introduire une autre algèbre de Lie réelle ayant la même extension complexe que celle de  $SU(2)$ . On pose donc

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2. \quad (5.31)$$

L'algèbre de Lie réelle formée à partir des générateurs  $J^\pm$  et  $J_3$  a alors pour structure

$$[J_3, J_+] = J_+, \quad [J_3, J_-] = -J_- \quad \text{et} \quad [J_+, J_-] = 2J_3. \quad (5.32)$$

On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} J_+ J_- &= J^2 - J_3 (J_3 - 1) \\ J_- J_+ &= J^2 - J_3 (J_3 + 1). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Soit  $|jm\rangle$  un état propre de  $J^2$  et  $J_3$  de valeurs propres respectives  $j(j+1)$  et  $m$  (*remarque* : si  $J^2$  et  $J_3$  ne forment pas un Ensemble Complet d'Observables Commutantes,  $|jm\rangle$  est un état particulier choisi une fois pour toute dans le sous-espace de moment cinétique  $(jm)$ ).

On peut alors écrire

$$J_3 |jm\rangle = m |jm\rangle,$$

et

$$\begin{aligned} J_- J_+ |jm\rangle &= J^2 |jm\rangle - J_3 (J_3 + 1) |jm\rangle \\ &= [j(j+1) - m(m+1)] |jm\rangle = (j-m)(j+m+1) |jm\rangle \end{aligned} \quad (5.34)$$

d'où

$$\langle jm | J_- J_+ |jm\rangle = (j-m)(j+m+1) = \|J_+ |jm\rangle\|^2,$$

qui est par définition positif ou nul. On en déduit donc que  $(j-m)(j+m+1) \geq 0$ , d'où

$$-j-1 \leq m \leq j. \quad (5.35)$$

On peut reproduire le même raisonnement avec l'opérateur  $J_+ J_-$ , ce qui permet de montrer que  $(j+m)(j-m+1) \geq 0$ , d'où l'on déduit que

$$-j \leq m \leq j+1 \quad (5.36)$$

puisque  $\|J_- |jm\rangle\|^2 \geq 0$ . Les inégalités (5.35) et (5.36) donnent finalement

$$-j \leq m \leq j. \quad (5.37)$$

De plus, comme  $v = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0$ , on en déduit que

$$J_+ |jm\rangle = 0 \Leftrightarrow (j-m)(j+m+1) = 0 \quad \text{soit (puisque } m \in [-j, j]) \quad m = j \quad (5.38)$$

et

$$J_- |jm\rangle = 0 \Leftrightarrow (j+m)(j-m+1) = 0 \quad \text{soit (puisque } m \in [-j, j]) \quad m = -j. \quad (5.39)$$

Dans le cas où  $m \neq j$ , le vecteur non nul  $J_+ |jm\rangle$  est un vecteur de moment cinétique  $(j, m+1)$ .

*Preuve:*

$J^2$  étant un Casimir,  $J^2 J_+ |jm\rangle = J_+ J^2 |jm\rangle = j(j+1) J_+ |jm\rangle$ . De plus (5.32) implique que  $J_3 J_+ = J_+ (J_3 + 1)$  ce qui donne après action sur le ket  $|jm\rangle$ ,

$$J_3 J_+ |jm\rangle = J_+ (J_3 + 1) |jm\rangle = (m+1) J_+ |jm\rangle.$$

On montre de même que  $J_- |jm\rangle$  est un vecteur de moment cinétique  $(j, m-1)$ .

Considérons à présent la suite de vecteurs obtenus par application répétée de  $J_+$  sur  $|jm\rangle$  :

$$J_+ |jm\rangle, J_+^2 |jm\rangle, \dots, J_+^p |jm\rangle$$

pour  $-j \leq m \leq j$  :

- ★ si  $m = j$ ,  $J_+ |jm\rangle = 0$
- ★ si  $m < j$ ,  $J_+ |jm\rangle$  est un vecteur non nul de moment cinétique  $(j, m+1)$  donc nécessairement  $m+1 \leq j$
- ★ si  $m+1 = j$ ,  $J_+^2 |jm\rangle = 0$
- ★ si  $m+1 < j$ ,  $J_+^2 |jm\rangle \neq 0$ , de moment cinétique  $(j, m+2)$
- etc...*

Les vecteurs de cette suite doivent tous s'annuler à partir d'un certain rang : sinon on serait parvenu à former des vecteurs propres de  $J_3$  dont la valeur propre serait arbitrairement grande, et en particulier supérieure à  $j$ .

Donc  $\exists p \in \mathbb{N}$  tel que  $J_+^p |jm\rangle \neq 0$ , de moment cinétique  $(j, m+p)$  et vérifiant  $J_+^{p+1} |jm\rangle = 0$ . Ainsi  $m+p = j$ , ce qui prouve que  $j-m \in \mathbb{N}$ .

On peut de même agir de façon répétée sur  $|jm\rangle$  à l'aide de  $J_-$ . On en déduit alors que  $j+m = q \in \mathbb{N}$ ,

d'où les  $p+q+1$  états

$$J_-^q |jm\rangle, J_-^{q-1} |jm\rangle, \dots, J_- |jm\rangle, |jm\rangle, J_+ |jm\rangle, \dots, \overbrace{J_+^p |jm\rangle}^{\text{vecteur de plus haut poids}}$$

$$m-q = -j \quad -j+1 \quad \quad \quad n-1 \quad m \quad m+1 \quad m+p = j$$

où l'on a indiqué sous chaque vecteur la valeur propre de  $J_3$ .

La valeur propre de  $J^2$  pour chacun de ces états est  $j(j+1)$ . Comme  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}$ , on en déduit que  $p+q = j+m+j-m = 2j \in \mathbb{N}$  et donc que

$$\boxed{j \text{ est entier ou demi-entier .}}$$

### 5.7.2 Vecteurs propres de $J^2$ et $J_3$ et construction des sous-espaces invariants $\mathcal{E}^{(j)}$

Il nous reste à normaliser les  $2j+1$  vecteurs précédents. Supposons que  $|jm\rangle$  soit de norme 1.

- si  $m = j$ ,  $J_+ |jm\rangle = 0$

•  $m < j$ , notons  $|j m + 1\rangle$  le vecteur de norme 1 qui vérifie  $J_+ |j m\rangle = c_m |j m + 1\rangle$ . Comme  $\|J_+ |j m\rangle\|^2 = j(j+1) - m(m+1)$ , en choisissant  $c_m \in \mathbb{R}_+$  on aura

$$J_+ |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j m + 1\rangle.$$

Si l'on fait agir  $J_-$  à gauche dans l'égalité précédente, on aura donc, en utilisant (5.34),

$$J_- J_+ |j m\rangle = [j(j+1) - m(m+1)] |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} J_- |j m + 1\rangle$$

d'où

$$J_- |j m + 1\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j m\rangle.$$

On peut répéter les manipulations précédentes sur  $|j m + 1\rangle$  :

- si  $m + 1 = j$ ,  $J_+ |j m + 1\rangle = 0$
- sinon on forme  $|j m + 2\rangle$  de norme 1,
- etc... jusqu'au vecteur de plus haut poids  $|j j\rangle$ .

De même par action répétée de  $J_-$ .

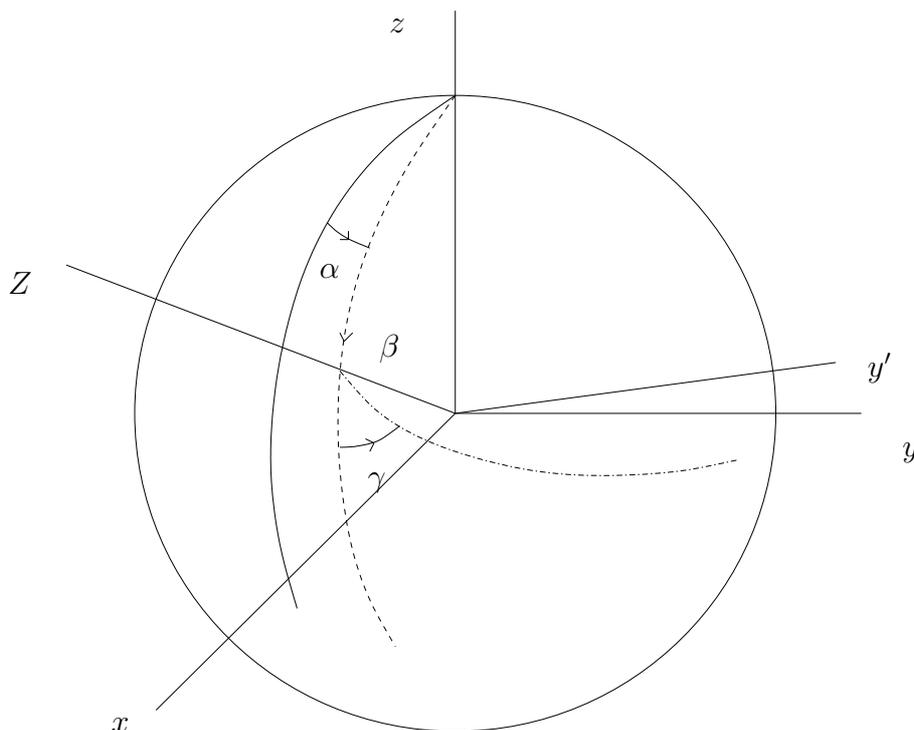
Les opérateurs  $J_+$  et  $J_-$  sont généralement appelés opérateurs d'échelle, puisqu'ils permettent respectivement de monter ou de descendre le long de l'échelle des états propres de  $J_3$ .

On obtient ainsi une suite de  $2j + 1$  vecteurs orthonormés  $|j - j\rangle, \dots, |j j\rangle$  qui sous-tendent l'espace  $\mathcal{E}^{(j)}$  de la représentation irréductible  $D^j$  de dimension  $2j + 1$ . Ces vecteurs satisfont les relations

$$\begin{aligned} \langle j m | j m' \rangle &= \delta_{mm'} \\ J_3 |j m\rangle &= m |j m\rangle \\ J_+ |j m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j m + 1\rangle \\ J_- |j m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j m - 1\rangle. \end{aligned} \quad (5.40)$$

## 5.8 Angles d'Euler

Les angles d'Euler permettent de paramétrer une rotation quelconque. C'est un outil classique de la mécanique du solide, qui permet de coder la position arbitraire d'un objet à l'aide de trois angles.



Considérons une courbe dessinée en continu sur la figure ci-dessus, que l'on cherche à amener dans la position finale tracée en traits pointillés-tirés, grâce à une transformation de  $SO(3)$  dont nous souhaitons trouver une paramétrisation. Nous allons pour cela utiliser 3 transformations successives :

- rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $Oz$  :  $R(U(\alpha, z))$
- rotation d'angle  $\beta$  autour de  $Oy'$  ( $Oy'$  est le transformé de  $Oy$  par  $R(U(\alpha, z))$ ) :  $R(V)$  avec  $V = U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)$ , d'après la relation (5.18)
- rotation d'angle  $\gamma$  autour de  $OZ$  ( $OZ$  est le transformé de  $Oz$  par la succession des rotations  $R(U(\alpha, z))$  puis  $R(U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z))$ , i.e. transformé par  $R(U(\alpha, z)U(\beta, y)) \equiv R(T)$ ).

Cette rotation s'écrit donc  $R(W)$  avec  $W = TU(\gamma, z)T^{-1}$ , soit encore

$$W = U(\alpha, z)U(\beta, y)U(\gamma, z)U^{-1}(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)$$

Au total, la rotation complète s'écrit  $R = R(U)$  avec

$$\begin{aligned} U &= WVU(\alpha, z) \\ &= U(\alpha, z)U(\beta, y)U(\gamma, z)U^{-1}(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)U(\alpha, z) \end{aligned}$$

soit encore

$$\boxed{U = U(\alpha, z)U(\beta, y)U(\gamma, z)}. \quad (5.41)$$

*Remarques:*

- la convention utilisée ici est différente de celle de Wigner (où  $\gamma \leftrightarrow \alpha$ )

- $OZ$ , transformé de  $Oz$ , s'obtient aussi par la rotation

$R(U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z))$  (puisque la première rotation  $R(U(\alpha, z))$  n'affecte pas l'axe  $Oz$ ).

On aurait alors  $T' = U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)$  et  $W' = T'U(\gamma, z)T'^{-1}$  donc

$$\begin{aligned} U = W' V U(\alpha, z) &= U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)U(\gamma, z)U(\alpha, z)U^{-1}(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z) \\ &\quad \times U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)U(\alpha, z) \\ &= U(\alpha, z)U(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z)U(\gamma, z)U(\alpha, z). \end{aligned}$$

Comme  $[U(\alpha, z), U(\gamma, z)] = 0$ , on a encore  $U = U(\alpha, z)U(\beta, y)U(\gamma, z)$ , ce qui est donc bien identique à (5.41).

- Domaine de variation des paramètres :

$$SO(3) : \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in [0, 2\pi] \\ \beta \in [0, \pi] \\ \gamma \in [0, 2\pi] \end{array} \right. \quad SU(2) : \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in [0, 2\pi] \\ \beta \in [0, \pi] \\ \gamma \in [0, 4\pi] \end{array} \right.$$

- autre point de vue :

$R(U)$  avec  $U = U(\alpha, z)U(\beta, y)U(\gamma, z)$  peut aussi être interprétée littéralement : rotation d'angle  $\gamma$  par rapport à l'axe  $y$ , puis rotation d'angle  $\beta$  par rapport à l'axe  $y$ , puis rotation d'angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $z$ , tous ces axes étant ici les axes du repère **fixe** initial.

### Expression explicite :

$$\begin{aligned} U(\alpha, z) &= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ U(\beta, y) &= \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \\ U(\gamma, z) &= \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément que

$$U = U(\alpha, z)U(\beta, y)U(\gamma, z) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\gamma/2} & -e^{-i\alpha/2} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\gamma/2} \\ e^{i\alpha/2} \sin \frac{\beta}{2} e^{-i\gamma/2} & e^{i\alpha/2} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

### Propriétés de symétrie de la paramétrisation d'Euler :

- transposition :

$$U \leftrightarrow \tilde{U} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha \leftrightarrow \gamma \\ \beta \leftrightarrow -\beta \end{array} \right. \quad (5.43)$$

car  $U = U(\alpha, z)U(\beta, y)U(\gamma, z)$  et

$$\tilde{U} = \tilde{U}(\gamma, z)\tilde{U}(\beta, y)\tilde{U}(\alpha, z) = U(\gamma, z)U(-\beta, y)U(\alpha, z)$$

• inversion :

$$U \leftrightarrow U^+ = U^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leftrightarrow -\gamma \\ \beta \leftrightarrow -\beta \end{cases} \quad (5.44)$$

car  $U^{-1} = U^{-1}(\gamma, z)U^{-1}(\beta, y)U^{-1}(\alpha, z) = U(-\gamma, z)U(-\beta, y)U(-\alpha, z)$ .

## 5.9 Définition des matrices de rotation

Considérons un élément de  $SU(2)$  codé par les angles d'Euler (5.41) et sa représentation correspondante dans  $\mathcal{E}^{(j)}$  qui s'écrit, d'après (5.29),

$$\boxed{\mathcal{D}(U) = \exp -i\alpha J_3 \exp -i\beta J_2 \exp -i\gamma J_3 .} \quad (5.45)$$

Par définition, les matrices de rotation sont définies par

$$\boxed{\mathcal{D}_{mm'}^j(U) = \langle jm | \mathcal{D}(U) | jm' \rangle .} \quad (5.46)$$

On a donc

$$\mathcal{D}_{mm'}^j(U) = e^{-i\alpha} \langle jm | \exp -i\beta J_2 | jm' \rangle e^{-im'\gamma} .$$

On pose par définition

$$d_{mm'}^j(\beta) = \langle jm | \exp -i\beta J_2 | jm' \rangle = \mathcal{D}_{mm'}^j(U(0, \beta, 0)) , \quad (5.47)$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{D}_{mm'}^j(U) = e^{-i\alpha} d_{mm'}^j(\beta) e^{-im'\gamma} .} \quad (5.48)$$

Comme  $iJ_2 = \frac{1}{2}(J_+ - J_-)$ , les  $d_{mm'}^j$  sont réels. Notons que

$$\mathcal{D}(U) | jm \rangle = \sum_{m'} | jm' \rangle \mathcal{D}_{m'm}^j(U)$$

en accord avec

$$\langle jm'' | \mathcal{D}(U) | jm \rangle = \sum_{m'} \delta_{m'm''} \mathcal{D}_{m'm}^j(U) = \mathcal{D}_{m''m}^j(U) .$$

On notera la position des indices : les kets  $| jm' \rangle$  se transforment comme des vecteurs de base, et donc de manière duale sous l'action de  $\mathcal{D}(U)$ .

*Exemples:*

• représentation fondamentale ( $j = \frac{1}{2}$ ) :

$$d_{mm'}^{\frac{1}{2}}(\beta) = \left[ \exp \left( -i\beta \frac{\sigma_2}{2} \right) \right]_{mm'} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1/2 \ 1/2} & d_{1/2 \ -1/2} \\ d_{-1/2 \ 1/2} & d_{-1/2 \ -1/2} \end{pmatrix}$$

- représentation vectorielle ( $j = 1$ ) :

$$R(\beta, y) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} = \exp(-i\beta J_2).$$

Dans la base cartésienne,

$$J_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les états propres de  $J_3$  dans cette base cartésienne sont :  $|1\ 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$|1\ 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{J_1 + iJ_2}{\sqrt{2}} |1\ 0\rangle \quad \text{et} \quad |1\ -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{J_1 - iJ_2}{\sqrt{2}} |1\ 0\rangle.$$

Les vecteurs  $|1\ -1\rangle$ ,  $|1\ 0\rangle$  et  $|1\ 1\rangle$ , définissent une nouvelle base dite standard, dans laquelle les générateurs  $J_i$  ont la forme déjà mentionnée en (5.26).

### exercice 5.1

Vérifier que dans cette base standard, les valeurs de  $d_{mm'}^1(\beta)$  sont données par

m'	1	0	-1
m			
1	$\frac{1}{2}(1 + \cos \beta)$	$-\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}(1 - \cos \beta)$
0	$\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\cos \beta$	$-\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$
-1	$\frac{1}{2}(1 - \cos \beta)$	$\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}(1 + \cos \beta)$

## 5.10 Transformation des états et des observables sous une rotation

Nous nous proposons d'interpréter physiquement l'équation

$$D(U)|jm\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^j(U)|jm'\rangle. \quad (5.49)$$

On a vu dans la partie 5.6 que

$$D(U) \vec{J} \cdot \vec{k} D^{-1}(U) = \vec{J} \cdot (R(U) \vec{k}), \quad (5.50)$$

donc

$$D(U) J_z D(U)^{-1} = J_z, \quad (5.51)$$

où  $OZ$  est l'axe obtenu après la rotation  $R(U)$  de l'axe  $Oz$ . Cette formule exprime comment se transforme l'observable  $J_z$  sous une rotation : si les états se transforment selon

$$|^R\psi\rangle = D(U) |\psi\rangle$$

alors les observables se transforment selon (5.51).

*Conséquences :*

- les valeurs moyennes sont invariantes :

*Preuve:*

$$\langle {}^R\psi | J_z | {}^R\psi \rangle = \langle \psi | D^\dagger(U) D(U) J_z D^{-1}(U) D(U) | \psi \rangle = \langle \psi | J_z | \psi \rangle .$$

• si  $|j m\rangle$  est état propre de  $J_z$ , alors de façon équivalente,  $D(U)|j m\rangle$  est état propre de  $J_z$ , tout deux avec la valeur propre  $m$ .

*Preuve:*

$$D(U) J_z D^{-1}(U) = J_z, \text{ i.e. } D(U) J_z = J_z D(U)$$

soit, en agissant sur l'état  $|j m\rangle$ ,  $D(U) J_z |j m\rangle = J_z D(U) |j m\rangle$ , d'où

$$m D(U) |j m\rangle = J_z D(U) |j m\rangle,$$

ce qui montre que  $D(U)|j m\rangle$  est état propre de  $J_z$ .

Ces deux résultats traduisent le fait que si l'on tourne à la fois les états et les axes, il ne se passe évidemment rien : pour matérialiser une rotation, il faut soit faire tourner un état en ne touchant pas au repère (point de vue actif), soit faire tourner le repère sans toucher au système (point de vue passif), mais certainement pas faire les deux opérations en même temps..!

La relation (5.49) exprime donc comment se transforment les vecteurs d'états quand on change l'axe de quantification.

La relation (5.51) donne un autre point de vue sur l'équation (5.22) : le membre de gauche traite l'opérateur  $\vec{J}$  comme un **opérateur** se transformant sous l'action d'une rotation, tandis que le membre de droite traduit le fait que cet opérateur possède 3 composantes se transformant comme un **vecteur** sous l'action du groupe des rotations. On appelle  $\vec{J}$  un **opérateur vectoriel**. En termes des composantes standards ( $J_-$ ,  $J_0 = J_3$ ,  $J_+$ ), on écrira la relation (5.22) sous la forme

$$D(U) J_m D^{-1}(U) = \sum_{m'} J_{m'}^j \mathcal{D}_{m'm}^j(U), \quad (5.52)$$

qui est une réalisation particulière (correspondant à  $j = 1$ ) de la notion plus générale d'**opérateur tensoriel irréductible de spin  $j$**  (dans le cas général, un tel

opérateur possède  $2j + 1$  composantes).

*Exemples:*

### a - Rotation agissant sur une harmonique sphérique

L'état  $\langle \vec{r} | \ell m \rangle$  est un état propre de  $L^2$ ,  $L_z$ . Cet état  $\psi_{\ell m}(\vec{r})$  est donné pour sa partie angulaire par l'harmonique sphérique  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  où  $\theta, \varphi$  sont les angles sphériques du vecteur  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ . On posera par définition

$$\langle \vec{n} | \ell m \rangle = Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = Y_{\ell m}(\vec{n}). \quad (5.53)$$

Étudions la loi de transformation des harmoniques sphériques sous l'action du groupe des rotations. Partons de la loi de transformation des états

$$D(U) | \ell m \rangle = \sum_{m'} | \ell m' \rangle D_{m'm}^{\ell}(U).$$

Il vient

$$\langle \vec{n} | D(U) | \ell m \rangle = \sum_{m'} Y_{\ell m'}(\vec{n}) D_{m'm}^{\ell}(U).$$

Déterminons  $\langle \vec{n} | D(U) :$

$${}^R\psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r})$$

est équivalent à

$$\forall \psi, \langle \vec{r} | {}^R\psi \rangle = \langle R^{-1}\vec{r} | \psi \rangle, \text{ i.e. } \langle \vec{r} | D(U) | \psi \rangle = \langle R^{-1}\vec{r} | \psi \rangle$$

ce qui montre que

$$\langle \vec{n} | D(U) = \langle R^{-1}\vec{n} |.$$

Ainsi  $\langle R^{-1}\vec{n} | \ell m \rangle = \sum_{m'} Y_{\ell m'}(\vec{n}) D_{m'm}^{\ell}(U)$ , soit

$$\boxed{Y_{\ell m}(R^{-1}\vec{n}) = \sum_{m'} D_{m'm}^{\ell}(U) Y_{\ell m'}(\vec{n}).} \quad (5.54)$$

Physiquement cette relation exprime par exemple comment se transforment les orbitales quand on fait tourner un atome (par exemple une orbitale  $p$ ) :

figure

Seuls les états d'un moment angulaire donné interviennent dans la décomposition.

### b - Rotation agissant sur un spineur

Pour une fonction d'onde scalaire l'opérateur de rotation correspondant à une rotation active d'angle  $\theta$  et d'axe  $\vec{n}$  s'écrit

$$D(U) = \exp(-i\theta \vec{L} \cdot \vec{n}).$$

Certains états physiques, décrivant des systèmes possédant un spin intrinsèque  $\frac{1}{2}$ , se transforment selon la représentation de générateurs

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \text{agissant dans } \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_s.$$

L'état transformé par rotation s'écrira donc

$$|^R\psi\rangle = \exp\left[-i\theta\left(\vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \cdot \vec{n}\right] |\psi\rangle.$$

$\vec{L}$  et  $\vec{\sigma}$  opérant dans deux espaces différents,  $|\psi\rangle$  s'écrira

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \left|\frac{1}{2}, \sigma\right\rangle |\psi_{\sigma}\rangle \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_r$$

où les états  $|\frac{1}{2}, \sigma\rangle$  sous-tendent la représentation spinorielle. On définit les fonctions d'onde  $\psi_{\sigma}(r)$  par la relation

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} \left|\frac{1}{2}, \sigma'\right\rangle |\psi\rangle &= \sum_{\sigma} \langle \frac{1}{2}, \sigma' | \frac{1}{2}, \sigma \rangle \langle \vec{r} | \psi_{\sigma} \rangle \\ &= \sum_{\sigma} \delta_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma}(\vec{r}) = \psi_{\sigma'}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Déterminons la loi de transformation des fonctions d'onde sous l'action du groupe des rotations :

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} \left|\frac{1}{2}, \sigma'\right\rangle |^R\psi\rangle &= {}^R\psi_{\sigma'}(\vec{r}) = \langle \vec{r} \left|\frac{1}{2}, \sigma'\right\rangle \exp\left[-i\theta\left(\vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \cdot \vec{n}\right] |\psi\rangle \\ &= \sum_{\sigma} \langle \vec{r} \left|\frac{1}{2}, \sigma'\right\rangle \exp\left[-i\theta\left(\vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \cdot \vec{n}\right] \left|\frac{1}{2}, \sigma\right\rangle |\psi_{\sigma}\rangle \\ &= \sum_{\sigma} \langle \frac{1}{2}, \sigma' | \exp\left(-i\theta \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{n}\right) \left|\frac{1}{2}, \sigma\right\rangle \langle \vec{r} | \exp(-i\theta \vec{L} \cdot \vec{n}) |\psi_{\sigma}\rangle \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{{}^R\psi_{\sigma'}(\vec{r}) = \sum_{\sigma} D_{\sigma'\sigma}^{1/2}(U) \psi_{\sigma}(R^{-1}\vec{r})}. \quad (5.55)$$

### Généralisation :

Une particule de spin  $s$  se transforme selon la représentation  $\mathcal{D}_{m'm}^s(U)$ . Elle est décrite par une fonction d'onde à  $2s + 1$  composantes.

*Exemple :* une particule de spin 1 est un champ de vecteur dont les 3 composantes standards  $\psi_{10}(\vec{r})$ ,  $\psi_{11}(\vec{r})$  et  $\psi_{1-1}(\vec{r})$  correspondent aux 3 composantes d'un champ de vecteur  $V_i(\vec{r})$   $i = 1, 2, 3$  dont on sait qu'il se transforme selon

$${}^R V_i(\vec{r}) = R_{ij} V_j(R^{-1}\vec{r}).$$

## 5.11 Représentation à une phase près de $SO(3)$

Nous avons vu dans la partie 5.4 qu'aux deux éléments  $U$  et  $-U$  de  $SU(2)$  correspondent la même rotation par morphisme. Cela a une conséquence immédiate sur les représentations de  $SU(2)$  et de  $SO(3)$ . Montrons que

$$\boxed{\mathcal{D}^j(-U) = (-1)^{2j} \mathcal{D}^j(U)} . \quad (5.56)$$

*Preuve:*

En utilisant la paramétrisation (5.42) de  $SU(2)$  en terme des angles d'Euler, on constate que la transformation  $U \rightarrow -U$  peut s'obtenir par le remplacement  $\gamma \rightarrow \gamma + 2\pi$ . En utilisant la relation (5.48), on a donc

$$\mathcal{D}_{mm'}^j(U) = e^{-im\alpha - im'\gamma} d_{mm'}^j(\beta)$$

qui se transforme en

$$\mathcal{D}_{mm'}^j(-U) = e^{-im\alpha} e^{-im'\gamma} d_{mm'}^j(\beta) e^{-im'2\pi} .$$

Or d'après l'analyse du spectre des représentations irréductibles  $D^j$  de  $SU(2)$  (voir 5.7.1),  $2m$  a même parité que  $2j$ , d'où le résultat.

*Conséquences :*

- pour  $j$  entier,  $\mathcal{D}^j(U) = \mathcal{D}^j(-U)$ . Donc  $\mathcal{D}^j(U)$  forme une représentation de  $SO(3)$ .

- pour  $j$  demi entier  $\mathcal{D}^j(U) = -\mathcal{D}^j(-U)$ . Donc  $\mathcal{D}^j(U)$  ne forme pas une représentation de  $SO(3)$ .

Toutefois, en restreignant l'intervalle de variation des paramètres, on peut construire une représentation à une phase près de  $SO(3)$  : nous allons le montrer explicitement dans le cas  $j = \frac{1}{2}$ , pour lequel

$$\mathcal{D}^j(U) = U .$$

Soit une rotation d'angle  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) autour de l'axe  $\vec{k}$ . On lui associe

$$\mathcal{D}(U) = U_{\vec{k}}(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \sin \frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

(donc  $-U$  ne peut apparaître puisque ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ )).

Effectuons deux rotations successives d'angles  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  autour de l'axe  $\vec{k}$

1) si  $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq \pi$ , à la rotation  $R_1 R_2$  sera associé

$$U_{\vec{k}}(\varphi_1 + \varphi_2) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{pmatrix} = U(\varphi_1)U(\varphi_2)$$

et donc

$$U(R_1 R_2) = U(R_1) U(R_2).$$

2) si  $\varphi_1 + \varphi_2 > \pi$ , à la rotation  $R_1 R_2$  (qui est en fait une rotation d'angle  $2\pi - (\varphi_1 + \varphi_2)$  autour de l'axe  $-\vec{k}$ ) on associe

$$\begin{aligned} U_{-\vec{k}}(2\pi - (\varphi_1 + \varphi_2)) &= \cos\left(\pi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \sin\left(\pi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \\ &= -\left[\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right] \\ &= -U_{-\vec{k}}(\varphi_1) U_{-\vec{k}}(\varphi_2) \end{aligned}$$

donc

$$U(R_1 R_2) = -U(R_1) U(R_2).$$

La généralisation au cas de deux rotations d'axes quelconques (non identiques a priori) est aisée en utilisant la paramétrisation d'Euler. On choisit pour axe  $Oz$  l'axe de la première rotation d'angle  $\varphi_1$ . On a alors  $U(R_1) = U_{\vec{k}}(\varphi_1)$  et  $U(R_2) = U(\alpha, z) U(\beta, y) U(\gamma, z)$ . En utilisant le fait que la paramétrisation d'Euler est invariante sous la transformation

$$(\alpha \rightarrow \alpha + \pi, \beta \rightarrow -\beta, \gamma \rightarrow \gamma - \pi),$$

on peut restreindre le domaine de variation de  $\gamma$  à  $[0, \pi]$ . On définit alors  $U(\gamma, z) U(\varphi_1, z)$  en utilisant la règle définie ci-dessus, d'où l'on déduit que l'on a construit une représentation de  $SO(3)$  à une phase près (qui est  $\pm 1$  ici).

Le fait de choisir une rotation d'axe  $\vec{k}$  pour la première rotation ne joue bien sûr aucun rôle. On pourra s'en convaincre en utilisant la propriété (5.18) sous la forme

$$U(\varphi, \vec{n}_1) = V U(\varphi, \vec{k}) V^{-1}$$

avec  $\vec{n}_1 = R(V) \vec{k}$ , et en écrivant la seconde rotation sous la forme

$$U(R_2) = V U(\alpha, z) U(\beta, y) U(\gamma, z) V^{-1},$$

ce qui permet de ramener la discussion au cas précédent.



# Chapitre 6

## Représentations spinorielles de $SU(2)$

La méthode tensorielle est l'une des méthodes usuelles pour construire les représentations d'un groupe. Elle consiste à partir de la (les) représentation(s) fondamentale(s) du groupe, puis à construire des représentations de dimensions plus élevées par produit tensoriel, dont il s'agit ensuite d'extraire les représentations irréductibles. Dans ce chapitre, nous allons illustrer cette méthode sur le cas très important physiquement du groupe  $SU(2)$ .

### 6.1 Spineurs

Par définition, un spineur est un vecteur de  $\mathbb{C}^2$ , espace sur lequel agit la représentation fondamentale (appelée) aussi spinorielle) de  $SU(2)$ .

#### 6.1.1 Action contravariante

Pour tout  $U$  dans  $SU(2)$  on note  $U^\alpha_\beta$  les éléments de matrice de  $U$ , de sorte que  $D^{1/2}(U) = U$  agit sur les spineurs  $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^2$  selon la relation matricielle usuelle

$$\xi^\alpha \rightarrow U^\alpha_\beta \xi^\beta = \xi'^\alpha \quad (6.1)$$

qui décrit l'action de  $U$  sur le spineur **contravariant**  $\xi^\alpha$ .

#### 6.1.2 Métrique

La matrice

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2). \quad (6.2)$$

dont nous avons déjà étudié les propriétés en 5.3, permet de définir le produit scalaire de 2 spineurs :

$$\langle \phi, \xi \rangle = {}^t \phi C \xi = \phi^\alpha C_{\alpha\beta} \xi^\beta = \phi^1 \xi^2 - \phi^2 \xi^1.$$

Ce produit scalaire est invariant sous les rotations  $R(U)$ .

*Preuve:*

$$\langle \phi, \xi \rangle = \det \begin{pmatrix} \phi^1 & \xi^1 \\ \phi^2 & \xi^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{U} \left( U \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \right) = U \begin{pmatrix} \phi^1 & \xi^1 \\ \phi^2 & \xi^2 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Comme  $\det U = 1$ ,  $\langle \phi, \xi \rangle$  est invariant.

Cette invariance ne doit pas nous surprendre :

$$\langle \phi, \xi \rangle = {}^t\phi C \xi \xrightarrow{U} {}^t\phi {}^tU C U \xi.$$

Or d'après la relation (5.11),

$${}^tU C U = C,$$

d'où l'invariance immédiate de ce produit scalaire,  $\forall U \in SL(2, \mathbb{C})$ .

A une constante multiplicative près,  $C$  est le seul tenseur  $2 \times 2$  invariant sous  $SL(2, \mathbb{C})$ .

*Preuve:*

Il s'agit de résoudre l'équation en  $G$

$$\forall U \in SL(2, \mathbb{C}), {}^tU G U = G. \quad (6.4)$$

Comme  $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ , on peut se limiter à résoudre l'équation pour  $U \in SU(2)$ . Il suffira alors de vérifier que la solution obtenue est valable sur tout  $SL(2, \mathbb{C})$ .

$$\forall U \in SU(2), U^\dagger U = 1 \quad \text{i.e.} \quad {}^tU = \bar{U}^{-1}$$

donc (6.4) s'écrit encore  $\bar{U}^{-1} G U = G$ , soit

$$G U = \bar{U} G. \quad (6.5)$$

Soit  $U$  un élément de  $SU(2)$ , paramétré suivant (5.3) sous la forme

$$U = \cos \frac{\theta}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2}.$$

D'après la forme des matrices de Pauli (5.4),

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1, \quad \bar{\sigma}_2 = -\sigma_2, \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_3 = \sigma_3.$$

donc si  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , en notant  $\tilde{\vec{n}} = (n_1, -n_2, n_3)$ , (notation non orthodoxe qui ne sera pas utilisée en dehors de cette preuve), on aura

$$\bar{U} = \cos \frac{\theta}{2} + i \vec{\sigma} \cdot \tilde{\vec{n}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Cherchons  $G$  sous la forme

$$G = a_0 \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}.$$

Alors (6.5) s'écrit encore

$$\left( \cos \frac{\theta}{2} + i \vec{\sigma} \cdot \tilde{\vec{n}} \sin \frac{\theta}{2} \right) (a_0 \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = (a_0 \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \tilde{\vec{n}} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

soit explicitement

$$\begin{aligned} & a_0 \cos \frac{\theta}{2} + i a_0 \vec{\sigma} \cdot \tilde{\vec{n}} \sin \frac{\theta}{2} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \cos \frac{\theta}{2} + i \tilde{\vec{n}} \cdot \vec{a} \sin \frac{\theta}{2} - (\tilde{\vec{n}} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2} \\ = & a_0 \cos \frac{\theta}{2} - i a_0 \vec{\sigma} \cdot \tilde{\vec{n}} \sin \frac{\theta}{2} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \cos \frac{\theta}{2} - i \tilde{\vec{n}} \cdot \vec{a} \sin \frac{\theta}{2} - (\tilde{\vec{n}} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit par identification des termes proportionnels à  $\mathbb{1}$  que  $\tilde{\vec{n}} \cdot \vec{a} = -\vec{n} \cdot \vec{a}$  pour tout  $\vec{n}$ , i.e. que  $a_1 = a_3 = 0$ . Ceci implique que  $\tilde{\vec{n}} \wedge \vec{a} = \vec{n} \wedge \vec{a}$ , d'où l'on déduit par identification des termes proportionnels à  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que  $a_0 = 0$ , ce qui montre que  $G$  est multiple de  $C$ .

D'après la relation (5.12), la solution obtenue pour  $U \in SU(2)$  est bien solution de l'équation (6.5) pour tout  $U \in SL(2, \mathbb{C})$ , ce qui achève la preuve.

*Remarques:*

- les éléments d'une matrice sont notés  $U^\alpha_\beta$  à l'exception de la matrice  $C$  qui définit la métrique, dont les éléments de matrice sont notés  $C_{\alpha\beta}$ , ce qui va permettre de définir un calcul covariant cohérent. Les éléments de matrices de  ${}^tU$  sont notés  $({}^tU)^\alpha_\beta = U^\beta_\alpha$ .

- $\langle \phi, \phi \rangle = 0$  donc on ne peut utiliser ce produit scalaire pour définir une norme sur les spineurs. On verra plus loin comment construire une norme adaptée.

- Ces spineurs interviennent pour décrire des particules de spin  $\frac{1}{2}$  non relativistes : les fonctions d'onde solution de l'équation de Pauli, qui sera étudiée au chapitre 12, se transforment comme ces spineurs.

## 6.2 Calcul tensoriel

Un calcul tensoriel peut être défini grâce à la métrique  $C$ .

### 6.2.1 spineur covariant

Etant donné un spineur contravariant  $\xi^\alpha$  se transformant suivant (6.1), on définit le spineur covariant  $\xi_\alpha$  par

$$\boxed{\xi_\alpha = C_{\alpha\beta} \xi^\beta.} \quad (6.6)$$

Par définition

$$C^{\alpha\beta} \equiv (C^{-1})_{\alpha\beta} \quad \text{i.e.} \quad C^{\alpha\beta} C_{\beta\alpha'} = \delta^{\alpha}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après les propriétés de la matrice  $C$  (voir (5.8)),  $(C^{-1})_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}$  donc  $C^{\alpha\beta} = (C^{-1})_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}$ . On peut donc en déduire que

$$\boxed{\xi^{\alpha} = C^{\alpha\beta} \xi_{\beta}.} \quad (6.7)$$

*Preuve:*  $C^{\beta'\alpha} \xi_{\alpha} = C^{\beta'\alpha} C_{\alpha\beta} \xi^{\beta} = \delta^{\beta'}_{\beta} \xi^{\beta} = \xi^{\beta'}$ .

Ainsi, on monte ou on descend les indices à l'aide de  $C^{\alpha\beta}$  ou  $C_{\alpha\beta}$ . En particulier, puisque  $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \phi, \xi \rangle &= \phi^{\alpha} C_{\alpha\beta} \xi^{\beta} = \phi^{\alpha} \xi_{\alpha} = -\phi^{\alpha} C_{\beta\alpha} \xi^{\beta} \\ &= -C_{\beta\alpha} \phi^{\alpha} \xi^{\beta} \\ &= -\phi_{\beta} \xi^{\beta} = -\phi_{\beta} C^{\alpha\beta} \xi_{\alpha} = \phi_{\beta} C^{\beta\alpha} \xi_{\alpha} \end{aligned} \quad (6.8)$$

### 6.2.2 action d'une rotation sur un spineur covariant

Montrons que sous l'action de  $SU(2)$ ,

$$\boxed{\xi_{\alpha} \text{ se transforme comme } \bar{\xi}^{\alpha}.} \quad (6.9)$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} \xi'^{\alpha} &= U^{\alpha}_{\beta} \xi^{\beta} = U^{\alpha}_{\beta} C^{\beta\alpha_1} \xi_{\alpha_1} \\ \text{donc } \xi'_{\alpha_2} &= C_{\alpha_2\alpha} U^{\alpha}_{\beta} C^{\beta\alpha_1} \xi_{\alpha_1}. \end{aligned}$$

D'après les propriétés vue en (5.8),  $CUC^{-1} = {}^tU^{-1}$ . Cette propriété s'écrit

$$C_{\alpha_2\alpha} U^{\alpha}_{\beta} (C^{-1})_{\beta\alpha_1} = ({}^tU^{-1})^{\alpha_2}_{\alpha_1}, \quad \text{i.e.} \quad U^{\alpha_1}_{\alpha_2} = (U^{-1})^{\alpha_1}_{\alpha_2}.$$

Pour  $U \in SU(2)$ ,  $U^{-1} = U^{\dagger}$  donc  ${}^tU^{-1} = \bar{U}$  et  $CUC^{-1} = \bar{U}$ , ce qui donne ici  $C_{\alpha_2\alpha} U^{\alpha}_{\beta} C^{\beta\alpha_1} = \bar{U}^{\alpha_2}_{\alpha_1}$ , d'où  $\xi'_{\alpha_2} = \bar{U}^{\alpha_2}_{\alpha_1} \xi_{\alpha_1}$ . Les  $\bar{U}^{\alpha_2}_{\alpha_1}$  sont les éléments de matrice de  $\bar{U}$ , qui est bien la matrice de transformation de  $\bar{\xi} : \bar{\xi}'^{\alpha_2} = \bar{U}^{\alpha_2}_{\alpha_1} \bar{\xi}^{\alpha_1}$ .

### 6.2.3 Equivalence des représentations $U$ et $\bar{U}$

Pour tout  $U \in SU(2)$ ,  $CUC^{-1} = \bar{U}$  donc les représentations données par  $U$  et  $\bar{U}$  sont équivalentes. Ainsi

La représentation  $U$  agissant sur les spineurs contravariants est équivalente à la représentation  $\bar{U}$  agissant sur les spineurs covariants.

Ceci est très spécifique au groupe  $SU(2)$ . Ce n'est pas vrai en général pour  $SU(N)$ , dès que  $N > 2$ . Par exemple, pour  $SU(3)$  utilisé comme groupe de jauge de QCD, les représentations fondamentales  $3$  et  $\bar{3}$  correspondants aux quarks et aux antiquarks ne sont pas équivalentes. De même, comme on le verra au chapitre 9, ce n'est pas vrai sur  $SL(2, \mathbb{C})$

*Remarque:*

On a vu plus haut que  $C$  est la seule métrique invariante sous  $SL(2, \mathbb{C})$ . D'autre part, si  $G$  est la métrique qui fait passer des spineurs contravariants aux spineurs covariants, et que l'on souhaite imposer que les spineurs covariants se transforment sous la représentation complexe conjuguée  $\bar{U}$ , alors si  $\xi' = U \xi$  pour  $\xi$  contravariant,

$$\underbrace{G \xi'}_{\text{spineur covariant}} = \underbrace{G U G^{-1}}_{\bar{U}} \underbrace{G \xi}_{\text{spineur covariant}}$$

donc  $G$  doit satisfaire  $\bar{U} = G U G^{-1}$ . On retrouve donc la même équation qui nous a servi à définir une métrique invariante sous  $SU(2)$  et l'on en déduit que  $G$  doit être proportionnel à  $C$ .

#### 6.2.4 Norme sur les spineurs

La remarque précédente permet de déduire que la seule norme (à une constante multiplicative près) invariante sous  $SU(2)$  et définie positive est

$$\|\xi\|^2 = {}^t \xi \bar{\xi} = \xi^1 \bar{\xi}^1 + \xi^2 \bar{\xi}^2 \quad (6.10)$$

Elle sert de définition pour la densité de probabilité des particules non relativistes de spin  $1/2$ .

*Preuve (pour le lecteur admirateur de St Thomas) :*

- de façon pédestre :

$$\|\xi\|^2 = {}^t \xi \bar{\xi} = ({}^t \xi)_\alpha \bar{\xi}^\alpha = \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha$$

$$\xi'^{\alpha} \bar{\xi}'^{\alpha} = U^{\alpha}_{\alpha'} \xi^{\alpha'} \bar{U}^{\alpha}_{\alpha_1} \bar{\xi}^{\alpha_1}.$$

Or  $U^{\alpha}_{\alpha'} \bar{U}^{\alpha}_{\alpha_1} = U^{\alpha}_{\alpha'} ({}^t \bar{U})^{\alpha_1}_{\alpha} = \delta^{\alpha_1}_{\alpha'}$  donc  $\|\xi\|^2 \rightarrow \|\xi'\|^2 = \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha = \|\xi\|^2$ .

- L'invariance de ce produit scalaire est bien sûr directement liée au fait que  $\xi_\alpha$  se transforme comme  $\bar{\xi}^\alpha$  :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\xi^2 \\ -\xi^1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= \xi^1 \bar{\xi}^1 + \xi^2 \bar{\xi}^2 = -\xi_2 \bar{\xi}^1 + \xi_1 \bar{\xi}^2 = -\det \begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 & \xi_1 \\ \bar{\xi}^2 & \xi_2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{SU(2)} -\det \bar{U} \begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 & \xi_1 \\ \bar{\xi}^2 & \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 & \xi_1 \\ \bar{\xi}^2 & \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car  $\det \bar{U} = 1$ .

Le lecteur avisé aura sans doute remarqué que la preuve de l'invariance de  $\|\xi\|^2$  que nous venons de donner est exactement la même que celle présentée en (6.3). En effet, d'après (6.8),

$$\langle \phi, \xi \rangle = \det(\phi^\alpha, \xi^\alpha) = \det(\phi_\alpha, \xi_\alpha)$$

et comme  $\phi_\alpha$  se transforme comme  $\bar{\phi}^\alpha$ , le résultat est immédiat.

## 6.3 Tenseurs spinoriels

### 6.3.1 Tenseurs de rang quelconque

Nous allons à présent généraliser la notion de spineur covariant et contravariant. Nous avons pour le moment manipulé les objets suivants :

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &= \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} && \text{spineur contravariant} \\ \xi_\alpha &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} && \text{spineur covariant} \end{aligned}$$

Soit  $\psi^{\alpha\beta}$  un tenseur spinoriel (ou spineur) contravariant de rang 2 (i.e. qui possède 2 indices de type contravariant). Par définition, il se transforme comme  $\xi^\alpha \phi^\beta$ .

Avec  $C_{\alpha\beta}$  on fabrique des spineurs covariants de rang 2

$$\psi_{\alpha\beta} = C_{\alpha\alpha_1} C_{\beta\beta_1} \psi^{\alpha_1\beta_1}$$

ou mixte

$$\psi_\beta{}^\alpha = C_{\beta\beta_1} \psi^{\alpha\beta_1}.$$

La généralisation à des tenseurs de rang quelconque est immédiate : par produits de spineurs contravariants et (ou) covariants on fabrique des tenseurs spinoriels (ou spineurs) de rang quelconque, se transformant suivant les types d'indices qu'il portent :

$$\Psi^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} = U^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \dots U^{\alpha_m}_{\alpha'_m} U_{\beta_1}^{\beta'_1} \dots U_{\beta_n}^{\beta'_n} \Psi^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m}_{\beta'_1 \dots \beta'_n}. \quad (6.11)$$

### 6.3.2 Tenseurs antisymétriques

Comme  $\alpha = 1, 2$ , les seuls tenseurs antisymétriques sont de rang 2. Ce sont les produits d'une constante par  $C_{\alpha\beta}$ .  $C^{\alpha\beta}$  a été défini par  $C^{\alpha\beta} = (C^{-1})_{\alpha\beta}$  de sorte que  $C_{\alpha\beta}C^{\beta\alpha} = \delta_{\alpha}^{\alpha}$  est bien le spineur unité, i.e. le spineur symétrique de rang 2 tel que  $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1$  et  $\delta_1^2 = \delta_2^1 = 0$ .

### 6.3.3 Norme sur les tenseurs spinoriels

Le produit scalaire naturel sur les tenseurs spinoriels se définit suivant

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\alpha\beta\cdots} |\psi^{\alpha\beta\cdots}|^2 = {}^t\psi\bar{\psi}$$

par extension immédiate de (6.10).

*Preuve:*

• il suffit d'utiliser le fait que  $\bar{\Psi}^{\alpha\beta\cdots}$  se transforme comme  $\Psi_{\alpha\beta\cdots}$ . En écrivant  $\Psi_{\alpha\beta\cdots} = \xi_{\alpha}\Phi_{\beta}\cdots$  on a

$$\|\psi\|^2 = (-1)^{\text{rang } \Psi} \det(\bar{\xi}^{\alpha}, \xi_{\alpha}) \det(\bar{\Phi}^{\alpha}, \Phi_{\alpha}) \cdots$$

d'où le résultat par extension de la preuve de la page 94.

• de façon pédestre,

$$\psi^{\alpha\beta\cdots} \rightarrow U^{\alpha}_{\alpha_1} U^{\beta}_{\beta_1} \cdots \psi^{\alpha_1\beta_1\cdots} \quad \text{et} \quad {}^t\psi_{\alpha\beta\cdots} = \psi^{\alpha\beta\cdots}.$$

De plus

$$\bar{\psi}^{\alpha\beta\cdots} \rightarrow \bar{U}^{\alpha}_{\alpha_1} \bar{U}^{\beta}_{\beta_1} \cdots \bar{\psi}^{\alpha_1\beta_1\cdots}$$

donc

$${}^t\psi\bar{\psi} = \psi^{\alpha\beta\cdots}\bar{\psi}^{\alpha\beta\cdots} \rightarrow \psi^{\alpha\beta\cdots}\bar{\psi}^{\alpha\beta\cdots} = U^{\alpha}_{\alpha_1} U^{\beta}_{\beta_1} \cdots \psi^{\alpha_1\beta_1\cdots} \bar{U}^{\alpha}_{\alpha'_1} \bar{U}^{\beta}_{\beta'_1} \cdots \bar{\psi}^{\alpha'_1\beta'_1\cdots}$$

or  $U^{\alpha}_{\alpha_1} \bar{U}^{\alpha}_{\alpha'_1} = U^{\alpha}_{\alpha_1} U^{\dagger\alpha'_1}_{\alpha} = (U^{\dagger}U)^{\alpha'_1}_{\alpha_1} = \delta^{\alpha'_1}_{\alpha_1}$  d'où le résultat.

### 6.3.4 Opérations sur les tenseurs spinoriels

On peut définir deux types d'opérations covariantes sur les tenseurs spinoriels :

• multiplication de deux tenseurs de rangs  $m$  et  $n$ , ce qui donne un tenseur de rang  $m+n$

• contraction de deux indices du même type par le tenseur métrique, ce qui abaisse de rang du tenseur de 2 unités.

*Exemple:*

$$\begin{aligned} C_{\nu\mu}\psi_{\lambda}^{\nu\rho\sigma\kappa\mu} &= \psi_{\lambda\nu}^{\nu\rho\sigma\kappa} \text{ est un tenseur de rang 4.} \\ C_{\nu\mu}\psi^{\mu\nu} &= \psi_{\nu}^{\nu} \text{ est un scalaire (spineur de rang 0)} \end{aligned}$$

Comme  $C$  est antisymétrique, la contraction d'un tenseur sur 2 indices symétriques donne le tenseur nul. L'opération de contraction est covariante. C'est la seule qui permette d'abaisser de façon covariante le rang d'un tenseur.

## 6.4 Représentations irréductibles de $SU(2)$

### 6.4.1 Lien avec les tenseurs spinoriels

Les spineurs complètement symétriques sur tous les indices forment les espaces de représentations irréductibles de  $SU(2)$ .

*Preuve:*

soit  $u$  un spineur de rang  $n$ ,  $u \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$   
 $(D^{1/2})^{\otimes n} : u \mapsto U_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots U_{\beta_n}^{\alpha_n} u^{\beta_1 \dots \beta_n}$   
 si  $n > 1$ , cette représentation est réductible :

$$\begin{aligned} v^{\alpha_3 \dots \alpha_n} &= C_{\alpha_1 \alpha_2} u^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \\ &= u^{12\alpha_3 \dots \alpha_n} - u^{21\alpha_3 \dots \alpha_n} \\ &\sim \underbrace{(\xi^1 \phi^2 - \xi^2 \phi^1)}_{\text{scalaire invariant}} \eta^{\alpha_3} \dots \theta^{\alpha_n} \end{aligned}$$

L'espace des  $v$  est invariant par  $(D^{1/2})^{\otimes n}$ , donc  $(D^{1/2})^{\otimes n}$  est réductible. Seuls les espaces de tenseurs complètement symétriques n'ont pas de sous-espaces invariants (puisque la contraction d'indices symétriques donne le tenseur nul).

La dimension de l'espace de représentation des spineurs complètement symétriques d'ordre  $n$  est  $n + 1$ . On symbolise ces tenseurs par la notation  $\Psi^{\{n\}}$ .

*Preuve:*

considérons une composante donnée du tenseur, par exemple  $\psi^{121}$  pour un tenseur symétrique de rang 3. Seul compte (à cause de la symétrie complète) le nombre d'indices 1 d'une part, 2 d'autre part. Dans cet exemple  $\psi^{121} = \psi^{112} = \psi^{211}$  est la composante où 1 apparaît deux fois et 2 une fois. Plus généralement, toute composante du tenseur  $u^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  se ramène à l'une des  $n + 1$  composantes suivantes :

$$u^{\overbrace{11 \dots 1}^n}, \dots, u^{\overbrace{1 \dots 1}^{n-k} \overbrace{2 \dots 2}^k}, \dots, u^{\overbrace{2 \dots 2}^n}$$

ce qui prouve le résultat.

Méthode pratique pour décomposer n'importe quel tenseur spinoriel de rang  $n$  sur les espaces de représentations irréductibles (qui sont constitués des spineurs complètement symétriques de rang  $n, n-2, n-4, \dots$ ) :

- on symétrise  $\psi^{\alpha\beta\gamma\dots}$  complètement  $\rightarrow$  tenseur symétrique de rang  $n$
- on contracte le tenseur initial sur un couple d'indices, de toute les façons possibles parmi les divers couples d'indices possibles, et l'on symétrise complètement chacun des tenseurs obtenus  $\rightarrow$  tenseurs symétriques de rang  $n-2$
- on contracte le tenseur initial sur 2 couples d'indices, on symétrise, etc ...

On peut symboliser cette procédure par

$$\psi^n = \psi^{\{n\}} + C\psi^{\{n-2\}} + CC\psi^{\{n-4\}} + \dots$$

*Exemple:*

considérons un tenseur  $\psi^{\alpha\beta}$  ( $n=2$ )

- on symétrise sur  $\alpha\beta$  :

$$\psi^{\{2\}} = \frac{1}{2} (\psi^{\alpha\beta} + \psi^{\beta\alpha})$$

- on contracte  $\psi^{\alpha\beta}$  sur 2 indices (ici on n'a pas le choix!)  $C_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta}$  est automatiquement symétrisé ici car c'est un scalaire. On obtient donc la décomposition

$$\psi^{\alpha\beta} = \underbrace{\frac{1}{2} (\psi^{\alpha\beta} + \psi^{\beta\alpha})}_{\psi^{\{2\}}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\psi^{\alpha\beta} - \psi^{\beta\alpha})}_{= C^{\alpha\beta} \cdot \underbrace{\text{scalaire}}_{\psi^{\{0\}}}}$$

$C^{\alpha\beta}C_{\beta\alpha'} = \delta_{\alpha'}^{\alpha}$  donc  $\psi^{\{0\}}$  s'obtient par contraction de  $\psi^{\alpha\beta} - \psi^{\{2\}}$  (ou de  $\psi^{\alpha\beta}$  puisque  $\psi^{\{2\}}$  est symétrique) :

$$\psi^{\{0\}} = \frac{1}{2} (\psi^{\alpha'\beta'} - \psi^{\beta'\alpha'}) C_{\alpha'\beta'} = C_{\alpha\beta} \psi^{\alpha\beta}.$$

$$\psi^{\alpha\beta} = \underbrace{\frac{1}{2} (\psi^{\alpha\beta} + \psi^{\beta\alpha})}_{\psi^{\{2\}}} + \underbrace{C^{\alpha\beta} \psi^{\alpha'\beta'} C_{\alpha'\beta'}}_{\psi^{\{0\}}}$$

spineur qui correspond  
à la représentation vectorielle

### 6.4.2 Lien avec les représentations $D^j$

Les tenseurs symétriques de rang  $2j$  étant obtenus par produit tensoriel de  $2j$  spineurs puis symétrisation, les générateurs  $J_i$  de  $SU(2)$  agissant sur ces tenseurs se définissent également par produit tensoriel, sous la forme :

$$J_i = J_i^{1/2} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes J_i^{1/2} \otimes 1 \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes J_i^{1/2} \quad (6.12)$$

où  $J_i^{1/2}$  agit sur l'espace  $\mathcal{H}_{1/2}$  de la façon usuelle :

$$\begin{aligned} J_+^{1/2} \xi^1 &= 0, & J_-^{1/2} \xi^1 &= \xi^2, & J_3^{1/2} \xi^1 &= \frac{1}{2} \xi^1, \\ J_+^{1/2} \xi^2 &= \xi^1, & J_-^{1/2} \xi^2 &= 0, & J_3^{1/2} \xi^2 &= -\frac{1}{2} \xi^2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Les générateurs  $J_i$  satisfont les relations de commutation de l'algèbre de Lie de  $SU(2)$  de manière immédiate, par application des relations de commutation des  $J_i^{1/2}$ .

Nous allons maintenant prouver le résultat important suivant, qui fait le lien entre les tenseurs spinoriels et les représentations  $\mathcal{D}(j)$  de  $SU(2)$  :

Les tenseurs symétriques de rang  $2j$  sous-tendent la représentation de dimension  $2j + 1$  du groupe  $SU(2)$ . Les vecteurs

$$\Phi_{jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m}$$

forment une base sous-tendant la représentation  $\mathcal{D}(j)$  de  $SU(2)$ .

*Preuve:*

En utilisant (6.13) on obtient

$$J_+ \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m} = (j-m) \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m+1} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m-1},$$

$$J_- \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m} = (j+m) \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m-1} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m+1},$$

$$J_3 \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m} = [(j+m)\frac{1}{2} - (j-m)\frac{1}{2}] \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m} = m \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m}.$$

D'après cette dernière relation, on peut poser

$$\Phi_{jm} = c_m \underbrace{\psi_{1 \dots 1}}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m}.$$

Alors

$$J_+ \Phi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \Phi_{j, m+1} = (j-m) \frac{c_m}{c_{m+1}} \Phi_{j, m+1}$$

et

$$J_- \Phi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \Phi_{j, m-1} = (j+m) \frac{c_m}{c_{m-1}} \Phi_{j, m-1}$$

qui donne donc les deux relations équivalentes

$$c_m = \frac{\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}}{j-m} c_{m+1} = \sqrt{\frac{j+m+1}{j-m}} c_{m+1}$$

$$c_m = \frac{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}}{j+m} c_{m-1} = \sqrt{\frac{j-m+1}{j+m}} c_{m-1}.$$

Si l'on suppose que  $\psi_{2\dots 2}$  est normalisé à 1, alors  $c_{-j} = 1$ . On en déduit que

$$c_m = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}}$$

d'où le résultat.

## 6.5 Retour sur le morphisme $SU(2) \rightarrow SO(3)$

Nous allons réexaminer le morphisme  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  à la lumière de ce que nous avons vu dans ce chapitre.

$\tilde{x}' = U\tilde{x}U^{-1}$  s'écrit

$$\tilde{x}'_{\beta}{}^{\alpha} = U_{\gamma}^{\alpha} \tilde{x}^{\gamma} (U^{-1})_{\beta}^{\delta} = U_{\gamma}^{\alpha} \bar{U}_{\delta}^{\beta} \tilde{x}_{\delta}^{\gamma} \quad (1)$$

car  $U^{-1} = U^+$  donc

$$\begin{aligned} \tilde{x}'^{\alpha\beta} &= C^{\beta\beta'} \tilde{x}'_{\beta'}{}^{\alpha} \\ &= C^{\beta\beta'} U_{\gamma}^{\alpha} \tilde{x}_{\delta}^{\gamma} (U^{-1})_{\beta'}^{\delta} \\ &= C^{\beta\beta'} U_{\gamma}^{\alpha} C_{\delta\delta'} \tilde{x}^{\gamma\delta'} U_{\beta'}^{-1\delta} \end{aligned}$$

or  $C^{\beta\beta'} C_{\delta\delta'} U_{\beta'}^{-1\delta} = C_{\delta'\delta} U_{\beta'}^{-1\delta} C^{\beta'\beta}$

(ce sont des  $\mathbb{C}$  nombres et on utilise le fait que  $C_{\delta'\delta} = -C_{\delta\delta'}$  et  $C^{\beta\beta'} = -C^{\beta'\beta}$ )

$$\begin{aligned} &= C_{\delta'\delta} U_{\beta'}^{-1\delta} (C^{-1})_{\beta'\beta} \\ &= {}^t U_{\beta}^{\delta'} \end{aligned}$$

donc  $\tilde{x}'^{\alpha\beta} = U_{\gamma}^{\alpha} \tilde{x}^{\gamma\delta'} {}^t U_{\beta}^{\delta'} = U_{\gamma}^{\alpha} U_{\delta'}^{\beta} \tilde{x}^{\gamma\delta'}$

Nous venons d'étudier un exemple particulier de transformation d'un tenseur contravariant de rang 2. Avant de généraliser la notion de tenseur, examinons la relation (1) : elle met en évidence la relation  $D^{1/2} \otimes D^{1/2} = D^0 \oplus D^1$

$\tilde{x}'^{\alpha\beta} = U_{\gamma}^{\alpha} U_{\delta}^{\beta} \tilde{x}^{\gamma\delta}$  s'écrit encore

$$\tilde{x}'^{\alpha\beta} = U_{\gamma}^{\alpha} U_{\delta}^{\beta} \left[ \frac{1}{2} \left( \tilde{x}^{\gamma\delta} + \tilde{x}^{\delta\gamma} \right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{x}^{\gamma\delta} - \tilde{x}^{\delta\delta} \right) \right]$$

tenseur spinoriel  $C^{\gamma\delta} \times$  scalaire  
symétrique d'ordre 2  $\rightarrow D^0$   
correspond à  $D^1$  (se transforme comme  $\langle \phi, \xi \rangle$ )

$$U_\gamma^\alpha U_\delta^\beta C^{\gamma\delta} = U_\delta^\beta C_{\delta\gamma} U_\gamma^\alpha = (UC {}^tU)_\alpha^\beta$$

or  $CU C^{-1} = {}^tU^{-1}$   
donc  $C {}^tUC^{-1} = U^{-1}$   
 $UC {}^tU = UU^{-1}C = c$   
or  $(C)_\alpha^\beta = C_{\beta\alpha} = C^{-\beta}$  **c.q.f.d.**  
(ou encore  $\tilde{x}_\beta^\alpha = \frac{1}{2}(x_\beta^\alpha x_\beta^\alpha) + \frac{1}{2}\underbrace{(x_\beta^\alpha - x_\beta^\alpha)}_{\sim C_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha}$ )  
 $\rightarrow$  double copie de  $D^0$ )

se transforme bien comme un vecteur

Rem. :  $\star {}^t\bar{\xi}\xi$  est un scalaire

$$\star \vec{V} = {}^t\bar{\xi}\vec{\sigma}\xi \text{ est un vecteur : } V'_i = ({}^t\bar{\xi}\vec{\sigma}\xi)'_i = {}^t\bar{\xi}U^+\sigma_i U\xi$$

or  $U^{-1}\sigma_i U = R_{ij}\sigma_j = U^+\sigma_i U$  donc  $V'_i = {}^t\bar{\xi}R_{ij}\sigma_j \xi = R_{ij}V_j$

**autre méthode :**

$$V_i = {}^t\bar{\xi}\sigma_i \xi = {}^t\bar{\xi}_\alpha \sigma_{i\beta}^\alpha \xi^\beta = \underbrace{\bar{\xi}^\alpha}_{\sim \phi_\alpha} \sigma_{i\beta}^\alpha \xi^\beta$$

se transforme comme  $\phi_\alpha$  sous  $SU(2)$

$$\sim \phi_\alpha \sigma_{i\beta}^\alpha \xi^\beta \sim \sigma_i^{\alpha\beta} \xi_{\beta\alpha}$$

or  $\sigma_i^{\alpha\beta} C_{\beta\alpha} = \sigma_{i\alpha}^\alpha = Tr \sigma_i = 0$  donc seule la partie **symétrique** de  $\xi_{\beta\alpha}$  contribue  
**c.q.f.d.**

On a la formule explicite (cf p SL-3)  $x_i = \frac{1}{2}Tr \sigma_i \tilde{x} = \frac{1}{2}\sigma_{i\beta}^\alpha \tilde{x}_\alpha^\beta$  qui inverse le morphisme.

# Chapitre 7

## Notion de groupe de recouvrement

### 7.1 Quelques définitions

★ éléments conjugués

Un élément  $T'$  d'un groupe  $G$  est dit conjugué d'un autre élément  $T$  de  $G$  s'il existe un élément  $X$  de  $G$  tel que  $T' = XTX^{-1}$ .

★ classe

Une classe d'un groupe  $G$  est un ensemble d'éléments mutuellement conjugués, i.e. c'est l'ensemble, pour  $T$  donné dans  $G$ , des  $XTX^{-1}$  avec  $X$  variant dans tout  $G$ , en ne gardant que les éléments distincts.

**Th 1**

- a) chaque élément de  $G$  appartient à une et une seule classe
- b) l'identité de  $G$  forme une classe à elle seule.

**Th 2**

Si  $G$  est abélien, chaque élément de  $G$  forme une classe à lui tout seul.

Construction de la notion de groupe quotient

**Déf. :** sous-groupe invariant (ou sous-groupe normal, ou diviseur normal)

Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est un sous-groupe invariant si  $XhX^{-1} \in H \quad \forall h \in H, \forall X \in G$ .

**Th 1**

Un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est un sous-groupe invariant si et seulement si  $H$  est entièrement constitué de classes complètes de  $G$ .

Classe à droite (gauche) modulo un groupe (coset en anglais)

**Déf. :** Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Pour tout  $t \in G$ , l'ensemble des  $ht$  pour  $h$  variant dans tout  $H$  est appelé la classe à droite de  $t$  modulo  $H$ , et notée  $Ht$ .

De même l'ensemble des  $th$  pour le variant dans  $H$  est la classe à gauche de  $t$  modulo  $H$ , et notée  $tH$ .

**Th 1**

- (a) Si  $t \in H$ , alors  $Ht = H$
- (b) Si  $t \notin H$ , alors  $Ht$  n'est pas un sous-groupe de  $G$ .
- (c) Tout élément de  $G$  appartient à une classe à droite
- (d) Deux éléments  $ht$  et  $h't$  de  $Ht$  sont différents, pourvu que  $h \neq h'$ .

En particulier si  $H$  est un sous-groupe fini d'ordre  $s$ ,  $Ht$  contient  $s$  éléments distincts.

(e) Deux classes à droite modulo  $H$  sont soit identiques, soit sans élément commun

(f) Si  $t' \in Ht$ , alors  $Ht' = Ht$ .

(g) Si  $G$  est un groupe fini d'ordre  $g$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$  d'ordre  $s$ , alors le nombre de classes distinctes à droite modulo  $H$  est égal à  $g/s$ .

**Th 2**

Les classes à droite et à gauche modulo  $H$  d'un groupe  $G$  sont identiques (i.e.  $Ht = tH \forall t \in G$ ) si et seulement si  $H$  est un sous-groupe invariant de  $G$ .

**groupe quotient**

Soit  $H$  un sous-groupe invariant d'un groupe  $G$ .

Considérons l'ensemble des classes à droite modulo  $H$ .

**Déf. :** produit de classes à droite modulo  $H$

Le produit de deux classes à droite modulo  $H$ ,  $Ht_1$ , et  $Ht_2$ , où  $H$  est un sous-groupe invariant de  $G$ , est défini par  $Ht_1 \cdot Ht_2 = H(t_1t_2)$ .

**Th**

L'ensemble des classes à droite d'un groupe  $G$  modulo un sous-groupe invariant  $H$  forme un groupe (en le munissant du produit précédent). On l'appelle groupe quotient (factor group en anglais) et on le note  $G/H$ .

**Groupe de recouvrement universel** (ou revêtement universel)

**Définition :** sous-groupe discret d'un groupe de Lie linéaire

Un sous-groupe  $H$  d'un groupe de Lie linéaire  $G$  est dit discret si

a)  $H$  est un groupe fini

ou b)  $H$  possède un nombre infini dénombrable d'éléments, tel qu'il existe un voisinage de l'identité de  $G$  qui ne contienne aucun élément de  $H$  (excepté  $e$  elle-même).

**Connexité**

Un espace topologique  $X$  est connexe si on ne peut l'écrire sous la forme  $X = X_1 \cup X_2$  avec  $X_1, X_2$  ouverts et  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ .

**Connexité par arc :**  $X$  est connexe par arc si  $\forall x, y \in X$ , il existe une application continue  $f : [0, 1] \rightarrow X$  t.q.  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ . En pratique connexité = connexité par arc.

### Définitions

★ **chemin :** soit  $X$  un espace topologique

Une application continue de  $[0, 1]$  dans  $X$  est appelée chemin de point de départ  $x_0$  et de point final  $x_1$  si  $\alpha(0) = x_0$  et  $\alpha(1) = x_1$ . Si  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ , le chemin est appelé boucle de point de base  $x_0$ .

figure

★ **produit de chemins**

Soient  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ , des chemins tels que  $\alpha(1) = \beta(0)$ . Le produit de  $\alpha$  et  $\beta$ , noté  $\alpha * \beta$ , est le chemin défini par

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

figure

★ **chemin inverse :** à  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  on associe  $\alpha^{-1}$  t.q.  $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$

★ **homotopie**

Soient  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  des boucles de base  $x_0$ . Elles sont dites homotopes (noté  $\alpha \sim \beta$ ) s'il existe une application continue  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  t.q.

$$f(s, 0) = \alpha(s) \quad ; \quad f(s, 1) = \beta(s) \quad \forall s \in [0, 1]$$

$$f(0, t) = f(1, t) = x_0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

figure

### Proposition

$\alpha \sim \beta$  est une relation d'équivalence

On note  $[\alpha]$  la classe d'homotopie de la boucle  $\alpha$

le produit  $*$  entre chemins définit alors naturellement le produit entre classes :  
 $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$

**Théorème :** soit  $X$  un espace topologique.

L'ensemble des classes d'homotopie des boucles de point de base  $x_0 \in X$ , noté  $M_1(X, x_0)$ , est un groupe. C'est le groupe fondamental (ou premier groupe d'hom-

topie) de  $X$  en  $x_0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Ex. : cercle } S^1 & \quad M_1(S^1) \cong \mathbf{Z} \\
 \text{tore } T^2 = S^1 \times S^1 & \quad M_1(T^2) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \\
 \text{plus g\u00e9n\u00e9ralement, } T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_n & \quad M_1(T^n) \cong \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}}_n \\
 \text{cylindre } X = S^1 \times \mathbb{R} & \quad M_1(X) \cong \mathbf{Z} \oplus \{e\} \cong \mathbf{Z}
 \end{aligned}$$

**Th.** : soit  $X$  un espace connexe par arc, et  $x_0, x_1 \in X$ .  
Alors  $M_1(X, x_0)$  et  $M_1(X, x_1)$  sont isomorphes.

### D\u00e9finition :

Un espace  $X$  connexe par arc poss\u00e9dant un groupe fondamental trivial est dit simplement connexe.

*Exemples* : topologie des groupes  $SU(2)$  et  $SO(3)$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2) & \quad U^+ = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} & \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \\
 (\text{car } \alpha\delta - \beta\gamma = 1) & & \\
 \text{donc } U^+ = U^{-1} & \quad \Leftrightarrow \delta = \bar{\alpha} \text{ et } \gamma = -\bar{\beta} \\
 \text{d'o\u00f9 l'écriture g\u00e9n\u00e9rique des matrices de } SU(2) : & \quad U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \\
 \text{comme } \det U = 1, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 & &
 \end{aligned}$$

**Donc chaque \u00e9l\u00e9ment de  $SU(2)$  est d\u00e9fini par la donn\u00e9e de deux nombres complexes  $(\alpha, \beta)$ , tels que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , et r\u00e9ciproquement.**

$$\text{posons } \begin{cases} \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \beta = \beta_1 + i\beta_2 \end{cases} ; \text{ alors } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \text{ s'écrit } |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 = 1$$

Donc  $SU(2)$ , comme espace topologique, est homotomorphe \u00e0 la sph\u00e8re unit\u00e9  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$ .

La connexit\u00e9 par arc et la simple connexit\u00e9 de  $S^3$  impliquent donc celle de  $SU(2)$ .

### Cas de $SO(3)$

A chaque point de  $S^3$  correspond toujours une rotation. Cependant aux points  $(1, 0, 0, 0)$  et  $(-1, 0, 0, 0)$  correspondent l'identit\u00e9 de  $SO(3)$ . Donc une courbe sur la sph\u00e8re  $S^3$  commen\u00e7ant en  $(1, 0, 0, 0)$  et finissant en  $(-1, 0, 0, 0)$  est en fait une boucle de base  $\mathbb{1}$  dans  $SO(3)$ . Il n'y a clairement aucune fa\u00e7on de d\u00e9former contin\u00fament cette boucle en le point  $(1, 0, 0, 0)$ , donc  $SO(3)$  n'est pas simplement connexe. On montre qu'il est doublement connexe :  $M_1(SO(3)) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{1, -1\}$ , la rotation d'angle  $2n$  \u00e9tant un repr\u00e9sentant de la classe non topologiquement triviale, tandis que la rotation d'angle  $4n$  est un repr\u00e9sentant de la classe triviale.

Avant de parvenir au théorème important concernant le groupe de recouvrement universel d'un groupe, il nous reste à introduire un dernier concept :

**Déf. :** centre  $Z$  d'un groupe  $G$

Le centre  $Z$  d'un groupe  $G$  est par définition le sous-groupe de  $G$  qui contient tous les éléments commutant avec chacun des éléments de  $G$ .

Propriété immédiate : tout sous-groupe de  $Z$  (et  $Z$  lui-même) est abélien et constitue un sous-groupe invariant de  $G$ . Un tel sous-groupe est appelé sous-groupe invariant central de  $G$ .

**Th. 1 :**

Si  $G$  est un groupe de Lie connexe, alors il existe un groupe de Lie simplement connexe  $\tilde{G}$  (qui est unique à isomorphisme près) tel que

a)  $G$  est analytiquement isomorphe à un groupe quotient  $\tilde{G}/K$ , où  $K$  est un sous-groupe invariant central discret de  $\tilde{G}$ , isomorphe au groupe fondamental  $M_1(G)$  de la variété sous-jacente à  $G$

b) si  $G$  est lui-même simplement connexe alors  $G$  est isomorphe à  $\tilde{G}$

c) les algèbres de Lie de  $G$  et  $\tilde{G}$  sont isomorphes

d) chaque représentation de l'algèbre de Lie de  $\tilde{G}$  est associée à une représentation du groupe  $\tilde{G}$  suivant la relation

$$\forall a \in \mathfrak{g}, \quad \Gamma_g(a) = \left[ \frac{d}{dt} \Gamma_G(\exp(ta)) \right]_{t=0}$$

$\tilde{G}$  est appelé groupe de recouvrement universel de  $G$ .

Chaque représentation  $\Gamma_{\tilde{G}}$  de  $\tilde{G}$  (cf d)) fournit une représentation  $\Gamma_G$  de  $G$  à l'aide de  $\Gamma_G(TK) = \Gamma_{\tilde{G}}(T)$  ( $\forall T \in G$ ) si et seulement si  $\Gamma_{\tilde{G}}(T) = 1 \forall T \in K$ .

Sinon on obtient une représentation projective de  $G$ .

**Th. 2 :**

Si les algèbres de Lie  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  de deux groupes de Lie simplement connexes  $\tilde{G}_1$  et  $\tilde{G}_2$  sont isomorphes, alors  $\tilde{G}_1$  et  $\tilde{G}_2$  sont analytiquement isomorphes.

Conséquence de ces deux théorèmes :

Pour chaque algèbre de Lie réelle  $\mathfrak{g}$  il existe un groupe de Lie simplement connexe  $\tilde{G}$ , qui est unique (à isomorphisme près), tel que chaque groupe de Lie  $G$  ayant pour algèbre de Lie isomorphe  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à  $\tilde{G}/K$ , où  $K$  est un sous-groupe invariant central discret de  $\tilde{G}$ .  $\tilde{G}$  est alors appelé groupe de recouvrement universel de  $\mathfrak{g}$ .

**Th. 3**

Si  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  sont deux algèbres de Lie réelles de groupe de recouvrement universels  $\tilde{G}_1$  et  $\tilde{G}_2$ , alors le groupe de recouvrement universel de  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  est isomorphe à  $\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2$ .

*Ex.* : application du th. 2 à  $SU(N)$

$SU(N)$  ( $N = 2, 3, 4 \dots$ ) est simplement connexe

Déterminons le centre de  $SU(N)$  noté  $Z$

Comme l'ensemble des matrices  $N \times N$  unitaires de déterminant 1 forme une représentation unitaire irréductible de  $SU(N)$ , d'après le lemme de Schur  $u \in Z \Rightarrow u = \alpha \mathbb{1}_N$ .  $\det u = 1$  donc  $\alpha^N = 1$ . Donc  $Z$  est le groupe fini d'ordre  $N$  d'éléments  $e^{2\pi \frac{ip}{N}} \mathbb{1}_N$ ,  $p = 0, \dots, N-1$

$N = 2$  :  $Z = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\}$  groupe de Lie compact d'algèbre de Lie isomorphe à  $SU(2)$  :  $SU(2)$  et  $SU(2)/Z \simeq SO(3)$

$N = 3$  :  $Z = \{\mathbb{1}_3, e^{2in/3} \mathbb{1}_3, e^{4in/3} \mathbb{1}_3\}$   $SU(3)$  et  $SU(3)/Z$

$N = 4$  :  $Z = \{\mathbb{1}_4, i\mathbb{1}_4, -\mathbb{1}_4, -i\mathbb{1}_4\}$   $SU(4)$   $SU(4)/Z$   $SU(4)/K$  avec  $K = \{\mathbb{1}_4, -\mathbb{1}_4\}$

### Application à la mécanique quantique

Toute représentation à une phase près continue unitaire de  $SO(3)$  est une représentation vraie, continue, unitaire de son groupe de recouvrement universel  $SU(2)$ .

Par conséquent pour tout système qui admet les rotations comme groupe de symétrie, les vecteurs de l'espace de Hilbert se transforment non pas selon une représentation unitaire de  $SO(3)$  mais selon une représentation unitaire de  $SU(2)$ .

rep. unitaire	$SO(3) \rightarrow$ spins entiers
	$SU(2) \rightarrow$ spins entiers et demi-entiers

Ainsi l'existence de spins demi-entiers est-il conséquence directe du théorème de Wigner.

# Chapitre 8

## Le groupe de Lorentz

Les équations de Maxwell qui rendent compte des phénomènes électriques et magnétiques ne sont pas invariantes sous le groupe de Galilée. Donc contrairement à ce que stipule le principe de relativité galiléenne, il devrait être possible de mettre en évidence un référentiel absolu (éther). Les expériences de Michelson et Morley (1881) ont infirmé cette hypothèse : la vitesse de la lumière est absolument indépendante de la direction de propagation. Le temps ne peut plus être considéré comme absolu : la simultanéité de deux phénomènes dans un référentiel n'implique pas cette simultanéité dans un autre référentiel, contrairement à la mécanique classique.

### 8.1 Intervalle d'espace-temps

Nous allons brièvement rappeler ici la notion d'intervalle d'espace-temps en relativité restreinte. Considérons tout d'abord un événement décrit par un observateur lié à un référentiel inertiel par ses coordonnées d'espace-temps  $(t_1, \vec{x}_1)$ .

*Exemple:* émission d'un photon dans la désintégration

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

Le signal se propage à la vitesse de la lumière (photon). Il est détecté en  $(t_2, \vec{x}_2)$ .

Par définition l'intervalle entre ces événements est

$$(\Delta s)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 ; \quad \text{ici } (\Delta s)^2 = 0.$$

$c$  ne dépend pas du référentiel donc  $(\Delta s)^2 = 0$  dans **tous** les référentiels inertiels par rapport auxquels on peut décrire cette expérience.

L'intervalle infinitésimal s'écrit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (8.1)$$

Si  $ds^2 = 0$  dans un référentiel d'inertie  $K$ , alors  $ds'^2 = 0$  dans tout autre référentiel d'inertie  $K'$ .

$$\text{Donc } ds^2 = a ds'^2$$

En utilisant l'homogénéité du temps et de l'espace et l'isotropie de l'espace, on montre que  $a = \text{constante} = 1$ .

### exercice 8.1

le montrer (cf. Landau T.C. p. 12).

Un point de l'espace de Minkowski  $M$  est repéré par ses coordonnées dites **contravariantes**  $x^\mu = (ct, \vec{x})$ .

Métrie : elle est donnée par la matrice

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

donc

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} (x_2^\mu - x_1^\mu) (x_2^\nu - x_1^\nu),$$

qui est bien identique, avec cette définition de la métrique, à la notion d'intervalle introduite plus haut.

On définit 3 types d'intervalles selon le signe de  $(\Delta s)^2$  :

- $(\Delta s)^2 > 0$  intervalle de genre temps
- $(\Delta s)^2 < 0$  intervalle de genre espace
- $(\Delta s)^2 = 0$  intervalle de genre lumière

### exercice 8.2

Montrer, en reprenant l'exemple de l'émission d'une particule dans la désintégration  $\beta^- : m \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  que l'intervalle séparant l'émission et la détection d'une particule est du genre temps ou lumière.

## 8.2 Groupe de Poincaré et groupe de Lorentz

Ayant postulé que la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel, nous en avons déduit que l'intervalle  $ds^2$  est identique dans tous les référentiels inertiels. Il nous faut à présent caractériser ces référentiels d'inertie, en déterminant les transformations relativistes reliant ces référentiels entre eux. Ces transformations possèdent une structure de groupe de symétrie d'espace-temps relativiste que nous allons étudier dans ce chapitre et dans les deux suivants.

### 8.2.1 Caractérisation de $\mathcal{P}$

Soient  $x$  les coordonnées d'un point de  $M$ , mesurées dans le référentiel  $K$ , et  $x'$  les coordonnées du même point mesurées dans le référentiel  $K'$ .

La condition d'invariance de l'intervalle infinitésimal

$$ds'^2 = ds^2 \quad (8.3)$$

implique que

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha : \text{groupe de Poincaré (10 paramètres réels)}$$

translation (4 paramètres réels)

groupe de Lorentz (6 paramètres réels)

(8.4)

*Preuve:*

La condition (8.3) s'écrit

$$g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

i.e.

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donc

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (8.5)$$

En prenant le déterminant membre à membre, on en tire donc

$$\det g \left( \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 = \det g.$$

$g$  étant régulière, on en déduit que  $\det \frac{\partial x'}{\partial x} \neq 0$  : la transformation de Poincaré est donc inversible.

En faisant agir  $\frac{\partial}{\partial x^\rho}$  sur (8.5) on obtient

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = 0$$

qui s'écrit symboliquement

$$A_{(\mu\rho)\nu} + A_{(\nu\rho)\mu} = 0, \quad (8.6)$$

où  $A$  est symétrique sur les indices entre parenthèses.

$$\mu \leftrightarrow \rho \quad \text{donne} \quad A_{(\mu\rho)\nu} + A_{(\mu\nu)\rho} = 0 \quad (8.7)$$

$$\nu \leftrightarrow \rho \quad \text{donne} \quad A_{(\mu\nu)\rho} + A_{(\nu\rho)\mu} = 0. \quad (8.8)$$

La combinaison (8.6) + (8.7) - (8.8) donne donc

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$\text{d'où (puisque } \det \frac{\partial x'}{\partial x} \neq 0) : \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} = 0$$

ce qui prouve que les  $x'$  sont des fonctions linéaires des  $x$ .

On utilise les mêmes notations matricielles que celle vue dans le chapitre 6 pour les matrices de  $SU(2)$ , i.e.

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} \begin{array}{l} \swarrow \text{indice de ligne} \\ \nwarrow \text{indice de colonne} \end{array}$$

On déduit de (8.5) et de (8.4) que  $\Lambda$  est une matrice réelle vérifiant

$$\boxed{g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = g_{\mu\nu}} \quad (8.9)$$

Le groupe de Lorentz est bien un groupe :

*Preuve:*

- c'est immédiat d'après sa définition : le produit de 2 transformations homogènes qui préservent  $ds^2$  est une transformation homogène qui préserve  $ds^2$  ; d'autre part, l'inverse d'une transformation homogène préservant  $ds^2$  est une transformation homogène préservant  $ds^2$ .

- algébriquement, si  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont deux éléments de  $L$ , alors

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = g_{\mu\nu} \\ g_{\alpha\beta} \Lambda'^{\alpha}_{\mu} \Lambda'^{\beta}_{\nu} = g_{\mu\nu} \end{cases}$$

On en déduit que

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda'^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Lambda'^{\nu}_{\nu'} = g_{\mu\nu} \Lambda'^{\mu}_{\mu'} \Lambda'^{\nu}_{\nu'} = g_{\mu'\nu'},$$

ce qui montre que  $\Lambda \Lambda' \in L$ .

La première des preuves précédentes s'étend immédiatement au cas du groupe de Lorentz inhomogène (ou groupe de Poincaré), ce qui montre que  $\mathcal{P}$  est un groupe. La seconde preuve exige de connaître explicitement la loi de groupe de  $\mathcal{P}$ , que nous examinerons au chapitre 10.

### Nombre de paramètres :

$$\boxed{L \text{ dépend de 6 paramètres réels.}} \quad (8.10)$$

*Preuve:*

Considérons une transformation infinitésimale

$$\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}, \text{ avec } \|\omega^{\mu\nu}\| \ll 1.$$

La contrainte  $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\rho}\Lambda^{\nu\sigma} = g^{\rho\sigma}$  donne

$$g_{\mu\nu}(g^{\mu\rho} + \omega^{\mu\rho})(g^{\nu\sigma} + \omega^{\nu\sigma}) = g^{\rho\sigma}$$

soit au premier ordre en  $\omega$ ,

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g_{\mu\nu}g^{\mu\rho}\omega^{\nu\sigma} + g_{\mu\nu}\omega^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} = g^{\rho\sigma}$$

d'où

$$\delta_{\nu}^{\rho}g^{\nu\sigma} + \delta_{\nu}^{\rho}\omega^{\nu\sigma} + \delta_{\mu}^{\sigma}\omega^{\mu\rho} = g^{\rho\sigma} + \omega^{\rho\sigma} + \omega^{\sigma\rho} = g^{\rho\sigma}$$

et donc

$$\omega^{\rho\sigma} + \omega^{\sigma\rho} = 0. \quad (8.11)$$

$\omega^{\mu\nu}$  est donc un tenseur réel  $4 \times 4$  antisymétrique : il dépend de 6 paramètres réels.

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ dépend de 10 paramètres réels :}} \quad (8.12)$$

il dépend des 6 paramètres réels décrivant  $L$  auxquels il faut ajouter les 4 translations d'espace-temps.

### 8.2.2 Structure du groupe de Lorentz

De (8.9) on déduit que  $\det \Lambda = \pm 1$  :

$$\left| \begin{array}{l} \det \Lambda = +1 : \text{ transformations propres} \\ \det \Lambda = -1 : \text{ transformations impropres} \end{array} \right.$$

En considérant à nouveau (8.9) avec  $\mu = \nu = 0$ , on obtient  $(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1$  :

$$\left| \begin{array}{ll} \Lambda^0_0 \geq 1 : & \text{pas de renversement du temps (orthochrone)} \\ \Lambda^0_0 \leq -1 : & \text{avec renversement du temps} \end{array} \right.$$

On démontre (voir Gelfand p165) que

Le groupe de Lorentz  $O(3, 1)$  possède 4 composantes connexes. Chacune est doublement connexe, mais non simplement connexe.

Ces différentes composantes connexes sont reliées par des transformations discrètes :

- transformation de réflexion (ou parité) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- transformation de renversement du temps :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

figure

$L$  laisse invariante les 3 régions  $x^2 > 0$ ,  $x^2 = 0$  (cône de lumière) et  $x^2 < 0$

$L_+^\uparrow$  laisse invariante les 4 régions  $\left| \begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x_0 > 0 \end{array} \right|$ ,  $\left| \begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x_0 < 0 \end{array} \right|$ ,  $x^2 = 0$ ,  $x^2 < 0$

figure

$L_+^\uparrow$  est le groupe de Lorentz **restreint**

$L_+^\uparrow$  et  $L_-^\uparrow$  forment le groupe de Lorentz **complet**

$L_+^\uparrow$  et  $L_+^\downarrow$  forment le groupe de Lorentz **propre**

### exercice 8.3

Vérifier que le groupe de Lorentz restreint, le groupe de Lorentz complet et le groupe de Lorentz propre sont bien des sous-groupes du groupe de Lorentz  $L$ .

### Compacité :

Le groupe de Lorentz restreint  $L_+^\uparrow$  est un groupe non compact.

Ceci est dû à l'existence des boost, ou transformation de Lorentz spéciales, que nous examinerons plus loin, qui sont codées par une rapidité variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

### 8.2.3 Vecteurs contravariants et covariants

On peut rapporter l'espace de Minkowski  $M$  à une base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$  notée  $\underline{e}_\mu$  ( $\mu = 0, \dots, 3$ ).

Un quadrivecteur  $\underline{A}$  arbitraire peut alors se décomposer dans cette base sous la forme :

$$\underline{A} = A^\mu \underline{e}_\mu \quad (\text{convention d'Einstein})$$

Par définition le tenseur métrique (ou métrique) est relié aux vecteurs de base par

$$\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = g_{\mu\nu}$$

avec  $g_{\mu\nu}$  donné par (8.2). On a alors

$$ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} = dx^\mu dx^\nu \underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu},$$

en accord avec la définition donnée plus haut. Dans toute la suite, sauf mention contraire, on fera  $c = 1$ , et donc  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ .

### Coordonnées co- et contra-variantes :

$$\underline{A} = A^\mu \underline{e}_\mu$$

↙ composante contra-variante

$$A_\mu = \underline{A} \cdot \underline{e}_\mu$$

↙ composante co-variante

en général  $A^\mu \neq A_\mu$

*Exemple :* plan euclidien

figure

*Remarque:* les  $\underline{e}_\mu$  ne sont pas des quadrivecteurs puisqu'ils ne sont pas invariants lorsque l'on change les axes (alors que par définition un quadrivecteur est un objet à 4 composantes qui est invariant par changement d'axe).

### Lien entre composantes covariantes et contravariantes :

$$A_\mu = \underline{A} \cdot \underline{e}_\mu = A^\nu \underline{e}_\nu \cdot \underline{e}_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

De la même manière que pour la métrique  $C$  de  $SU(2)$ , (voir chapitre 6), on définit  $g^{\mu\nu}$  comme l'inverse de  $g_{\mu\nu}$  :  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ .

Comme  $g_{\mu\nu}$  est son propre inverse,  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ .

Ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu \\ A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu. \end{aligned}} \quad (8.13)$$

On peut donc écrire  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$   
et  $\underline{A} \cdot \underline{B} = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ .

#### 8.2.4 Transformation d'un vecteur covariant

Examinons à présent la transformation par  $L$  d'un vecteur covariant :  
de

$$g_{\alpha\beta} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta = g_{\mu\nu},$$

on tire

$$g_{\alpha\beta} \Lambda_\mu^\alpha = g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\beta$$

donc

$$(\Lambda^{-1})^\nu_\beta = g_{\beta\alpha} \Lambda_\mu^\alpha g^{\mu\nu}.$$

Posons

$$\Lambda_\beta^\nu = g_{\beta\alpha} \Lambda_\mu^\alpha g^{\mu\nu}$$

ce qui revient à considérer  $\Lambda_\mu^\alpha$  comme un tenseur d'ordre 2 qui se transforme comme  $A^\alpha A_\mu$ .

On a donc  $\Lambda_\beta^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\beta = ({}^t\Lambda^{-1})^\beta_\nu$  et l'on peut vérifier explicitement que  $\Lambda_\beta^\nu \Lambda_\nu^\rho = (\Lambda^{-1})^\nu_\beta \Lambda_\nu^\rho = \Lambda_\nu^\rho (\Lambda^{-1})^\nu_\beta = \delta_\beta^\rho$ .

*Remarques:*

- ceci est l'analogie de  $CUC^{-1} = {}^tU^{-1}$  pour  $SL(2, C)$ , qui s'écrit  $C_{\alpha'\alpha} U_\beta^\alpha C^{\beta\beta'} = U^{-1\beta'}_{\alpha'} = U_{\alpha'}^{\beta'}$ .

- avec ces notations, puisque  $\mathbb{1} = \mathbb{1}^{-1} = {}^t\mathbb{1}$ , on pourra écrire plus simplement

$$\delta^\mu_\nu = \delta_\nu^\mu = \delta^\nu_\mu = \delta_\mu^\nu = \delta_\nu^\mu.$$

Ainsi l'inverse d'une matrice se calcule simplement en montant et en descendant les indices grâce à la métrique, puis en transposant.

Loi de transformation des composantes covariantes sous l'action de  $L$  :

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu} \quad (8.14)$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} \underline{x} &= x^\mu \underline{e}_\mu = x'^\nu \underline{e}'_\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu \underline{e}'_\nu \\ \text{donc } \underline{e}_\mu &= \Lambda_\mu^\nu \underline{e}'_\nu \quad \text{et} \quad \underline{e}'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \underline{e}_\nu \quad \text{d'après ce qui précède.} \\ \text{Ainsi } x'_\mu &= \underline{x} \cdot \underline{e}'_\mu = \underline{x} \cdot \Lambda_\mu^\nu \underline{e}_\nu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu. \end{aligned}$$

*Remarque:* le fait que les composantes covariantes se transforment par  ${}^t\Lambda^{-1}$ , qui est la transposée inverse de la matrice de transformation des composantes contravariantes, est dû à l'invariance de  $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$  qui implique que  ${}^t\Lambda g \Lambda = g$ .

En effet, ceci s'écrit encore  ${}^t\Lambda^{-1} = g \Lambda g^{-1}$ . Partant de  $v' = \Lambda v$  pour  $v$  contravariant, on en déduit :

$$\underbrace{g v'}_{\text{vecteur covariant}} = \underbrace{g \Lambda g^{-1}}_{{}^t\Lambda^{-1}} \underbrace{g \xi}_{\text{vecteur covariant}}$$

C'est l'analogie de la preuve donnée page 93 dans le cas de  $SU(2)$ .

### 8.2.5 Calcul tensoriel

Nous pouvons maintenant de façon générale parler de covariance relativiste : les grandeurs physiques qui décrivent l'état d'un système ne sont en général pas les mêmes pour différents observateurs :

- les quantités scalaires ne dépendent pas du choix d'un référentiel particulier : ce sont des fonctions  $\phi$  définies sur  $M$  t.q.  $\phi'(x') = \phi(x)$
- les composantes contravariantes  $v^\mu$  d'un vecteur se transforment comme les coordonnées (les translations n'ont d'effet que sur les coordonnées) :

$$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu \left( = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \right)$$

- les composantes covariantes  $v_\mu$  d'un vecteur se transforment comme  $x_\mu$  :

$$v'_\mu = \Lambda_\mu^\nu v_\nu$$

- tenseur de rang  $(\underbrace{m}, \underbrace{n})$

co- contra-

$$F'_{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda_{\alpha_1}{}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\alpha_m}{}^{\beta_m} \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_n}{}_{\rho_n} F_{\beta_1 \dots \beta_m}{}^{\rho_1 \dots \rho_n}$$

★ dérivation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \quad \text{avec} \quad \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}},$$

donc  $\frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$  se transforme comme un vecteur covariant, noté  $\partial_{\nu} \phi$

De la définition des coordonnées contravariantes  $x^{\mu} = (x^0, \vec{x})$  on tire

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla} \right)$$

attention aux signes :  $\vec{x}$  est contravariant mais  $\vec{\nabla}$  est covariant.

La quadri-divergence d'un quadri-vecteur est le scalaire

$$\partial^{\mu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A^{\mu} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

opérateur d'Alembertien :  $\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta$

Retenons :

- que l'on passe de l'une à l'autre forme des tenseurs en montant et en descendant les indices comme pour les quadri-vecteurs
- que la transformation se fait en mettant la matrice  $\Lambda$  à **gauche** du quadri-vecteur et en sommant sur les indices voisins (l'un en haut et l'autre en bas).

## 8.3 Algèbre de Lie du groupe de Lorentz restreint $\mathbf{L}_+^{\uparrow}$

### 8.3.1 Forme non covariante de générateurs

De la contrainte

$$\omega_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta}$$

on tire la relation matricielle  $\omega^{\beta}_{\alpha} = -\omega_{\alpha}{}^{\beta} = -g_{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \omega^{\alpha'}_{\beta'}$ .

En utilisant la forme explicite de la métrique  $g^{\mu\nu}$ , qui s'écrit

$$g_{i\alpha'} = -\delta_i^{\alpha'} \quad , \quad g^{0\beta'} = \delta_0^{\beta'} \quad ,$$

on en déduit l'écriture matricielle

$$\begin{cases} \omega^0_i = \omega^i_0 \\ \omega^i_j = -\omega^j_i \end{cases}$$

soit

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_1 & d\phi_2 & d\phi_3 \\ d\phi_1 & | & 0 & -d\theta_3 & +d\theta_2 \\ d\phi_2 & | & +d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ d\phi_3 & | & -d\theta_2 & +d\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

où le bloc  $3 \times 3$  correspond à la matrice  $3 \times 3$  d'une rotation infinitésimale dans le sous-espace des rotations spatiales.

• Introduisons les générateurs  $J^i$  (ce sont les générateurs des rotations; nous le justifierons explicitement dans le paragraphe 8.3.4) de la forme

$$J^i = \begin{pmatrix} 0 & \\ & J_{3 \times 3}^i \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

où les matrices  $3 \times 3$   $J_{3 \times 3}^i$  sont les générateurs des rotations à 3 dimensions, qui s'écrivent  $(J_{3 \times 3}^i)_{kj} = i\epsilon_{ijk}$ . On a  $J^+ = J$ . Explicitement,

$$J_{3 \times 3}^1 = i \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad J_{3 \times 3}^2 = i \begin{pmatrix} & -1 & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad J_{3 \times 3}^3 = i \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

• De même, on introduit les générateurs  $K^i$  (qui sont les générateurs des boosts : voir paragraphe 8.3.3), sous de la forme (en ne représentant que les éléments non nuls)

$$K^1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad K^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & \\ & 1 & & \end{pmatrix} \quad K^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & & & \\ & 0 & & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

On a  $K^+ \neq K$ .

Nous pouvons alors écrire (8.15) sous la forme

$$\omega = id\vec{\phi} \cdot \vec{K} - id\vec{\theta} \cdot \vec{J}. \quad (8.19)$$

Dans le cas d'une transformation finie, nous aurons le résultat suivant, justifié aux paragraphes 8.3.3 et 8.3.4,

Boost pur	$\Lambda = e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{K}}$
Rotation pure	$\Lambda = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}$

Un boost pur est non unitaire car  $K_i^\dagger \neq K_i$ .

Dans le cas général, un élément quelconque de  $L_+^\dagger$  pourra s'écrire  $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$  où  $\Lambda_1$  est une rotation et  $\Lambda_2 = e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{K}}$  est un boost (voir chapitre 9), mais  $\Lambda$  ne peut s'écrire comme l'exponentielle d'un élément de son algèbre de Lie (sauf au voisinage de l'identité), en raison de la non compacité de la composante connexe  $L_+^\dagger$  de  $L$ .

### 8.3.2 Algèbre de Lie

Des formes explicites (8.16) et (8.18) des générateurs on tire immédiatement les relations de commutation

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (8.20)$$

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (8.21)$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k \quad (8.22)$$

#### exercice 8.4

le vérifier en utilisant les expressions intrinsèques

$$(J_i)^k_j = i\varepsilon_{ijk} \quad (8.23)$$

et

$$(K_i)^\mu_\nu = -i[\delta^0_\nu\delta^\mu_i + \delta^\mu_0\delta^i_\nu]. \quad (8.24)$$

#### Conséquences importantes :

- la relation (8.20) prouve que le groupe des rotations est un sous-groupe de  $L_+^\uparrow$ . En revanche, on constate d'après (8.22) que les boosts ne constituent pas un sous-groupe de  $L_+^\uparrow$ .

- $[J_1, K_1] = 0$  donc une rotation effectuée autour de la direction de la vitesse d'une transformation de Lorentz ne modifie pas cette transformation :

$$e^{-i\theta_1 J_1} e^{i\phi_1 K_1} e^{i\theta_1 J_1} = e^{i\phi_1 K_1}$$

puisque la loi de transformation d'un opérateur  $T$  s'écrit  $T' = D(\Lambda)TD^+(\Lambda)$  .

- l'équation (8.22) exprime que  $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$  se transforme par rotation comme les composantes d'un vecteur (voir la représentation adjointe de  $SO(3)$  discutée au chapitre 5) : c'est un opérateur tensoriel d'ordre 1, ou opérateur vectoriel.

- l'équation (8.21)  $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$  exprime le fait que deux transformations de Lorentz pures  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_j$  le long des axes  $i$  et  $j$  engendrent une rotation lorsqu'on effectue l'opération  $\Lambda_i\Lambda_j\Lambda_i^{-1}$ . Ce résultat est à l'origine du phénomène de "précession de Thomas" : une succession de transformations de Lorentz pures appliquées à une particule à spin peuvent ramener l'impulsion à sa valeur initiale (représentation vectorielle) alors que le spin a tourné (représentation spinorielle).

- attention : comme  $[J, K] \neq 0$ ,

$$\Lambda = \exp(i\vec{\phi} \cdot \vec{K}) \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) \neq \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) \exp(i\vec{\phi} \cdot \vec{K}) .$$

### 8.3.3 Transformation de Lorentz pure

Considérons une transformation de Lorentz pure d'axe  $\vec{x}$  engendré par  $K_1$ , de paramètre  $\phi_1$  (transformation active)

$$e^{iK_1\phi_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iK_1\phi_1)^{2k}}{(2k)!} + iK_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iK_1\phi_1)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$(iK_1) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad (iK_1)^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $\sigma_1^2 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ , donc

$$\begin{aligned} e^{iK_1\phi_1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_1)^{2k}}{(2k)!} + iK_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_1^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \text{ch } \phi_1 + iK_1 \text{sh } \phi_1 \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch } \phi_1 & \text{sh } \phi_1 & 0 & 0 \\ \text{sh } \phi_1 & \text{ch } \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La relation  $\vec{x}' = e^{iK_1\phi_1} \vec{x}$  s'écrit donc

$$\begin{cases} x'^0 = \text{ch } \phi_1 x^0 + \text{sh } \phi_1 x^1 \\ x'^1 = \text{sh } \phi_1 x^0 + \text{ch } \phi_1 x^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^0 = \text{ch } \phi_1 x'^0 - \text{sh } \phi_1 x'^1 \\ x^1 = -\text{sh } \phi_1 x'^0 + \text{ch } \phi_1 x'^1 \end{cases}$$

En considérant un point particulier tel que  $x^1 = \text{constante}$ , on tire immédiatement  $v = \frac{dx'^1}{dx'^0} = \text{th } \phi$  : c'est la vitesse du point après boost, mesurée par rapport au référentiel par rapport auquel il était fixe avant boost.

$\phi = \text{Argth } v \text{ est appelée rapidité.}$

On déduit de ce qui précède la paramétrisation

$$\begin{cases} \text{ch } \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ \text{sh } \phi_1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{x^0}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} x^1 \\ x'^1 &= \frac{v x^0}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x^1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned} \tag{8.25}$$

qui est bien la forme usuelle d'une transformation spéciale de Lorentz.

**Cas général :**

Considérons une transformation de Lorentz pure d'axe quelconque  $\vec{n}$  ( $\vec{n}^2 = 1$ ) et de vitesse  $v$  (point de vue actif) en terme de matrices,  $(K_i)^\mu_\nu = -i[\delta_\nu^0 \delta_i^\mu + \delta_0^\mu \delta_\nu^i]$

Montrons que  $\vec{x}' = e^{i\phi \vec{n} \cdot \vec{k}} \vec{x}$  est donné par

$$\boxed{\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \operatorname{ch} \phi + (\vec{n} \cdot \vec{x}) \operatorname{sh} \phi \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{n} (\vec{x} \cdot \vec{n}) + (x^0 \operatorname{sh} \phi + (\vec{n} \cdot \vec{x}) \operatorname{ch} \phi) \vec{n} \end{aligned}} \quad (8.26)$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} \left( i\vec{K} \cdot \vec{n} \right)_\nu^\mu &= + [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_\nu] \\ &\searrow \text{à cause de } \vec{n} \cdot \vec{K} = n^i K^i \quad (= n^i K_i \text{ car dans nos conventions } K_i = K^i!) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \left( i\vec{K} \cdot \vec{n} \right)^2 \right]_\nu^\mu &= \left[ i\vec{K} \cdot \vec{n} \right]_{\nu'}^\mu \left[ i\vec{K} \cdot \vec{n} \right]_{\nu'}^{\nu'} \\ &= + [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_{\nu'}] [\delta_\nu^0 n^{\nu'} - \delta_0^{\nu'} n_\nu] \\ &= + (n^0 n^\mu \delta_\nu^0 - n^\mu n_\nu - \delta_0^\mu \delta_\nu^0 n^2 + n_0 \delta_0^\mu n_0) \\ &= -n^\mu n_\nu + \delta_0^\mu \delta_\nu^0 \end{aligned}$$

puisque  $n^2 = -1$ . Enfin

$$\begin{aligned} \left[ \left( i\vec{K} \cdot \vec{n} \right)^3 \right]_\nu^\mu &= + [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_{\nu'}] [-n^{\nu'} n_\nu + \delta_0^{\nu'} \delta_\nu^0] \\ &= + n^\mu \delta_\nu^0 - \delta_0^\mu n_\nu = \left( i\vec{K} \cdot \vec{n} \right)_\nu^\mu. \end{aligned}$$

La série s'écrit donc

$$\begin{aligned} e^{i\phi \vec{n} \cdot \vec{k}} &= \delta_\nu^\mu + [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_\nu] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\quad + [-n^\mu n_\nu + \delta_0^\mu \delta_\nu^0] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k+1)!} + n^\mu n_\nu - \delta_0^\mu \delta_\nu^0 \\ &= \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu - \delta_0^\mu \delta_\nu^0 + [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_\nu] \operatorname{sh} \phi + [-n^\mu n_\nu + \delta_0^\mu \delta_\nu^0] \operatorname{ch} \phi. \end{aligned}$$

Ainsi

$$x'^\mu = x^\mu + n^\mu (x \cdot n) - \delta_0^\mu x^0 + [x^0 n^\mu - \delta_0^\mu (n \cdot x)] \operatorname{sh} \phi + [-n^\mu (n \cdot x) + \delta_0^\mu x^0] \operatorname{ch} \phi$$

ce qui prouve le résultat.

*Remarque:*

une transformation passive (changement de référentiel) du référentiel  $K$  vers le référentiel  $K'$  (animé d'une vitesse  $v$  par rapport à  $K$ ) est une transformation active (référentiel fixe, les points sont transformés) de vitesse  $-v$ .

### 8.3.4 Rotation

A titre d'exercice, nous pouvons également déterminer la forme explicite d'une rotation, que nous avons obtenue directement en (5.1).

Pour une rotation active d'axe  $\vec{z}$  et d'angle  $\theta_3$ ,

$$\begin{aligned} e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{J}} = e^{-i\theta_3\cdot J_3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_3)^{2k}}{(2k)!} (-i\theta_3)^{2k} - iJ_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_3)^{2k}}{(2k+1)!} \theta_3^{2k+1} (-i)^{2k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(+\theta_3)^{2k}}{(2k)!} (-1)^k}_{\cos \theta_3} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_3^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k (-iJ_3)}_{\sin \theta_3} \end{aligned}$$

En effet,

$$J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \mathbb{1}_{2\times 2} & & \\ & & & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $\sigma_2^2 = \mathbb{1}_{2\times 2}$ . Ainsi

$$e^{-i\theta_3 J_3} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & & \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation passive (rotation des axes) est obtenue en faisant  $\theta \rightarrow -\theta$ .

#### Cas général :

Dans le cas d'une rotation quelconque d'axe  $\vec{n}$  et d'angle  $\theta$  (point de vue actif), montrons que

$$\boxed{\vec{x}' = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\vec{x} = (\vec{x} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x})) \cos \theta + \vec{n} \wedge \vec{x} \sin \theta + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x})}$$

en accord avec la relation (5.1).

*Preuve:*

Calculons

$$e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{n}\cdot\vec{J})^k}{k!} \theta^k.$$

$\left(-i\vec{J}\cdot\vec{m}\right)_j^k = -i(J^i)^k_j n^i = \varepsilon_{ijk}n^i$  (dans ce calcul, il n'est pas utile de distinguer les composantes co- et contra-variantes)

$$\text{donc } \left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)^k = \varepsilon_{ijk}n^i x^j = (\vec{n}\wedge\vec{x})^k$$

$$\left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)_{kk'}^2 = \left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)_{kj} \left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)_{jk'} = \varepsilon_{ijk}n^i \varepsilon_{i'k'j}n^{i'}$$

qui s'écrit encore  $-\delta_{k'}^k + n^k n^{k'}$  (car  $\vec{n}^2 = 1$ )

$$\left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)_{kk'}^3 = \left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)_{kj} \left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)_{jk'}^2$$

$$= \varepsilon_{ijk}n^i \left(-\delta_{k'}^j + n^j n^{k'}\right) = -\varepsilon_{ik'k}n^i + \underbrace{\varepsilon_{ijk}n^i n^j n^{k'}}_0$$

(contraction d'un tenseur antisymétrique par un tenseur symétrique)

$$= -\left(-i\vec{J}\cdot\vec{n}\right)_{kk'}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\right)_{kj} &= \delta_j^k + \theta\varepsilon_{ijk}n^i - \frac{\theta^2}{2}(\delta_j^k - n^k n^j) - \frac{\theta^3}{3!}\varepsilon_{ijk}n^i + \frac{\theta^4}{4!}(\delta_j^k - n^k n^j) + \dots \\ &= (\delta_j^k - n^k n^j) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} + \dots\right) + n^k n^j + \varepsilon_{ijk}n^i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \end{aligned}$$

soit

$$\left(e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\right)_{kj} = (\delta_j^k - n^k n^j) \cos\theta + \varepsilon_{ijk}n^i \sin\theta + n^k n^j$$

d'où finalement

$$e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\vec{x} = \vec{x}' = (\vec{x} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x})) \cos\theta + \vec{n}\wedge\vec{x} \sin\theta + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x})$$

$$\text{puisque } \varepsilon_{ijk}n^i x^j = (\vec{n}\wedge\vec{x})_k.$$

### 8.3.5 Forme covariante de l'algèbre de Lie de $L_+^\uparrow$

Nous avons écrit en 8.2.2 une transformation infinitésimale sous la forme

$$\Lambda = \mathbb{1} + \omega$$

ou encore

$$\Lambda^\mu_\nu = g^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu,$$

et montré que  $\omega_{\mu\nu}$  est antisymétrique, i.e. que  $\omega_{\mu\nu}$  dépend de 6 paramètres, ce qui définit la dimension de l'algèbre de Lie.

Plutôt que d'utiliser une paramétrisation non covariante de cette transformation infinitésimale à l'aide de  $(d\vec{\theta}, d\vec{\phi})$ , comme nous l'avons fait dans le paragraphe 8.3.1, on peut utiliser  $\omega_{\mu\nu}$  comme collection de paramètres. Ceci nous conduit à introduire la définition suivante, covariante, des générateurs de l'algèbre de Lie :

$$\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}. \quad (8.27)$$

Dans cette définition, les indices  $(\alpha, \beta)$  jouent le rôle d'étiquetage des générateurs. Ceux-ci sont eux-même des tenseurs, et portent donc également des indices. On peut imposer  $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$  puisque les  $\omega^{\alpha\beta}$  sont antisymétriques, d'où le facteur conventionnel  $\frac{1}{2}$  pour éviter le double comptage Tensoriellement, la relation (8.27) s'écrit :

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})_{\mu\nu}.$$

Donc

$$\omega_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})_{\mu\nu}. \quad (8.28)$$

On en déduit que les  $J_{\alpha\beta}$  sont des tenseurs antisymétriques (i.e. que  $(J_{\alpha\beta})_{\mu\nu}$  est antisymétrique par rapport à  $(\mu\nu)$ ).

Introduisons la base

$$(a_{\mu'\nu'})^{\mu\nu} = \delta_{\mu'}^{\mu} \delta_{\nu'}^{\nu} - \delta_{\mu'}^{\nu} \delta_{\nu'}^{\mu}. \quad (8.29)$$

C'est une base, dite canonique, des tenseurs antisymétriques, qui s'écrit encore

$$a_{\mu'\nu'} = e_{\mu'\nu'} - e_{\nu'\mu'}$$

où

$$(e_{\mu'\nu'})^{\mu\nu} = \delta_{\mu'}^{\mu} \delta_{\nu'}^{\nu}$$

est la base canonique des tenseurs de rang 2. Dans cette base, (8.28) s'écrit

$$-\frac{i}{2} \left( \delta_{\mu'}^{\alpha} \delta_{\nu'}^{\beta} - \delta_{\mu'}^{\beta} \delta_{\nu'}^{\alpha} \right) (J_{\alpha\beta})^{\mu\nu} = \delta_{\mu'}^{\mu} g_{\nu\nu'} - g_{\nu\mu'} \delta_{\nu'}^{\mu}.$$

Le premier membre de cette égalité s'écrit encore  $-\frac{i}{2} [(J_{\mu'\nu'})^{\mu\nu} - (J_{\nu'\mu'})^{\mu\nu}] = -i (J_{\mu'\nu'})^{\mu\nu}$  par antisymétrie sur  $(\mu'\nu')$ .

Donc

$$\boxed{(J_{\mu'\nu'})^{\mu\nu} = i (g_{\mu'}^{\mu} g_{\nu\nu'} - g_{\nu\mu'} g_{\nu'}^{\mu})},$$

ou encore

$$\boxed{(J_{\mu'\nu'})_{\mu\nu} = i (a_{\mu'\nu'})_{\mu\nu}}.$$

L'algèbre de Lie s'en déduit immédiatement :

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i (g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho})}. \quad (8.30)$$

*Preuve:*

- directement, en utilisant la forme matricielle :

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]^{\alpha}_{\beta} &= (J_{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta'} (J_{\rho\sigma})^{\beta'}_{\beta} - (J_{\rho\sigma})^{\alpha}_{\beta'} (J_{\mu\nu})^{\beta'}_{\beta} \\
&= -(\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\nu\beta'} - g_{\beta'\mu} \delta_{\nu}^{\alpha}) (\delta_{\rho}^{\beta'} g_{\sigma\beta} - g_{\beta\rho} \delta_{\sigma}^{\beta'}) \\
&\quad + (\delta_{\rho}^{\alpha} g_{\sigma\beta'} - g_{\beta'\rho} \delta_{\sigma}^{\alpha}) (\delta_{\mu}^{\beta'} g_{\nu\beta} - g_{\beta\mu} \delta_{\nu}^{\beta'}) \\
&= -g_{\nu\rho} (\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\sigma\beta} - \delta_{\sigma}^{\alpha} g_{\beta'\mu}) + g_{\mu\rho} (-\delta_{\sigma}^{\alpha} g_{\nu\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha} g_{\sigma\beta}) \\
&\quad - g_{\mu\sigma} (-\delta_{\rho}^{\alpha} g_{\nu\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha} g_{\beta\rho}) + g_{\nu\sigma} (\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\rho\beta} - \delta_{\rho}^{\alpha} g_{\beta\sigma}) \\
&= i (g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho})^{\alpha}_{\beta}
\end{aligned}$$

- en écrivant les générateurs sous la forme manifestement antisymétrique  $J_{\mu\nu} = i(e_{\mu\nu} - e_{\nu\mu}) = i(|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|)$ , avec le produit scalaire minkowskien  $\langle\alpha|\mu\rangle = g_{\alpha\mu}$ , on peut aisément retrouver l'équation précédente de manière intrinsèque. Le lecteur non convaincu vérifiera préalablement que

$$\begin{aligned}
(J_{\mu\nu})_{\alpha\beta} &= i (\langle\alpha|\mu\rangle\langle\nu|\beta\rangle - \langle\alpha|\nu\rangle\langle\mu|\beta\rangle) \\
&= i (g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta})
\end{aligned}$$

en accord avec la forme obtenue plus haut. L'obtention des relations de commutation de l'algèbre de Lie est alors immédiate :

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -(|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|) (|\rho\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\rho|) \\
&\quad + (|\rho\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\rho|) (|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|) = -g_{\nu\rho} (|\mu\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\mu|) \\
&\quad + g_{\mu\rho} (|\nu\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\nu|) - g_{\mu\sigma} (|\nu\rangle\langle\rho| - |\rho\rangle\langle\nu|) + g_{\nu\sigma} (|\mu\rangle\langle\rho| - |\rho\rangle\langle\mu|) \\
&= i (g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}) .
\end{aligned}$$

On notera que dans ce calcul, la forme explicite des générateurs ne joue aucun rôle. Seul compte leur propriété d'antisymétrie par rapport à leur index d'étiquetage, qui provient elle-même de l'antisymétrie des  $\omega_{\mu\nu}$ , i.e. de la définition de  $L_{+}^{\uparrow}$ . Ceci ne doit pas nous surprendre : l'algèbre de Lie est la même quelque soit la représentation choisie. Nous allons le vérifier explicitement sur la représentation régulière discutée dans le paragraphe qui suit.

### 8.3.6 Représentation sur les fonctions scalaires (représentation appelée régulière)

$\forall \Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$  on associe la transformation  $T_{\Lambda}$  agissant sur les fonctions  $f(x)$  :

$$f(x) \xrightarrow{T_{\Lambda}} (T_{\Lambda}f)(x) = f(\Lambda^{-1}x) .$$

T est une représentation de  $L_{+}^{\uparrow}$

*Preuve:*

$$\begin{aligned}
 (T_\Lambda T_{\Lambda'} f)(x) &= T_{\Lambda'} f(\Lambda^{-1}x) = f(\Lambda'^{-1}\Lambda^{-1}x) \\
 &= f((\Lambda\Lambda')^{-1}x) \\
 &= (T_{\Lambda\Lambda'} f)(x)
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $T_\Lambda T_{\Lambda'} = T_{\Lambda\Lambda'}$ .

### Générateurs de cette représentation :

A la transformation infinitésimale de Lorentz

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$$

correspond

$$(T_\Lambda f)(x) = \left(1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right) f(x) \quad (\text{facteur 2 à cause du double comptage})$$

où les  $J_{\mu\nu}$  sont des opérateurs différentiels. En utilisant la définition de  $T$ , on a donc

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right) f(x) &= f(\Lambda^{-1}x) = f(x^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu) \\
 &= f(x) - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu f
 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)}. \quad (8.31)$$

On vérifiera aisément que ces générateurs satisfont l'algèbre de Lie (8.30).

Cette représentation est **unitaire**. La preuve est la même que celle déjà donnée pages 33 et 74 pour la représentation de moment orbital du groupe des rotations. Notons que  $L_+^\uparrow$  n'est pas compact, et que la représentation unitaire de  $L_+^\uparrow$  que nous venons de construire est de dimension **infinie**, en accord avec les résultats généraux énoncés au paragraphe 4.3.4.

### 8.3.7 Forme réelle compacte

Considérons les relations de commutation

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}$$

En posant

$$\begin{cases} J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk} (= J^i) & (\Leftrightarrow J_{jk} = \varepsilon_{ijk}J_i) \\ K_i = J_{0i} & (= K^i = -J^{0i}) \end{cases}$$

on obtient

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad [J_j, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$$

qui est bien identique aux relations obtenues plus haut. Le lien entre générateurs covariants  $J^\mu_\nu$  et générateurs  $(\vec{K}, \vec{J})$  se résume sous la forme

$$J = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Lien entre $\omega_{\alpha\beta}$ et $\vec{\theta}, \vec{\phi}$ :

en comparant

$$1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} + o(\omega) = (1 - i\vec{\theta} \cdot \vec{J})(1 + i\vec{\phi} \cdot \vec{K}) + o(\theta, \phi)$$

on a

$$-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} = i\vec{\phi} \cdot \vec{K} - i\vec{\theta} \cdot \vec{J} = i\phi^i K^i - i\theta^i J^i$$

(car  $K^i = K_i$  et  $J^i = J_i$ , puisque dans les conventions utilisées (cf. celles pour  $\vec{\sigma}$ ),  $K_i = K^i$  et  $J_i = J^i$  désignent **toujours** les composantes contravariantes). Par antisymétrie de  $J^{\mu\nu}$  on a donc

$$-\frac{1}{2}i\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} = -i\omega_{0i}J^{0i} - \frac{i}{2}\omega_{jk}J^{jk} = -i\phi^i J^{0i} + \frac{i}{2}\theta_i \varepsilon_{ijk}J^{jk}$$

d'où

$$\begin{cases} \omega_{0i} = \phi^i \\ \omega_{jk} = -\varepsilon_{ijk}\theta_i \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \omega^{0i} = -\phi^i \\ \omega^{jk} = \varepsilon_{ijk}\theta^i. \end{cases}$$

### Compactification

Il est possible de rendre l'algèbre de Lie compacte, en utilisant la méthode présentée page 47.

Posons

$$\begin{cases} M_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \\ N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \end{cases} . \quad (8.32)$$

On obtient alors

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k \quad [N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}N_k \quad [M_i, N_j] = 0.$$

Cette algèbre de Lie est donc identique à celle du groupe  $SU(2) \times SU(2)$ .

L'algèbre de Lie ainsi obtenue est une forme réelle compacte de même extension complexe que  $so(3, 1)$ .  $\vec{M}^2$  et  $\vec{N}^2$  sont deux opérateurs quadratiques invariants. Ces Casimirs commutent avec  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$ , donc avec toute l'algèbre, et donc avec tout élément du groupe de Lorentz restreint  $L_+^\uparrow$ . Dans le cas d'une représentation irréductible, d'après le lemme de Schur, on a

$$\begin{aligned}\vec{M}^2 &= j_1(j_1 + 1)\mathbb{1} \\ \vec{N}^2 &= j_2(j_2 + 1)\mathbb{1}\end{aligned}\tag{8.33}$$

avec  $j_1, j_2$  entiers ou demi-entiers



# Chapitre 9

## Représentations spinorielles du groupe de Lorentz

### 9.1 Introduction

Soit un système physique qui possède le groupe de Lorentz restreint comme groupe de symétrie :

$$| \langle \psi | \mathcal{X} \rangle |^2 = | \langle \psi_\Lambda | \mathcal{X}_\Lambda \rangle |^2$$

Alors le théorème de Wigner implique qu'il existe un opérateur  $U(\Lambda)$  défini à une phase près tel que  $|\psi_n \rangle = U(\Lambda)|\psi \rangle$ .

Dans le cas du groupe de Lorentz restreint, la connexité du groupe implique que ces opérateurs sont unitaires. Ils constituent une représentation du groupe de Lorentz restreint à une phase près :  $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = \pm U(\Lambda_1\Lambda_2)$ .

L'espace de Hilbert qui décrit un système quantique ayant pour groupe de symétrie le groupe de Lorentz restreint est un espace de représentation unitaire du groupe de recouvrement universel de  $L_+^\uparrow$ , qui est le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ .

rappel :  $SL(2, \mathbb{C})$  est le groupe des matrices complexes  $A$  unidomulaires ( $\det A = +1$ ) à deux dimensions.

L'introduction des spineurs quadridimensionnels est tout à fait analogue à la démarche suivie pour les rotations (voir chapitres 5 et 6). Cette généralisation date de la fin des années 20 (Van der Warden, Uhlenbeck et Laporte).

Les spineurs quadridimensionnels sont introduits comme espace de représentation de dimension minimale de  $SL(2, \mathbb{C})$ . La différence importante entre spineurs 3d et 4d est que dans ce dernier cas, deux représentations conjuguées l'une de l'autre ne sont pas équivalentes.

## 9.2 Homomorphismes du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe $L_+^\uparrow$

### 9.2.1 Préliminaires

• Toute matrice  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{C}$  de la matrice unité  $\sigma_0 = \mathbb{1}$  et des trois matrices de Pauli.

• Toute matrice  $2 \times 2$  hermitienne peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficient réels de ces 4 matrices. Nous avons utilisé cette base pour paramétrer le groupe  $SU(2)$  page 68.

Posons

$$\begin{cases} \sigma_\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) = \underline{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) = \underline{\sigma}_\mu \end{cases}, \quad (9.1)$$

avec  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

A tout quadrivecteur  $x^\mu$  on associe les matrices

$$\tilde{x} = x^\mu \sigma_\mu = x_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

et

$$\tilde{x} = x^\mu \underline{\sigma}_\mu = x_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

On déduit immédiatement de ces relations que  $\tilde{x}$  est hermitique  $\Leftrightarrow \underline{x}$  est hermitique  $\Leftrightarrow x$  réel

$$\begin{aligned} \sigma_\mu &= (1, \vec{\sigma}) \\ \sigma^\mu &= (1, -\vec{\sigma}) \end{aligned}$$

### Propriétés

- 1)  $\det \tilde{x} = x^2$   
En effet  $\det \tilde{x} = (x^0 + x^3)(x^0 - x^3) - (x^1 + ix^2)(x^1 - ix^2) = x^0^2 - x^1^2 - x^2^2 - x^3^2 = x^2$
- 2)  $\frac{1}{2} Tr \sigma_\mu \sigma_\nu = \delta_\nu^\mu$  (correspond à la normalisation habituelle des générateurs de l'algèbre de Lie)

En effet :  $x \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$  donc  $Tr \sigma_i \sigma_j = 2 \delta_{ij}$

•  $\sigma_i \sigma_0 = \sigma_i$  donc  $Tr \sigma_i \sigma_0 = Tr \sigma_i = 0$

•  $\sigma_0 \sigma_0 = \sigma_0$   $Tr \sigma_0 \sigma_0 = Tr \sigma_0 = 2$

3)  $x^\mu = \frac{1}{2} Tr \sigma_\mu \tilde{x}$  puisque  $\frac{1}{2} Tr \sigma_\mu \tilde{x} = \frac{1}{2} Tr \sigma_\mu x^\nu \sigma_\nu = \delta_\nu^\mu x^\nu = x^\mu$

### 9.2.2 Théorème

Il existe un homomorphisme du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  sur le groupe de Lorentz restreint  $L_+^\uparrow$  défini par

$$\begin{aligned} \pm A &\rightarrow \Lambda(A) \\ x' &= \Lambda(A)x \\ \tilde{x}' &= A\tilde{x}A^+ \end{aligned}$$

**Preuve :**  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  donc  $\det \tilde{x}' = |\det A|^2 \det \tilde{x} = \det \tilde{x}$

$$\text{d'où} \quad x'^2 = x^2$$

La transformation linéaire  $x \rightarrow x'$  conserve les longueurs relativistes. C'est donc une transformation de Lorentz.

Calcul des éléments de matrice  $\Lambda(A)^\mu_\nu$

$$x'^\mu \sigma_\mu = Ax^\rho \sigma_\rho A^+ = A \sigma_\rho A^+ x^\rho = \Lambda^\mu_\rho x^\rho \sigma_\mu$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad \Lambda^\mu_\rho \sigma_\mu &= A \sigma_\rho A^+ \\ \Lambda^\mu_\rho \sigma_\mu \sigma_\nu &= A \sigma_\rho A^+ \sigma_\nu \end{aligned}$$

$$\text{comme } \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_\mu \sigma_\nu = \delta_\nu^\mu, \quad \frac{1}{2} \Lambda^\mu_\rho \text{Tr} \sigma_\mu \sigma_\nu = \boxed{\Lambda^\nu_\rho = \frac{1}{2} \text{Tr} A \sigma_\rho A^+ \sigma_\nu}$$

- Montrons que les éléments de matrice sont réels :

$$(\Lambda^\nu_\rho)^* = \frac{1}{2} \text{Tr} (A \sigma_\rho A^+ \sigma_\nu)^+ = \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_\nu A \sigma_\rho A^+ = \frac{1}{2} \text{Tr} A \sigma_\rho A^+ \sigma_\nu = \Lambda^\nu_\rho$$

- La transformation est orthochrone :

$$A^0_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} A \sigma_0 A^+ \sigma_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} A A^+ > 0$$

- $\det \Lambda = +1$  :

$\det \Lambda(A)$  est une fonction continue de  $A$ . Comme  $SL(2, \mathbb{C})$  est connexe,  $\det \Lambda(A)$  ne peut prendre qu'une seule des deux valeurs  $+1$  ou  $-1$  ( $x^1 = \Lambda(A)x$  et  $x^2 = x'^2$  donc  $\det \Lambda(A) = \pm 1$ ).

Considérons un élément particulier :  $A = \mathbb{1}$

$$\Lambda(\mathbb{1})^\nu_\rho = \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_\rho \sigma_\nu = \delta_{\rho\nu} \quad \text{donc} \quad \Lambda(\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det \Lambda = 1 \quad \text{c.f.q.d.}$$

**Ainsi**  $\Lambda(A) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ . Il est immédiat que  $\Lambda(-A) = \Lambda(A)$ .

- le noyau de ce morphisme se réduit à  $Z_2$  : soit  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  t.q.  $\Lambda(A)^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ . Alors  $\forall x, \tilde{x} = A\tilde{x}A^+$ .

Pour  $x = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\tilde{x} = 1$  donc  $AA^+ = 1$ , d'où  $A$  unitaire.

On a ainsi  $[\tilde{x}, A] = 0, \forall \tilde{x}$ .

Ainsi  $A = \lambda \mathbb{1}$

Comme  $\det A = 1$ ,  $A = \pm \mathbb{1}$  **c.q.f.d.**

On peut construire un second homomorphisme de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $L_+^\uparrow$  en considérant

$$\underset{\sim}{x} = x^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{x} = x_\mu \underset{\sim}{\sigma}^\mu \quad \underset{\sim}{\sigma}^\mu = (1, \vec{\sigma}) \quad \underset{\sim}{\sigma}_\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

$$\begin{aligned}
\pm B &\rightarrow \Lambda(B) \\
x' &= \Lambda(B)x \\
x' &= B x B^+ \\
\tilde{x} &= \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \quad \det \tilde{x} = x^2
\end{aligned}$$

La preuve est identique à la preuve précédente. En particulier l'expression de  $\Lambda(B)$  est obtenue par :

$$\begin{aligned}
x'_\mu \tilde{\sigma}^\mu &= B x_\rho \tilde{\sigma}^\rho B^+ = B \tilde{\sigma}^\rho B^+ x_\rho & (\tilde{\sigma}^\mu = \sigma_\mu) \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, \vec{\sigma}) \\
&= \Lambda_\mu^\rho x_\rho \tilde{\sigma}^\mu
\end{aligned}$$

$$\text{donc } \Lambda_\mu^\rho \tilde{\sigma}^\mu = B \tilde{\sigma}^\rho B^+$$

$$\Lambda_\mu^\rho \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu = B \tilde{\sigma}^\rho B^+ \tilde{\sigma}^\nu$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } \Lambda_\nu^\rho &= \frac{1}{2} \text{Tr } B \tilde{\sigma}^\rho B^+ \tilde{\sigma}^\nu \\
&= \Lambda_\nu^{-1\rho} = \left( {}^t \Lambda_{(B)}^{-1} \right)_\rho^\nu
\end{aligned}$$

$$\text{or } \tilde{x}^1 = B \tilde{x} B^+ \Leftrightarrow \tilde{x} = B^{-1} \tilde{x}' B^{-1+} \quad \text{donc } \Lambda^{-1}(B) = \Lambda(B^{-1})$$

$$\text{soit } {}^t \Lambda(B)^\nu_\rho = \frac{1}{2} \text{Tr } B^{-1} \tilde{\sigma}^\rho B^{-1+} \tilde{\sigma}^\nu$$

$$\| \Lambda(B)^\nu_\rho = \frac{1}{2} \text{Tr } B^{-1} \tilde{\sigma}^\nu B^{-1+} \tilde{\sigma}^\rho$$

En posant  $B = (A^+)^{-1}$  on décrit la même transformation de Lorentz que celle définie par  $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}' = A \tilde{x} A^+$  :

$$\begin{aligned}
\Lambda(A^{+-1})^\nu e &= \frac{1}{2} \text{Tr } A^+ \tilde{\sigma}^\nu A \tilde{\sigma}^\rho \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr } A \tilde{\sigma}^\rho A^+ \tilde{\sigma}^\nu \quad (\text{par permutation cyclique}) \\
&= \tilde{\Lambda}(A)^\nu_\rho \quad \mathbf{c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

**Théorème :** Tout élément  $\Lambda$  de  $L_+^\uparrow$  se décompose de façon unique en un produit  $\Lambda_1 \Lambda_2$ , où  $\Lambda_1$  est une rotation et  $\Lambda_2$  une transformation de Lorentz spéciale.

**Preuve :** il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que tout élément  $A$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  se décompose de façon unique en produit  $A = UH$  avec  $\det H = \det U = 1$  et

$$\begin{cases}
UU^+ = U^+U = 1 & \rightarrow \text{rotation} \\
H^+ = H & \rightarrow \text{boost}
\end{cases}$$

Or  $A^+A = H^2$ , donc  $H = (A^+A)^{1/2}$  est la racine carrée définie positive unique (qui existe toujours) de  $A^+A$ , et  $U = A(A^+A)^{-1/2}$ . On a bien  $\det H = 1$  et  $\det U = 1$  **c.q.f.d.**

## 9.3 Représentations spinorielles de $L_+^\uparrow$

### 9.3.1 Identification des représentations spinorielles

D'après le paragraphe précédent, les matrices  $A$  engendrent une représentation de  $L_+^\uparrow$ . Identifions-la

$$A = 1 + \varepsilon_0 + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma} + O(\varepsilon^2) \quad \varepsilon_0, \vec{\varepsilon} \in \mathbb{C}$$

$\det A = 1$  donc  $\varepsilon_0 = 0$

Donc toute matrice de  $SL(2, \mathbb{C})$  proche de l'identité peut s'écrire

$$A = 1 + \vec{\varepsilon} \vec{\sigma} = 1_{\frac{1}{2}} i \left( -\vec{\alpha} - i\vec{\beta} \right) \cdot \vec{\sigma} \quad (1)$$

Déterminons les générateurs de la représentation correspondante de  $L_+^\uparrow$ , notés  $J_{\mu\nu}$ , qui vérifient

$$A = 1 - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}$$

$$\text{avec } \begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu} = \Lambda^{\mu\nu} x_{\nu} \\ x'^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}' = (1 + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma})(x^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x})(1 + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma})^+ \end{cases}$$

$$\text{d'où } x'^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}' = x^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma}(x^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}) + (x^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x})\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\sigma}$$

**Rappel :**

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \vec{b} \cdot \vec{\sigma} &= a_i \sigma_j b_j \sigma_j = a_i b_j (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) \\ &= a_i b_i + i\varepsilon_{ijk} a_i b_j \sigma_k \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

donc ici  $x'^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}' = x^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x} + x^0(\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^*) \cdot \vec{\sigma} + (\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^*) \cdot \vec{x} + i((\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^*) \wedge \vec{x}) \cdot \vec{\sigma}$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{i}{2}(-\vec{\alpha} - i\vec{\beta}) \quad \left| \begin{array}{l} \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^* = \vec{\beta} \\ \vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^* = -i\vec{\alpha} \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \begin{cases} x'^0 = x^0 + \vec{x} \cdot \vec{\beta} = x - \beta^i x_i \\ \vec{x}' = \vec{x} + \vec{\beta} x^0 + \vec{\alpha} \wedge \vec{x} \text{ donc } x'^i = x^i + \beta^i x^0 - \varepsilon_{ijk} \alpha^k x^j \end{cases}$$

Par comparaison avec  $x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu}$  il vient

$$\begin{cases} \omega^{0i} = -\beta^i \\ \omega^{ij} = +\varepsilon_{ijk} \alpha^k \end{cases} \quad \text{identique à L-2S (heureusement !)}$$

$$A = 1 - i\omega^{0i} J_{0i} - \frac{i}{2} \omega^{ij} J_{ij}$$

donc par comparaison avec (1) on a

$$J_{0i} = -i\frac{\sigma_i}{2} \quad J_{ij} = \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (\leftarrow \varepsilon_{i'j'k} \sigma_k = \varepsilon_{i'j'k} \varepsilon_{ijk} J_{ij} = J_{i'j'} - J_{j'i'} = 2J_{i'j'})$$

$$\text{d'où } \begin{cases} K_i = -i\frac{\sigma_i}{2} \\ J_i = \frac{\sigma_i}{2} \end{cases} \quad \text{puisque } \begin{cases} K_i = J_{0i} \\ J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkk'}\frac{\sigma_{k'}}{2} \end{cases}$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} M_i = \frac{\sigma_i}{2} \\ N_i = 0 \end{cases} \quad \text{représentation } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

A ces générateurs infinitésimaux est associée la matrice

$$A = e^{-i\alpha_i\frac{\sigma_i}{2}} e^{\beta_i\frac{\sigma_i}{2}} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad A = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}} e^{i\phi\vec{m}\cdot\vec{k}}$$

$$\text{Posant } \begin{cases} \vec{\alpha} = \theta\vec{n} \\ \vec{\beta} = \phi\vec{m} \end{cases} \quad \text{avec } \vec{n}^2 = \vec{m}^2 = 1,$$

la transformation  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta} = \vec{0})$  définit une rotation (**active**) autour de l'axe  $\vec{n}$  d'angle  $\theta$  :  $\begin{cases} x'_0 = x_0 \\ \vec{x}' = \vec{x} \cos \theta + \vec{n} \wedge \vec{x} \sin \theta + (1 - \cos \theta)\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) \end{cases}$  (cf L-19)

la transformation  $(\vec{\alpha} = \vec{0}, \vec{\beta})$  définit une transformation spéciale (**active**) de Lorentz le long de l'axe  $\vec{m}$  :  $\begin{cases} x'_0 = x_0 \cosh \phi + \vec{m} \cdot \vec{x} \sinh \phi \\ \vec{x}' = \vec{x} + x_0\vec{m} \sinh \phi + \vec{m}(\vec{m} \cdot \vec{x})(\cosh \phi - 1) \end{cases}$

La représentation  $(0, \frac{1}{2})$  est définie par  $M_i = 0, N_i = \frac{\sigma_i}{2}$  soit  $K_i = \frac{i\sigma_i}{2}, J_i = \frac{\sigma_i}{2}$  et la matrice de  $SL(2, \mathbb{C})$  associée s'écrit  $B = e^{-i\alpha_i\frac{\sigma_i}{2}} e^{-\beta_i\frac{\sigma_i}{2}}$ . On vérifie bien que  $B = A^{+ -1}$ . De plus  $J_{0i} = \frac{i\sigma_i}{2}$  et  $J_{ij} = \varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$ . On dispose ainsi de deux représentations du groupe de Lorentz.

**Théorème :**

Ces deux représentations son inéquivalentes.

*Preuve:*

Supposons les représentations équivalentes, alors  $\forall A, \exists S$  t.q.  $(A^+)^{-1} = SAS^{-1} \Rightarrow \text{Trace } A = \text{Trace } (A^+)^{-1}$ . Cette condition est violée pour certaines transformations de  $SL(2, \mathbb{C})$  (elles ne doivent bien sûr pas appartenir à  $SU(2)$ ).

$$\text{Ex. : } A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Trace } A = \frac{3}{2}i$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad A^{+ -1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \quad \text{Trace } A^{+ -1} = -\frac{3}{2}i$$

**9.3.2 Représentations de  $SL(2, \mathbb{C})$**

Par morphisme, on construira naturellement l'algèbre de Lie de  $sl(2, \mathbb{C})$  dans la représentation  $D$  sous la forme :

$$A = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J_{4\times 4}^{\alpha\beta} \rightarrow D(A(\omega)) = D(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}$$

On en déduit que

$J^{\mu\nu}$  est un opérateur tensoriel antisymétrique à deux indices :

$$D^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$$

Pour une transformation infinitésimale, cette relation se ramène à l'algèbre de Lie  $D(\Lambda) = \exp -\frac{1}{2}i\varepsilon_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}$

$$D^{-1}(\Lambda)^{\alpha\beta'} (J^{\mu\nu})_{\beta'\alpha'} D(\Lambda)^{\alpha'}{}_\beta = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta$$

$$D(\Lambda)^{\alpha'}{}_\beta = \delta^{\alpha'}{}_\beta - \frac{1}{2}i\varepsilon_{\gamma\delta} (J^{\gamma\delta})^\alpha{}_\beta$$

$$D(\Lambda)^{\alpha\beta'} = g^{\alpha\beta'} - \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\delta} (J^{\gamma\delta})^{\alpha\beta'}$$

$$\text{donc } D^{-1}(\Lambda)^{\alpha\beta'} = g^{\alpha\beta'} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\delta} (J^{\gamma\delta})^{\alpha\beta'}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } & \left( g^{\beta'\alpha} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\delta} (J^{\gamma\delta})^{\alpha\beta'} \right) (J^{\mu\nu})_{\beta'\alpha'} \left( g^\alpha{}_\beta - \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\delta} (J^{\gamma\delta})^\alpha{}_\beta \right) \\ & = (\delta^\mu{}_\rho + \varepsilon^\mu{}_\rho) (\delta^\nu{}_\sigma + \varepsilon^\nu{}_\sigma) (J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta \end{aligned}$$

qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & + \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\delta} (J^{\gamma\delta} J^{\mu\nu} - J^{\mu\nu} J^{\gamma\delta})^\alpha{}_\beta = \varepsilon^\mu{}_\rho J^{\rho\nu} + \varepsilon^\nu{}_\sigma J^{\mu\sigma} \\ & = \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\delta} \left[ \underbrace{-ig^{\gamma\mu}J^{\delta\nu} + ig^{\delta\nu}J^{\mu\gamma} + ig^{\delta\mu}J^{\gamma\nu} - ig^{\gamma\nu}J^{\mu\delta}} \right]^\alpha{}_\beta \end{aligned}$$

on a fait apparaître la partie antisymétrique du tenseur afin de pouvoir identifier terme à terme

$$\text{donc } [J^{\gamma\delta}, J^{\mu\nu}]^\alpha{}_\beta = i (g^{\nu\delta}J^{\mu\gamma} - g^{\nu\gamma}J^{\mu\delta} + g^{\mu\delta}J^{\gamma\nu} - g^{\mu\gamma}J^{\delta\nu})^\alpha{}_\beta \quad \mathbf{c.q.f.d.}$$

*Rem.* : la relation de transformation du tenseur  $J^{\mu\nu}$  comme un opérateur tensoriel antisymétrique de rang 2 généralise le fait que les générateurs des rotations et des boosts sont des opérateurs vectoriels (tenseurs de rang 1) sur le groupe des rotations.

## 9.4 Spineurs quadridimensionnels

### 9.4.1 Spineurs contravariants et covariants

Par définition, c'est un objet à deux composantes complexes  $\xi^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) qui se transforme de la façon suivante :

$$\xi \rightarrow A\xi \quad \text{représentation notée } D^{[1/2,0]}$$

Nous venons de voir que la représentation construite à l'aide de  $B = (A^+)^{-1}$  est inéquivalente à celle construite à l'aide de  $A$ . Comme  $C^t \bar{A}^{-1} C^{-1} = \bar{A}$ , les représentations construites à l'aide de  $A^{+^{-1}}$  et  $\bar{A}$  sont équivalentes. Introduisons donc un deuxième espace de représentation, constitué aussi de vecteurs avec deux composantes complexes  $\eta^{\dot{\alpha}}$  ( $\dot{\alpha} = 1, 2$ ), appelés spineurs pointés. Par définition la loi de transformation correspondant à l'élément  $A$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  est :

$$\eta \rightarrow \bar{A}\eta \quad D^{[0, \frac{1}{2}]}$$

Donc  $\eta^{\dot{\alpha}}$  se transforme comme  $\bar{\xi}^{\alpha}$ .

La manipulation des indices non pointés et pointés se fait comme dans le cas tridimensionnel, par le tenseur  $C_{\alpha\beta}$  :

$$\xi_{\alpha} = C_{\alpha\beta} \xi^{\beta} \quad \eta_{\dot{\alpha}} = C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$$

$$\text{donc} \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi^2 \\ \xi_2 = -\xi^1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{\dot{1}} = \eta^{\dot{2}} \\ \eta_{\dot{2}} = -\eta^{\dot{1}} \end{array} \right.$$

Examinons la façon dont se transforme  $\eta_{\dot{\alpha}}$  :

$$\eta' = \bar{A}\eta \quad \text{i.e.} \quad \eta'^{\dot{\alpha}} = \bar{A}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$$

$$C_{\dot{\alpha}'\dot{\alpha}} \eta'^{\dot{\alpha}} = C_{\dot{\alpha}'\dot{\alpha}} \bar{A}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} C_{\dot{\beta}\dot{\beta}''}^{-1} C_{\dot{\beta}'\dot{\beta}''} \eta^{\dot{\beta}'}$$

$$\text{soit} \quad \eta'_{\dot{\alpha}'} = A^{+^{-1}}{}^{\dot{\alpha}'}_{\dot{\beta}''} \eta_{\dot{\beta}''}$$

De même  $\xi_{\beta}$  se transforme à l'aide de  ${}^t A^{-1}$

## 9.4.2 Produit scalaire invariant

$\langle \xi, \xi' \rangle = {}^t \xi C \xi' = \xi^{\alpha} \xi'_{\alpha} = \xi^1 \xi'^2 - \xi^2 \xi'^1$  est invariant sous  $SL(2, \mathbb{C})$  puisque  $\det A = 1$  (ou encore :  ${}^t A C A = C$  car  $C A C^{-1} = {}^t A^{-1} A \in SL(2, \mathbb{C})$  donc  ${}^t A C A C^{-1} = 1$  **c.q.f.d.**)

$$\langle \eta, \eta' \rangle = {}^t \eta C \eta' = \eta^{\dot{\alpha}} \eta'_{\dot{\alpha}} = \eta^{\dot{1}} \eta'^{\dot{2}} - \eta^{\dot{2}} \eta'^{\dot{1}}$$

Dans le cas tridimensionnel la combinaison positive  $\rho = \xi^1 \bar{\xi}^1 + \xi^2 \bar{\xi}^2 = {}^t \xi_{\alpha} \bar{\xi}^{\alpha}$  est un invariant qui peut s'interpréter, si  $\xi$  est une fonction d'onde, comme une densité de probabilité de présence.

Dans le cas quadridimensionnel, ce n'est pas un invariant, car  $A$  n'est pas unitaire (sauf si c'est une rotation d'espace). Pour  $A$  quelconque,  $\xi^{\alpha} \rightarrow A \xi^{\alpha}$  et  $\bar{\xi}^{\alpha} \rightarrow \bar{A} \bar{\xi}^{\alpha}$  mais en général  ${}^t A \cdot \bar{A} \neq 1$  sauf si  $A \in SU(2)$ . Ceci n'est pas gênant pour l'interprétation de  $\rho$  car en théorie relativiste, la densité de probabilité ne doit pas être un scalaire mais plutôt la composante temporelle d'un quadrivecteur.

### 9.4.3 Spineurs d'ordre supérieur

Ils se définissent par produits tensoriels des représentations fondamentales constituées des spineurs et des spineurs pointés (i.e. des spineurs d'ordre 1).

$$\begin{aligned} \text{Ex. spineurs d'ordre 2 : } \quad & \xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \theta^\beta \\ & \phi^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha \eta^{\dot{\beta}} \\ & \xi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim \eta^{\dot{\alpha}} \omega^{\dot{\beta}} \end{aligned}$$

*Rem.* : les spineurs mixtes d'ordre 2  $\phi^{\alpha\dot{\beta}}$  correspondent aux quadrivecteurs  $x^\mu$ .

- L'ordre d'un spineur est indiqué par un couple de nombres  $(k, l)$  représentant les nombres d'indices pointés et non pointés.

- Les indices pointés et non pointés ne peuvent se mélanger sous  $L_+^\uparrow$ , donc il n'est pas nécessaire de spécifier l'ordre des indices.

- Covariance d'une égalité spinorielle : l'ordre doit être le même dans les deux membres de l'égalité (en tenant compte de la conjugaison complexe).

$$\text{ex. : } \eta^{\alpha\dot{\beta}} = \bar{\xi}^{\dot{\alpha}\beta} \text{ est covariante}$$

- la contraction de spineurs par le tenseur  $C_{\alpha\beta}$  n'a de sens que sur des indices de même espèce (la contraction sur des indices de nature différente n'est pas covariante) :

$$\begin{aligned} \xi^\beta C_{\beta\alpha} \eta^\alpha &\rightarrow \xi'^{\beta} C_{\beta\alpha} \eta'^{\alpha} = A^\beta_{\beta'} \xi^{\beta'} C_{\beta\alpha} A^\alpha_{\alpha'} \eta^{\alpha'} \\ & A^\beta_{\beta'} C_{\beta\alpha} A^\alpha_{\alpha'} = ({}^t A C A)_{\alpha'}^{\beta'} \\ \text{or } {}^t A C A &= C \underbrace{C^{-1} {}^t A C}_{= C^{-1} A} = C \end{aligned}$$

En revanche

$$\begin{aligned} \xi^\beta C_{\beta\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} &\rightarrow \xi'^{\beta} C_{\beta\dot{\alpha}} \eta'^{\dot{\alpha}} = A^\beta_{\beta'} \xi^{\beta'} C_{\beta\dot{\alpha}} \bar{A}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}'} \eta^{\dot{\alpha}'} \\ & A^\beta_{\beta'} C_{\beta\dot{\alpha}} \bar{A}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}'} \\ &= ({}^t A C \bar{A})_{\dot{\alpha}'}^{\beta'} = C A^{-1} \bar{A} \neq C \end{aligned}$$

On obtient une succession de tenseurs de rang moindre en contractant par paires les indices d'un tenseur.

### 9.4.4 Représentation irréductibles de $SL(2, \mathbb{C})$

Le résultat démontré pour les tenseurs 3d subsiste : les représentations irréductibles d'ordre supérieur de  $SL(2, \mathbb{C})$  sont données par les spineurs  $\xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dots \dot{\beta}_l}$  séparément symétriques sur les  $k$  indices  $\alpha$  et  $l$  indices  $\dot{\beta}$ .

Un spineur complètement symétrique de rang  $(k, l)$  possède  $(k+1)(l+1)$  composantes indépendantes, ce qui constitue la dimension de la représentation irréductible réalisée par ce tenseur spinoriel.

Représentations irréductibles  $D^{[j_1, j_2]}$  de dimension finie de  $SL(2, \mathbb{C})$  : elles sont caractérisées par deux nombres  $j_1$  et  $j_2$  entiers ou demi-entiers, sont de dimension  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ , et données sur une base de polynôme homogène de degré  $2j_1 + 2j_2$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi^3 \\ \xi^4 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{A} \begin{pmatrix} \xi^3 \\ \xi^4 \end{pmatrix}$$

$$|j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle \rightarrow \sum_{m'_1 m'_2} D_{m_1, m'_1, m_2, m'_2}^{[j_1, j_2]}(A) |j_1 j_2 m'_1 m'_2 \rangle$$

avec  $m_k = -j_k, -j_k + 1, \dots, j_k \quad k = 1, 2$

$$|j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle = \frac{(\xi^1)^{j_1+m_1} (\xi^2)^{j_1-m_1} (\xi^3)^{j_2+m_2} (\xi^4)^{j_2-m_2}}{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}}$$

donc  $D^{[j_1, j_2]}(A) = D^{j_1, 0}(A) \otimes D^{[0, j_2]}(A)$

$$D^{[0, j]}(A) = D^{[j, 0]}(\bar{A})$$

$D^{[0, j]}(A)$  et  $D^{[j, 0]}(A)$  sont inéquivalentes, l'équivalence a lieu si et seulement si  $A \in SU(2)$ .

$$D^{[0, 0]}(A) = 1$$

$$D^{[\frac{1}{2}, 0]}(A) = A$$

$$D^{[0, \frac{1}{2}]}(A) = \bar{A}$$

$$D^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(A) = A \otimes \bar{A}$$

multispineurs :  $a^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \beta_1 \beta_2 \dots \beta_j} \in \mathbb{C}^{2 \otimes i} \otimes \mathbb{C}^{2 \otimes j}$

sur lesquels  $(D^{[\frac{1}{2}, 0]})^{\otimes i} \otimes (D^{[0, \frac{1}{2}]})^{\otimes j}$  agit par

$$(D^{[\frac{1}{2}, 0]})^{\otimes i} \otimes (D^{[0, \frac{1}{2}]})^{\otimes j} : a \rightarrow A^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots A^{\alpha_i}_{\gamma_i} \bar{A}^{\beta_1}_{\delta_1} \dots \bar{A}^{\beta_j}_{\delta_j} a^{\gamma_1 - \gamma_i \delta_1 \dots \delta_j}$$

pour  $i + j > 1$ , ces représentations sont réductibles, les représentations réductibles s'obtenant par symétrisation séparée par rapport aux indices pointés et non pointés. Le lien entre multispineurs symétriques de rang  $(2i, 2j)$  et  $D^{[i, j]}$  est immédiat en utilisant la preuve faite pour  $SU(2)$  (cf  $\Phi_{jm} \dots$ ).

Le produit scalaire  $d^2 \varphi d^2 \varphi^* e^{-\varphi^+ \cdot \varphi}$  n'étant plus invariant, ces représentations sont en général **non unitaires**, ce qui n'est pas étonnant puisque  $SL(2, \mathbb{C})$  est non compact.

### 9.4.5 Application : lien entre spineurs mixtes et quadrivercteurs

On sait que  $\vec{W} = {}^t \xi \vec{\sigma} \xi$  et  $\vec{V} = {}^t \bar{\eta} \vec{\sigma} \eta$  sont des vecteurs pour les rotations (voir cours sur les spineurs 3d).  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  a pour composantes  $\xi^\alpha$  ( $\eta$  a pour composantes  $\eta_\alpha$ )

$\bar{\xi}^\alpha \xi^\alpha$  et  $\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\alpha}}$  étant des scalaires sous les rotations (mais non invariants sous les boosts, voir plus haut), vérifions que  $W^\mu = \bar{\xi}^\alpha \sigma^\mu \xi^\alpha$  et  $V^\mu = \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \sigma^\mu \eta_{\dot{\alpha}}$  se transforment comme les composantes contravariantes de deux quadrivecteurs

$$W^\mu = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^\alpha \xi^\alpha \\ \bar{\xi}^\alpha \vec{\sigma} \xi^\alpha \end{pmatrix} \quad V_\mu = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\alpha}} \\ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \vec{\sigma} \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad W'^\mu = \begin{pmatrix} \bar{\xi}'^\alpha \xi'^\alpha \\ \bar{\xi}'^\alpha \vec{\sigma} \xi'^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^\alpha A^+ A \xi^\alpha \\ \bar{\xi}^\alpha A^+ \vec{\sigma} A \xi^\alpha \end{pmatrix}$$

Considérons un boost infinitésimal :  $A = e^{d\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} A^+ = e^{d\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} A^+ A = e^{d\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}}$

$$\text{donc } \bar{\xi}^\alpha A^+ A \xi^\alpha = \bar{\xi}^\alpha \xi^\alpha + d\vec{\beta} \cdot \left( \bar{\xi}^\alpha \vec{\sigma} \xi^\alpha \right)$$

$$\bar{\xi}^\alpha A^+ \vec{\sigma} A \xi^\alpha = \bar{\xi}^\alpha \left( 1 + d\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \vec{\sigma} \left( 1 + d\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \xi^\alpha$$

supposons par exemple que  $d\vec{\beta} = d\beta \vec{u}_x$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^\alpha \left( 1 + d\vec{\beta} \cdot \frac{\sigma_1}{2} \right) \vec{\sigma} \left( 1 + d\vec{\beta} \cdot \frac{\sigma_1}{2} \right) \xi^\alpha &= \bar{\xi}^\alpha \vec{\sigma} \xi^\alpha + \bar{\xi}^\alpha \underbrace{\left( \sigma_1 \vec{\sigma} + \vec{\sigma} \sigma_1 \right)}_{2\delta_{1j}} \xi^\alpha \frac{d\beta}{2} \\ &= \bar{\xi}^\alpha \vec{\sigma} \xi^\alpha + d\beta \bar{\xi}^\alpha \xi^\alpha \end{aligned}$$

d'où  $W'^\mu = \begin{pmatrix} 1 & d\beta & & \\ d\beta & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} W^\mu$  ce qui est bien la loi de transformation des com-

posantes contravariantes d'un 4-vecteur sous un boost actif

$$\text{de même : } V'_\mu = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} A^{-1} A^{+1} \eta_{\dot{\alpha}} \\ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} A^{-1} \vec{\sigma} A^{+1} \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

$$A^{+1} = e^{-d\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad A^{-1} = e^{-d\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$$

donc  $V'^\mu = \begin{pmatrix} 1 & -d\beta & & \\ -d\beta & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} V^\mu$  transformation des composantes covariantes

d'un 4-vecteur sous un boost actif

Comme  $\bar{\xi}^\alpha \sim \eta^{\dot{\alpha}}$ ,  $W^\mu$  peut encore s'écrire

$$W^\mu = \eta^{\dot{\alpha}} \sigma^\mu \xi^\alpha$$

$$\text{soit } \begin{cases} W^0 = \eta^{\dot{\alpha}} \xi^\alpha = \eta^{\dot{1}} \xi^1 + \eta^{\dot{2}} \xi^2 \\ W^1 = {}^t(\eta^{\dot{1}}) \sigma_1 \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi^1 \end{pmatrix} = \xi^2 \eta^{\dot{1}} + \xi^1 \eta^{\dot{2}} \\ W^2 = {}^t(\eta^{\dot{1}}) \sigma_2 \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = i \left( \xi^1 \eta^{\dot{2}} - \xi^2 \eta^{\dot{1}} \right) \\ W^3 = \xi^1 \eta^{\dot{1}} - \xi^2 \eta^{\dot{2}} \end{cases}$$

Ainsi au spineur mixte de rang 2  $\varphi^{\alpha\dot{\alpha}}$  correspond le quadrivecteur

$$W^\mu : \begin{cases} W^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^{1i} + \varphi^{2\dot{2}}) \\ W^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^{1\dot{2}} + \varphi^{2i}) \\ W^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\varphi^{1\dot{2}} - \varphi^{2i}) \\ W^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^{1i} - \varphi^{2\dot{2}}) \end{cases} \quad (\text{normalisation pour que } W^2 = \varphi_{\alpha\dot{\beta}} \varphi^{\alpha\dot{\beta}})$$

$$\Leftrightarrow : \begin{cases} \varphi^{1i} = \varphi_{2\dot{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 + a^3) \\ \varphi^{2\dot{2}} = \varphi_{1i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 - a^3) \\ \varphi^{1\dot{2}} = -\varphi_{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^1 - ia^2) \\ \varphi^{2i} = -\varphi_{1\dot{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^1 + ia^2) \end{cases}$$

soit  $\varphi^{\alpha\dot{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\mu \sigma_\mu$  de même  $\varphi_{\dot{\alpha}\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\mu \tilde{\sigma}_\mu$ .

## 9.5 Inversion d'espace et bispineurs

**3d** : l'inversion d'espace commute avec les rotations

**4d** : l'inversion d'espace, notée  $I_s$ , ne commute pas avec les transformations de Lorentz pures  $\rightarrow$  cette opération permet de relier les représentations complexes conjuguées l'une de l'autre, et en particulier de transformer les spineurs non pointés en spineurs pointés. Elle permet l'introduction des bispineurs, nécessaires à la théorie des particules massives de spin demi-entier, tels l'électron ou les nucléons.

**3d** :  $\xi \rightarrow I_s \xi = P \xi$  où  $P$  est un coefficient constant, en effet  $I_s$  est diagonal pour un spineur 3d puisque  $I_s$  commute avec les rotations, d'où le résultat d'après le Lemme de Schur.

$P$  est défini avec une certaine liberté : deux inversions successives permettent de revenir à l'état initial. Mais ce retour peut être considéré soit comme une rotation d'angle  $\theta$ , soit comme une rotation d'angle  $2n$ .

Pour un spineur, qui change de signe par rotation de  $2n$ , ces deux possibilités ne sont pas équivalentes.

deux possibilités :  $P^2 = 1 \Rightarrow P = \pm 1$

$$P^2 = -1 \Rightarrow P = \pm i$$

Nous choisissons la seconde possibilité.

*Rem.* : la parité ne peut avoir de caractère absolu, puisque les spineurs changent de signe dans une rotation de  $2n$ , qui peut toujours être faite en même temps que l'inversion.

En revanche la parité du scalaire  $\psi^\alpha \psi_\alpha$  est absolue, tous les spineurs changeant **simultanément** de signe dans une rotation de  $2n$ , ce qui n'affecte pas la parité de ce scalaire.

**4d** : notons  $L_{\vec{V}}$  la transformation de Lorentz pure de vitesse  $\vec{V}$

Alors  $I_s L_{\vec{V}} = L_{-\vec{V}} I_s$

Donc  $[I_s, L_{\vec{V}}] \neq 0$  (pour  $\vec{V} \neq \vec{0}$ )

Ainsi les composantes d'un spineur quadridimensionnel ne peuvent se transformer en elles-mêmes (sinon  $I_s$  serait multiple de l'identité, puisque  $I_s$  commute avec les rotations, et donc  $I_s$  commuterait avec les transformations de Lorentz pure!). La seule solution est que les composantes de  $\xi^\alpha$  se transforment dans d'autres quantités :

$$\xi^\alpha \rightarrow i\eta_{\dot{\alpha}} \quad \eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow i\xi^\alpha$$

qui vérifie bien  $P^2 = -1$ .

On a donc

$$\xi_\alpha \rightarrow -i\eta_{\dot{\alpha}} \quad \eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow -i\xi_\alpha$$

*Rem.* : Comme l'inversion d'espace ne change pas la valeur du spin, on doit avoir  $\xi^\alpha \rightarrow i\eta_{\dot{\beta}}$  avec  $\beta = \alpha$ .

**En effet** : sous une rotation les 4-spineurs se comportent comme des 3-spineurs. Or ces derniers vérifient  $\bar{\psi}_\alpha \sim \psi^\alpha$ .

Comme  $\eta^\alpha \sim \bar{\xi}^\alpha$ ,  $\eta_{\dot{\alpha}} \sim \bar{\xi}_\alpha$   $_{SL(2, \mathbf{C})}$   $\sim \xi^\alpha$ , donc si  $\xi^1$  correspond à la projection du spin 1/2 et  $\xi^2$  à la projection du spin -1/2, il en est de même pour  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .

Pour combiner de façon cohérente inversion et groupe de Lorentz restreint, on doit donc considérer des espaces de représentation contenant simultanément les spineurs et les spineurs pointés. Au minimum, il faut considérer les couples  $(\xi^\alpha, \eta_{\dot{\alpha}})$ , appelés bispineurs d'ordre 1. Partant de cette représentation minimale, on peut construire par produits tensoriels les représentations irréductibles du groupe de Lorentz complet.

Produit scalaire à partir de  $(\xi^\alpha, \eta_{\dot{\alpha}})$  et  $(\theta^\alpha, H_{\dot{\alpha}})$  :

• soit  $\xi^\alpha \theta_\alpha + \eta_{\dot{\alpha}} H^{\dot{\alpha}}$  ce qui donne un scalaire de Lorentz ( $\rightarrow \eta_{\dot{\alpha}} H^{\dot{\alpha}} + \xi^\alpha \theta_\alpha$  sous  $I_s$ )

*rem.* :  $\xi^\alpha \theta_\alpha + \eta_{\dot{\alpha}} H^{\dot{\alpha}} = \xi^\alpha \theta_\alpha - \eta_{\dot{\alpha}} H_{\dot{\alpha}}$

• soit  $\xi^\alpha \theta_\alpha - \eta_{\dot{\alpha}} H^{\dot{\alpha}}$  ce qui donne un pseudo-scalaire de Lorentz

*rem.* :  $\xi^\alpha \theta_\alpha - \eta_{\dot{\alpha}} H^{\dot{\alpha}} = \xi^\alpha \theta_\alpha + \eta_{\dot{\alpha}} H_{\dot{\alpha}}$

*Ex.* : spineurs mixtes d'ordre 2

soit  $\varphi^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha H^{\dot{\beta}} + \theta^\alpha \eta_{\dot{\beta}} \xrightarrow{I_s} \varphi_{\dot{\alpha}\beta}$

correspond à un vrai vecteur  $a^\mu$ , i.e. qui se transforme selon  $(a^0, \vec{a}) \xrightarrow{I_s} (a^0, -\vec{a})$

soit  $\varphi^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha H^{\dot{\beta}} - \theta^\alpha \eta_{\dot{\beta}} \xrightarrow{I_s} -\varphi_{\dot{\alpha}\beta}$

correspond à un 4 pseudo-vecteur :  $(a^0, \vec{a}) \xrightarrow{I_s} (-a^0, \vec{a})$

**Preuve** : il suffit d'examiner les formules d'inversion p. SL-17

*Rem.* : l'opération de parité s'écrit

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_s = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

l'opération de parité doit conserver le spin. On pourrait donc a priori mélanger les spineurs de la façon suivante par parité :

$$\gamma_P = i \begin{pmatrix} \xi^1 & \eta_1 & \xi^2 & \eta_2 \\ A & & 0 & \\ 0 & & B & \end{pmatrix} \quad \gamma_P^2 = -\mathbb{1}_{4 \times 4} = - \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$$

donc  $A^2 = B^2 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ .

$A$  et  $B$  ont donc pour valeurs propres 1 et  $-1$  (car  $(A-1)(A+1) = 0$ ).

Comme  $A$  et  $B$  agissent sur des espaces qui sont en somme directs, on peut les diagonaliser simultanément : or  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour valeurs propres 1 et  $-1$ .

Don on peut encore écrire  $P\gamma_P P_i^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$  **c.q.f.d.**

# Chapitre 10

## Le groupe de Poincaré



# Chapitre 11

## L'équation de Klein-Gordon



# Chapitre 12

## L'équation de Dirac

- [1] L. Landau et E. Lifchitz, *Physique Théorique, tome 1, Mécanique*, édition Mir, quatrième édition, 1982.
- [2] Jean-Pierre Bourguignon, *Calcul variationnel*, cours de l'Ecole Polytechnique.
- [3] L. Landau et E. Lifchitz, *Physique Théorique, tome 2, Théorie des champs*, édition Mir, quatrième édition, 1989.
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, tome 1.
- [5] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory of Group Representation and Applications*