

MASTER 1 DE PHYSIQUE  
ET  
MAGISTÈRE DE PHYSIQUE FONDAMENTALE



# Electrodynamique classique et quantique

Samuel Wallon

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

version : 14 janvier 2024

# Table des matières

<b>1. Le groupe de Lorentz</b>	<b>1</b>
1.1. Intervalle d'espace-temps	1
1.2. Groupe de Poincaré et groupe de Lorentz	4
1.2.1. Caractérisation de $\mathcal{P}$	4
1.2.2. Structure du groupe de Lorentz	7
1.2.3. Les deux types de transformations de Lorentz	10
1.2.4. Nombre de paramètres	12
1.3. Covariance	13
1.3.1. Vecteur contravariant et vecteur covariant*	13
1.3.2. Covariance et contravariance appliquées à l'espace de Minkowski	16
1.3.3. Transformation des composantes covariantes sous $\mathcal{L}$	19
1.3.4. Tenseurs	20
1.3.5. Quelques exemples	21
1.4. Algèbre de Lie du groupe de Lorentz*	24
1.4.1. Groupe et algèbre de Lie	24
1.4.2. Algèbre de Lie du groupe de Lorentz restreint $L_+^\uparrow$	25
1.4.3. Représentations du groupe de Lorentz	35
<b>2. Théorie classique des champs</b>	<b>39</b>
2.1. Introduction	39
2.2. Formulation lagrangienne	39
2.3. Equations d'Euler-Lagrange	40
2.4. Les symétries globales	41
2.4.1. Variation de l'action par rapport aux conditions aux limites	41
2.4.2. Théorème de Noether	43
2.4.3. Applications	44
<b>3. Electrodynamique</b>	<b>49</b>
3.1. Equations de Maxwell	49
3.1.1. Forme locale	49
3.1.2. Forme intégrale	49

3.2.	Formulation covariante de l'électrodynamique . . . . .	50
3.2.1.	Le tenseur du champ électromagnétique et son dual . . .	51
3.2.2.	Transformations de Lorentz . . . . .	53
3.2.3.	Invariants relativistes . . . . .	55
3.3.	Forme covariante des équations de Maxwell . . . . .	56
3.3.1.	Equations de Maxwell . . . . .	56
3.3.2.	Quadripotentiel . . . . .	58
3.4.	Lagrangien pour les photons . . . . .	62
<b>4.</b>	<b>L'équation de Klein-Gordon</b>	<b>65</b>
4.1.	Rappel : mécanique quantique non relativiste . . . . .	65
4.1.1.	Principe de correspondance et équation de Schrödinger . .	65
4.1.2.	Courant de probabilité . . . . .	65
4.2.	L'équation de Klein-Gordon . . . . .	67
4.2.1.	A la recherche d'une équation relativiste linéaire . . . . .	67
4.2.2.	Equation différentielle du second ordre . . . . .	67
4.2.3.	Limite non relativiste . . . . .	68
4.3.	Equation de Klein-Gordon et action d'un champ scalaire . . . .	69
4.4.	Contenu physique . . . . .	69
4.4.1.	Densité et courant de probabilité . . . . .	69
4.4.2.	Limite non relativiste . . . . .	71
4.4.3.	Spectre d'énergie et densité de probabilité . . . . .	71
4.4.4.	Courant de charge et réinterprétation des solutions d'éner- gie négative . . . . .	72
4.4.5.	Le courant de charge revisité . . . . .	73
<b>5.</b>	<b>Couplage entre la matière et le champ électromagnétique</b>	<b>75</b>
5.1.	Partie matière . . . . .	75
5.2.	Partie purement photonique . . . . .	76
5.3.	Interaction entre matière et photons . . . . .	77
5.3.1.	Lagrangien minimal à partir d'un courant dynamique . .	77
5.3.2.	Conservation du courant $J^\mu$ . . . . .	80
5.3.3.	Lagrangien minimal à partir de l'invariance de jauge . .	81
<b>6.</b>	<b>Théorie classique du rayonnement</b>	<b>85</b>
6.1.	Tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique . . .	85
6.1.1.	Tenseur d'énergie-impulsion pour un système quelconque	85
6.1.2.	Application au cas du champ électromagnétique . . . . .	87
6.2.	Fonction de Green . . . . .	90
6.2.1.	Intérêt . . . . .	90
6.2.2.	Fonctions de Green retardée et avancée . . . . .	90

6.2.3.	Potentiels retardés . . . . .	95
6.3.	Charge ponctuelle en mouvement . . . . .	96
6.3.1.	Potentiel de Liénard-Wiechert . . . . .	96
6.3.2.	Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ . . . . .	99
6.3.3.	Densité d'énergie rayonnée; formule de Larmor . . . . .	104
6.4.	Distribution de charges quelconque . . . . .	106
6.4.1.	Décomposition spectrale . . . . .	106
6.4.2.	Décomposition spectrale de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ . . . . .	107
6.4.3.	Zone de rayonnement (ou zone radiative) . . . . .	108
6.4.4.	Composante $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ . . . . .	110
6.4.5.	Energie rayonnée . . . . .	111
6.4.6.	Cas d'une source périodique . . . . .	112
6.4.7.	Approximation dipolaire électrique : $a \ll \lambda$ . . . . .	113
<b>7.</b>	<b>Théorie quantique du rayonnement</b>	<b>117</b>
7.1.	Quantification d'un oscillateur harmonique . . . . .	117
7.1.1.	Quantification canonique . . . . .	117
7.1.2.	Rappels sur l'oscillateur harmonique . . . . .	121
7.1.3.	Ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants . . . . .	122
7.1.4.	Transformation unitaire d'opérateurs création-annihilation . . . . .	123
7.2.	Vers la quantification du champ électromagnétique . . . . .	124
7.2.1.	Lagrangien . . . . .	124
7.2.2.	Problèmes rencontrés dans la quantification du champ électromagnétique . . . . .	125
7.2.3.	Elimination de $V$ et utilisation de la jauge de Coulomb . . . . .	129
7.2.4.	Conditions aux limites périodiques . . . . .	130
7.2.5.	Le champ électromagnétique libre comme une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants . . . . .	131
7.3.	Quantification du champ électromagnétique . . . . .	135
7.3.1.	Quantification canonique . . . . .	135
7.3.2.	Modes normaux . . . . .	136
7.3.3.	Opérateurs du point de vue de Heisenberg . . . . .	139
7.3.4.	Résumé . . . . .	139

<b>Appendices</b>	<b>142</b>
<b>A. Quelques éléments de théorie des groupes</b>	<b>145</b>
A.1. Groupe . . . . .	145
A.1.1. Définitions . . . . .	145
A.1.2. Exemples de groupes . . . . .	146
A.2. Morphismes de groupe, sous-groupe . . . . .	148
A.2.1. Application, injections, surjections . . . . .	148
A.2.2. Morphisme . . . . .	149
A.2.3. Sous-groupe . . . . .	150
<b>B. Quelques éléments sur la théorie des représentations des groupes</b>	<b>153</b>
B.1. Représentation d'un groupe . . . . .	153
B.1.1. Représentations réductibles et irréductibles . . . . .	154
B.1.2. Lemme de Schur . . . . .	158
B.2. Produit tensoriel de représentations . . . . .	161
B.2.1. Produit tensoriel de représentations . . . . .	161
B.2.2. Décomposition et coefficients de Clebsch-Gordan . . . . .	162
B.3. Représentation régulière . . . . .	165
<b>C. Groupes et algèbres de Lie</b>	<b>167</b>
C.1. Généralités . . . . .	168
C.1.1. Groupe continu, groupe de Lie, algèbre de Lie . . . . .	168
C.1.2. Générateurs . . . . .	169
C.1.3. Application exponentielle . . . . .	169
C.1.4. Algèbre de Lie . . . . .	170
C.1.5. Quelques définitions utiles . . . . .	171
C.2. Quelques résultats sur les groupes et algèbres de Lie . . . . .	174
C.2.1. Lien entre groupe de Lie et algèbre de Lie correspondante	174
C.2.2. Structure des algèbres de Lie et groupes de Lie; caracté-	
risation de Cartan . . . . .	176
C.2.3. Algèbre de Lie compacte . . . . .	181
C.2.4. Classification . . . . .	186
C.3. Représentation des algèbres et groupes de Lie . . . . .	190
C.3.1. Concepts de base . . . . .	190
C.3.2. Exemples importants de représentations . . . . .	191
C.3.3. Quelques éléments concernant les représentations du groupe	
de Lorentz . . . . .	194

<b>D. Symboles et tenseurs de Levi-Civita</b>	<b>199</b>
D.1. Symbole de Levi-Civita dans l'espace euclidien . . . . .	199
D.1.1. 2d . . . . .	199
D.1.2. 3d . . . . .	199
D.1.3. Cas général . . . . .	200
D.1.4. Transformation sous $O(n)$ et $SO(n)$ . . . . .	201
D.2. Tenseur de Levi-Civita dans l'espace de Minkowski 4d . . . . .	202
D.2.1. Identités de contraction . . . . .	202
D.2.2. Relation avec le symbole de Levi-Civita . . . . .	203
D.2.3. Comportement sous les transformations de Lorentz . . . . .	203
<b>E. Analyse dimensionnelle en physique des hautes énergies</b>	<b>205</b>
E.1. Système d'unités naturelles en physique des hautes énergies . . . . .	205
E.2. Analyse dimensionnelle en théorie des champs . . . . .	206





# 1. Le groupe de Lorentz

Les équations de Maxwell qui rendent compte des phénomènes électriques et magnétiques ne sont pas invariantes sous le groupe de Galilée. Donc, contrairement à ce que stipule le principe de relativité galiléenne, il devrait être possible de mettre en évidence un référentiel absolu (éther). Les expériences de Michelson et Morley (1881) ont infirmé cette hypothèse : la vitesse de la lumière est absolument indépendante de la direction de propagation. Le temps ne peut plus être considéré comme absolu : la simultanéité de deux phénomènes dans un référentiel n'implique pas cette simultanéité dans un autre référentiel, contrairement à la mécanique classique.

## 1.1. Intervalle d'espace-temps

Nous allons brièvement rappeler ici la notion d'intervalle d'espace-temps en relativité restreinte. Considérons tout d'abord un événement décrit par un observateur lié à un référentiel inertiel par ses coordonnées d'espace-temps  $(t_1, \vec{x}_1)$ .

*Exemple* : émission d'un photon dans la désintégration

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

Le signal se propage à la vitesse de la lumière (photon). Il est détecté en  $(t_2, \vec{x}_2)$ .

Par définition l'intervalle entre ces deux événements est

$$\boxed{(\Delta s)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2} . \quad (1.1)$$

Bien sûr dans le cas présent,  $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = c(t_2 - t_1)\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire pointant dans la direction de la trajectoire du photon, et donc  $(\Delta s)^2 = 0$ .

Une hypothèse clef, faite par Einstein, et validée expérimentalement, est le fait que  $c$  ne dépende pas du référentiel inertiel, de sorte que  $(\Delta s)^2 = 0$  dans **tous** les référentiels inertiels par rapport auxquels on peut décrire cette expérience.

Partant de la définition (1.1), l'intervalle infinitésimal s'écrit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \quad (1.2)$$

## 1. Le groupe de Lorentz

Si  $ds^2 = 0$  dans un référentiel d'inertie  $K$ , alors  $ds'^2 = 0$  dans tout autre référentiel d'inertie  $K'$ .

Donc  $ds^2 = a ds'^2$

En utilisant l'homogénéité du temps et de l'espace et l'isotropie de l'espace, on montre que  $a = \text{constante} = 1$ .

### Exercice 1.1

Le montrer (cf. Landau, Lifshitz, *Theorie Classique des Champs*, p. 12).

L'ensemble des points d'espace-temps muni de l'intervalle (1.2) est appelé espace de Minkowski<sup>1</sup>. Ceci permet de définir une géométrie pseudo-euclidienne, par opposition à la géométrie euclidienne usuelle.

Un point de l'espace de Minkowski  $M$  est repéré par ses coordonnées dites **contravariantes**  $x^\mu = (ct, \vec{x})$ . Ceci est un exemple de quadrivector, sur lequel nous reviendrons de façon détaillée plus loin.

Métrie : elle est donnée par la matrice

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

et donc

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} (x_2^\mu - x_1^\mu) (x_2^\nu - x_1^\nu),$$

qui est bien identique, avec cette définition de la métrie, à la notion de carré de l'intervalle d'espace-temps introduite plus haut.

On définit alors 3 types d'intervalles selon le signe de  $(\Delta s)^2$  :

- ◇  $(\Delta s)^2 > 0$  intervalle de genre temps
- ◇  $(\Delta s)^2 < 0$  intervalle de genre espace
- ◇  $(\Delta s)^2 = 0$  intervalle de genre lumière

comme illustré par la Fig. 1.1.

---

1. Hermann Minkowski introduisit ce concept d'espace physique en 1907. Henri Poincaré formula la même idée en 1905 d'un point de vue mathématique, en lien avec l'invariance des équations de Maxwell sous le changement de référentiel inertiel.

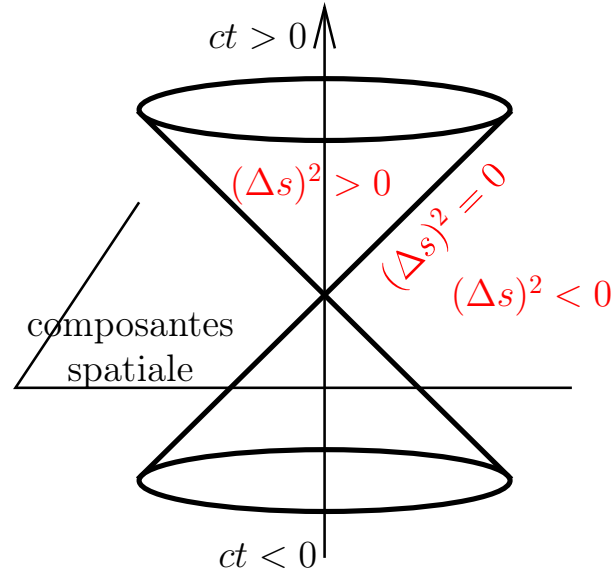


FIGURE 1.1. – Les 3 types d'intervalles.

Le carré de l'intervalle d'espace-temps infinitésimal s'écrit donc

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .} \quad (1.4)$$

### Exercice 1.2

Montrer, en reprenant l'exemple de l'émission d'une particule dans la désintégration  $\beta^- : n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  que l'intervalle séparant l'émission et la détection d'une particule est du genre temps ou lumière.

Une trajectoire est donné par une courbe  $x^\mu(s)$  où  $s$  définit une paramétrisation arbitraire de cette trajectoire. Le temps propre infinitésimal  $d\tau$  est défini via la relation

$$(cd\tau)^2 = ds^2 = (cdt)^2 - (d\vec{x})^2 . \quad (1.5)$$

En définissant la vitesse par

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (1.6)$$

nous obtenons

$$cd\tau = \sqrt{(cdt)^2 - (\vec{v})^2 dt^2} = cdt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} , \quad (1.7)$$

## 1. Le groupe de Lorentz

i.e.

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \quad (1.8)$$

ou de façon équivalente

$$\boxed{dt = \gamma d\tau \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}.} \quad (1.9)$$

De l'invariance de  $ds^2$  sous les changements de référentiel inertiel, nous déduisons grâce à la définition (1.5) que le temps propre  $d\tau$  ne dépend pas du choix de référentiel inertiel : c'est un scalaire de Poincaré. Nous caractériserons les transformations de Poincaré dans la section suivante.

La relation (1.9) révèle un point clef. En effet, supposons qu'une particule soit au repos dans un certain référentiel inertiel donné, appelé référentiel propre. Ceci est toujours possible si sa vitesse diffère de  $c$ , en utilisant une transformation pure de Lorentz le long de  $\vec{v}$ , voir la section suivante. En passant à un autre référentiel inertiel, de vitesse non nulle par rapport au référentiel propre, nous obtenons  $\gamma > 1$ , ce qui conduit au célèbre phénomène de *dilatation des durées* :  $dt > d\tau$ . Ceci signifie que le temps s'écoule plus lentement dans tout référentiel inertiel de vitesse non nulle par rapport au référentiel propre.

Dans la suite de ce texte, sauf mention contraire, nous utiliserons un système d'unité dans lequel  $c = 1$ , et donc  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ .

## 1.2. Groupe de Poincaré et groupe de Lorentz

Ayant postulé que la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel, nous en avons déduit que l'intervalle  $ds^2$  est identique dans tous les référentiels inertiels. Il nous faut à présent caractériser ces référentiels d'inertie, en déterminant les transformations relativistes reliant ces référentiels entre eux. Ces transformations possèdent une structure de groupe de symétrie d'espace-temps relativiste que nous allons étudier sommairement.

### 1.2.1. Caractérisation de $\mathcal{P}$

Soient  $x$  les coordonnées d'un point de  $M$ , mesurées dans le référentiel  $K$ , et  $x'$  les coordonnées du même point mesurées dans le référentiel  $K'$ .

La condition d'invariance de l'intervalle infinitésimal

$$ds'^2 = ds^2 \quad (1.10)$$

implique que

$$\boxed{
 \begin{array}{c}
 \text{translations (4 paramètres réels)} \\
 \swarrow \\
 x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha} : \text{groupe de Poincaré } \mathcal{P} \text{ (10 paramètres réels)} \\
 \swarrow \\
 \text{groupe de Lorentz } \mathcal{L} \text{ (6 paramètres réels)}
 \end{array}
 } \quad (1.11)$$

*Preuve :*

La condition (1.10) s'écrit

$$g_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} ,$$

i.e.

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

donc

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\nu} . \quad (1.12)$$

En prenant le déterminant membre à membre, on en tire donc

$$\det g \left( \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 = \det g .$$

La matrice  $g$  étant régulière, on en déduit que  $\det \frac{\partial x'}{\partial x} \neq 0$  : la transformation de Poincaré est donc inversible.

En faisant agir  $\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}$  sur l'Eq. (1.12), on obtient

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} = 0$$

qui s'écrit symboliquement

$$A_{(\mu\rho)\nu} + A_{(\nu\rho)\mu} = 0 , \quad (1.13)$$

où  $A$  est symétrique sur les indices entre parenthèses.

$$\mu \leftrightarrow \rho \quad \text{donne} \quad A_{(\mu\rho)\nu} + A_{(\mu\nu)\rho} = 0 \quad (1.14)$$

$$\nu \leftrightarrow \rho \quad \text{donne} \quad A_{(\mu\nu)\rho} + A_{(\nu\rho)\mu} = 0 . \quad (1.15)$$

## 1. Le groupe de Lorentz

La combinaison (1.13) + (1.14) - (1.15) donne donc  $2A_{(\mu\rho)\nu} = 0$ , i.e.

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = 0$$

d'où (puisque  $\det \frac{\partial x'}{\partial x} \neq 0$ ) :  $\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} = 0$

ce qui prouve que les  $x'$  sont des fonctions linéaires des  $x$ .

On utilise les notations matricielles suivantes

$$\Lambda^\alpha_\beta$$

↙ indice de ligne  
↘ indice de colonne

On déduit des Eqs. (1.12) et (1.11) que  $\Lambda$  est une matrice réelle vérifiant

$$\boxed{g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu}} \quad (1.16)$$

L'ensemble  $\mathcal{L}$  des transformations de Lorentz forme un groupe (voir Ap. A pour une très courte introduction à la théorie des groupes).

*Preuves :*

- C'est immédiat d'après sa définition : le produit de 2 transformations homogènes qui préservent  $ds^2$  est une transformation homogène qui préserve  $ds^2$  ; d'autre part, l'inverse d'une transformation homogène préservant  $ds^2$  est une transformation homogène préservant  $ds^2$ . Et bien sûr, l'identité préserve  $ds^2$ .

- Algébriquement, si  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont deux éléments de  $\mathcal{L}$ , alors

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu} \\ g_{\alpha\beta} \Lambda'^\alpha_\mu \Lambda'^\beta_\nu = g_{\mu\nu} . \end{cases}$$

On en déduit que

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda'^\mu_{\mu'} \Lambda'^\beta_{\nu'} \Lambda'^{\nu'}_{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda'^\mu_{\mu'} \Lambda'^{\nu'}_{\nu} = g_{\mu'\nu'} ,$$

ce qui montre que  $\Lambda \Lambda' \in \mathcal{L}$ .

L'ensemble  $\mathcal{P}$  des transformations de Poincaré, caractérisées par la paire  $(a, \Lambda)$  où  $a$  est un 4-vecteur et  $\Lambda \in \mathcal{L}$ , forme un groupe, également appelé

groupe de Lorentz inhomogène.

*Preuve :*

- ◇ La première des deux preuves ci-dessus s'étend immédiatement au cas des transformations de Poincaré, puisque par définition ce sont les transformations les plus générales qui préservent le carré de l'intervalle d'espace-temps.
- ◇ La seconde preuve repose sur la loi de groupe sur  $\mathcal{P}$  :  
deux transformations de Poincaré  $(a, \Lambda)$  et  $(a', \Lambda')$  étant données, c'est un exercice facile de vérifier que leur produit s'écrit

$$(a', \Lambda') \cdot (a, \Lambda) = (\Lambda'a + a', \Lambda'\Lambda) \quad (1.17)$$

qui est bien de la forme requise  $(a'', \Lambda'')$ .

On notera utilement que la relation de définition (1.16) de  $\mathcal{L}$  s'écrit encore, sous forme matricielle :

$$\boxed{\Lambda^t g \Lambda = g.} \quad (1.18)$$

Ceci peut s'obtenir directement de la façon suivante :  $\Lambda$  étant une transformation linéaire, qui laisse le produit scalaire invariant, on a, pour deux quadrivecteurs arbitraire  $v$  et  $v'$  de  $M$ , notés comme des vecteurs colonnes,

$$v' \cdot v = (v')^t g v = (\Lambda v')^t g (\Lambda v) = (v')^t \Lambda^t g \Lambda v \quad (1.19)$$

qui est équivalent à l'Eq. (1.18).

### 1.2.2. Structure du groupe de Lorentz

Partant de l'Eq. (1.16) on déduit aisément que  $\det \Lambda = \pm 1$  :

$$\left| \begin{array}{ll} \det \Lambda = +1 : & \text{transformations propres} \quad \mathcal{L}_+ \\ \det \Lambda = -1 : & \text{transformations impropre} \quad \mathcal{L}_- . \end{array} \right.$$

A nouveau, grâce à l'Eq. (1.16) avec  $\mu = \nu = 0$ , on tire  $(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1$  :

$$\left| \begin{array}{ll} \Lambda^0_0 \geq 1 : & \text{sans renversement du temps (orthochrone)} \quad \mathcal{L}^\uparrow \\ \Lambda^0_0 \leq -1 : & \text{avec renversement du temps (anti-orthochrone)} \quad \mathcal{L}^\downarrow . \end{array} \right.$$

## 1. Le groupe de Lorentz

On peut montrer (voir Gelfand p. 165) que

Le groupe de Lorentz  $O(3, 1)$  possède 4 composantes connexes. Chacune d'entre elle est doublement connectée, mais pas simplement connectée.

Composante connexe : dans une composante connexe, on peut passer d'un élément à un autre de façon continue, sans sortir de cette composante.

Espace simplement et multiplement connecté :

Un espace est simplement connecté si toute boucle dans cet espace peut être contractée en un point. De façon équivalente, si l'on considère deux chemins arbitraires dans cet espace, on peut toujours passer continûment d'un chemin à l'autre. Si ce n'est pas le cas, on dit alors que l'espace est multiplement connecté. Dans le cas présent, doublement connecté signifie que dans chacune des composantes connexes, il existe deux classes de chemins ; dans une classe donnée, on peut passer d'un chemin à l'autre par transformation continue des paramètres.

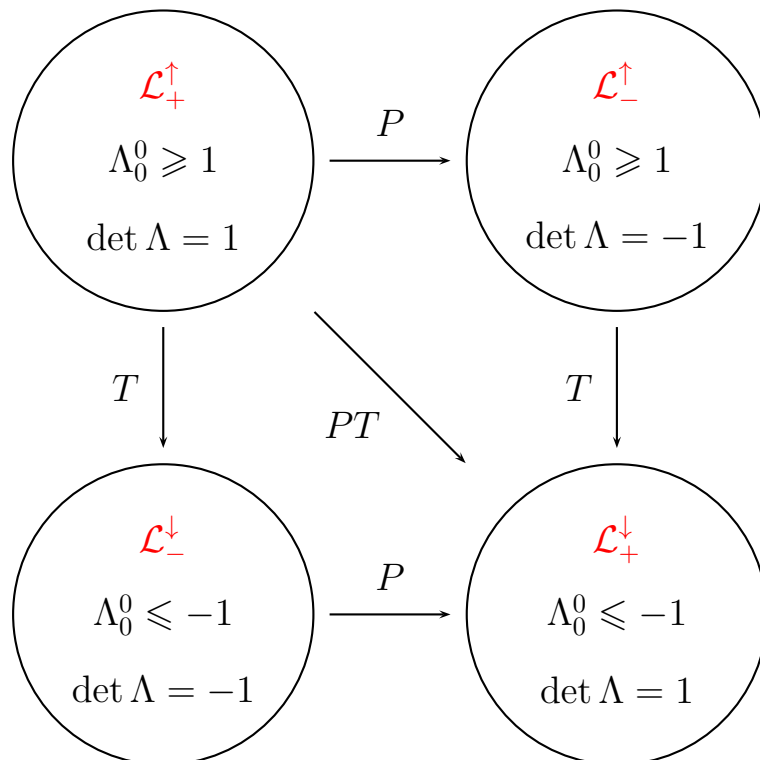


FIGURE 1.2. – Les 4 composantes connexes de  $\mathcal{L}$ .



Ces différentes composantes connexes sont reliées par des transformations discrètes :

- inversion spatiale (ou parité) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- renversement du temps :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci est illustré par la Fig. 1.2.

$\mathcal{L}$  laisse 3 régions invariantes :  $x^2 > 0$ ,  $x^2 = 0$  (cône de lumière) et  $x^2 < 0$ .

$\mathcal{L}_+^\uparrow$  laisse 4 régions invariantes :  $\left| \begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x_0 > 0 \end{array} \right|$ ,  $\left| \begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x_0 < 0 \end{array} \right|$ ,  $x^2 = 0$ ,  $x^2 < 0$ , voir

Fig 1.1.

$\mathcal{L}_+^\uparrow$  est le groupe de Lorentz **restreint**.

$\mathcal{L}_+^\uparrow$  et  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  forment ensemble le groupe de Lorentz **complet**.

$\mathcal{L}_+^\uparrow$  et  $L_+^\downarrow$  forment ensemble le groupe de Lorentz **propre**.

### Exercice 1.3

Vérifier que le groupe de Lorentz restreint, le groupe de de Lorentz complet et le groupe de Lorentz propre sont des sous-groupes du groupe de Lorentz  $\mathcal{L}$ .

### Compacité :

Le groupe de Lorentz restreint  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  est non compact.

Ceci est dû à l'existence des boosts, également appelés transformations de Lorentz spéciales, que nous étudierons plus loin, paramétrées par une *rapidité* qui varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , donc sur un domaine non compact de  $\mathbb{R}$ .

Ceci a des conséquences importantes sur le type de représentation du groupe de Lorentz : ses représentations unitaires sont de dimensions infinie. Ces concepts allant au-delà des objectifs de ce cours, nous n'en dirons pas plus.

### 1.2.3. Les deux types de transformations de Lorentz

Nous allons ici étudier les transformations du groupe de Lorentz restreint.

#### Rotations

Le premier ensemble de transformations de Lorentz est bien connu : ce sont les rotations usuelles, éléments de  $SO(3)$ , défini comme l'ensemble des transformations de l'espace 3-dimensionnel qui préservent le produit scalaire. Elles sont caractérisées par l'angle  $\psi$  de la rotation, et par l'axe de la rotation, lui-même défini par un vecteur unitaire  $\vec{n}$  dépendant de deux angles sphériques  $\theta, \phi$ . Ainsi, une rotation est définie par trois nombres réels variant sur le domaine compact

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \quad (1.20)$$

en utilisant le fait qu'une rotation autour d'un axe orienté  $\vec{n}$  d'un angle  $\psi$  est identique à une rotation d'axe  $-\vec{n}$  et d'angle  $2\pi - \psi$ , ce qui permet de se restreindre au domaine  $0 \leq \psi \leq \pi$ .

#### Exercice 1.4

Montrer qu'une rotation d'axe  $x^1$  et d'angle  $\Psi$  suivant le point de vue passif (i.e. ce sont les axes qui tournent) s'écrit

$$\begin{cases} x^{2'} = \cos \psi x^2 + \sin \psi x^3 \\ x^{3'} = -\sin \psi x^2 + \cos \psi x^3. \end{cases} \quad (1.21)$$

#### Exercice 1.5

Montrer qu'une rotation passive d'axe  $\vec{n}$  ( $\vec{n}^2 = 1$ ) et d'angle  $\psi$  s'écrit

$$\vec{x}' = (\vec{x} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x})) \cos \psi - \vec{n} \wedge \vec{x} \sin \psi + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}). \quad (1.22)$$

Indication : considérer comment chacune des parties de la décomposition d'un vecteur arbitraire  $\vec{x}$  comme la somme d'une composante  $\vec{x}_{\parallel}$  parallèle à l'axe de rotation et d'une composante  $\vec{x}_{\perp}$  perpendiculaire à cet axe

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} = [(\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}] + [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}]$$

se transforme sous une rotation.

## Boosts

Par ailleurs, les transformations de Lorentz pures, appelées également boosts, affectent une seule direction spatiale et le temps.

### Exercice 1.6

Montrer que les transformations de Lorentz pures qui laissent invariantes les coordonnées  $x^2, x^3$  peuvent s'écrire sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x^{0'} = \cosh \phi x^0 - \sinh \phi x^1 \\ x^{1'} = -\sinh \phi x^0 + \cosh \phi x^1 \end{cases}} \quad (1.23)$$

avec  $\phi \in ]-\infty, \infty[$ , appelée *rapidité* de la transformation.

Indication : considérer une transformation linéaire générique  $2 \times 2$  qui mélange les coordonnées  $x^0$  et  $x^1$ , laisse l'intervalle d'espace-temps invariant et préserve le signe de  $x^0$ , et déterminer les 4 coefficients de la matrice de cette transformation.

Dans le point de vue passif,  $\Lambda$  code la transformation d'un référentiel  $F$  à un référentiel  $F'$ , tandis que dans le point de vue actif, elle code la façon dont les coordonnées d'un point sont changées dans un référentiel fixe. En suivant le point de vue passif, le mouvement de l'origine  $O'$  du nouveau référentiel  $F'$  par rapport à l'origine  $O$  du référentiel initial  $F$  s'obtient en faisant  $x^{1'} = 0$ , i.e.  $x^1 = \tanh \phi x^0$ , ce qui correspond à une vitesse

$$\boxed{\vec{v} = c \tanh \phi \vec{e}_1} \quad (1.24)$$

du référentiel  $F'$  par rapport au référentiel  $F$ , le long de l'axe  $x$ .

Notons qu'en introduisant les notations usuelles  $\beta (-1 \leq \beta \leq 1)$  via

$$\vec{v} = c\beta \vec{e}_1, \quad (1.25)$$

et  $\gamma (0 \leq \gamma)$  via

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.26)$$

on obtient

$$\beta = \tanh \phi, \quad (1.27)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \cosh \phi, \quad (1.28)$$

$$\gamma\beta = \sinh \phi, \quad (1.29)$$

## 1. Le groupe de Lorentz

de sorte que le boost (1.23) peut s'écrire de façon équivalente,  $\beta$  étant algébrique,

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\ x^{1'} = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \end{cases} \quad (1.30)$$

### Exercice 1.7

Montrer qu'un boost dans la direction  $\vec{n}$  ( $\vec{n}^2 = 1$ ), de rapidité  $\phi$ , i.e. avec une vitesse  $\vec{v} = c \operatorname{th}\phi \vec{n}$  du référentiel  $F'$  par rapport au référentiel  $F$ , s'écrit

$$\begin{cases} x^{0'} = x^0 \cosh \phi - (\vec{n} \cdot \vec{x}) \sinh \phi \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{n} (\vec{x} \cdot \vec{n}) + (-x^0 \sinh \phi + (\vec{n} \cdot \vec{x}) \cosh \phi) \vec{n}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Indication : considérer comment chacune des composantes de la décomposition  $\vec{x} = [(\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}] + [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}]$  se transforme sous un boost.

De façon générale, un boost est donc caractérisé par 3 nombres réels  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ .

*Remarque :*

une transformation passive (changement de référentiel) du référentiel  $K$  vers le référentiel  $K'$  (animé d'une vitesse  $v$  par rapport à  $K$ ) est une transformation active (référentiel fixe, les points sont transformés) de vitesse  $-v$ .

### 1.2.4. Nombre de paramètres

On peut démontrer que tout élément  $\Lambda$  du groupe de Lorentz restreint peut s'écrire sous la forme

$$\Lambda = R B \quad (1.32)$$

où  $R$  est une rotation et  $B$  est un boost<sup>2</sup>. Ceci se comprend géométriquement. En effet, passer d'un quadrivecteur à un autre quadrivecteur peut se faire en deux étapes : d'abord un boost permet d'amener la norme de la composante spatiale du premier 4-vecteur à la norme du second, et en même temps d'amener la partie temporelle du premier 4-vecteur à celle du second 4-vecteur ; ensuite, une rotation permet d'amener la direction spatiale du 4-vecteur obtenu suite à la première étape dans la direction du 4-vecteur final, ce qui ne change pas sa partie temporelle par définition d'une rotation.

---

2. On peut bien sûr également montrer que l'on peut aussi écrire  $\Lambda = B' R'$  où  $R'$  est une rotation et  $B'$  est un boost

On en déduit alors, puisqu'une rotation dépend de 3 paramètres réels, et qu'un boost dépend de 3 paramètres réels, que

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ dépend de 6 paramètres réels.}} \quad (1.33)$$

et par suite que

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ dépend de 10 paramètres réels :}} \quad (1.34)$$

il dépend de 6 paramètres réels 6 paramètres réels décrivant  $\mathcal{L}$  auxquels il faut ajouter les 4 translations d'espace-temps.

## 1.3. Covariance

### 1.3.1. Vecteur contravariant et vecteur covariant\*

De façon formelle, un vecteur est un élément d'un espace  $E$  (sur le corps  $\mathbb{K}=\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), que l'on peut décomposer sur une base. Ceci mène naturellement à un ensemble de coordonnées dites composantes contravariantes de ce vecteur. Par ailleurs, un covecteur est un élément de l'espace dual  $E^*$  des formes linéaires<sup>3</sup>  $E \rightarrow \mathbb{K}$ . Dans le cas spécifique des espaces de Hilbert, il existe une correspondance bijective entre  $E$  and  $E^*$ , qui est extrêmement utile en pratique, y compris pour le physicien ! Examinons les différentes étapes de cette construction en détail.

#### Contravariance

Considérons un espace vectoriel  $E$  (sur le corps  $\mathbb{K}=\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), de dimension  $n$ . Un changement de base de  $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  à  $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$  (il est pratique de noter la base sous forme d'un vecteur ligne, pour une raison qui va apparaître bientôt), est donné par

$$B' = BA \quad (1.35)$$

où  $A$  est une matrice  $n \times n$  inversible, dont les coefficients seront notés  $A^i_j$ . Explicitement, ce changement de base s'écrit<sup>4</sup>

$$\vec{e}'_j = \vec{e}_i A^i_j. \quad (1.36)$$

Un vecteur  $\vec{v}$  peut être développé sur la base  $B$ , en utilisant des notations explicite mettant en avant le fait que la base  $B$  est utilisée, sous la forme

$$\boxed{\vec{v} = v^i[B] \vec{e}_i = B v[B],} \quad (1.37)$$

3. Rappelons qu'une forme linéaire est une application linéaire de l'espace vectoriel  $E$  sur son corps de scalaires  $\mathbb{K}$ .

4. Sauf mention contraire, nous allons dans la suite utiliser la convention d'Einstein, suivant laquelle les indices répétés sont sommés.

## 1. Le groupe de Lorentz

où le vecteur *colonne* de composantes  $v^i[B]$  est noté  $v[B]$ ,

$$v[B] = \begin{pmatrix} v^1[B] \\ v^2[B] \\ \vdots \\ v^n[B] \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

ce qui permet ainsi d'utiliser un produit matriciel dans la seconde égalité de l'Eq. (1.37).

Dans la nouvelle base  $B'$ , le vecteur  $\vec{v}$  étant bien sûr invariant lors du changement de base, on obtient les deux développements équivalents

$$\vec{v} = B v[B] = B' v[B'] = BA v[BA] \quad (1.39)$$

et donc

$$v[BA] = A^{-1}v[B], \quad (1.40)$$

ou de façon équivalente

$$v[B] = A v[BA] = A v[B']. \quad (1.41)$$

Une telle loi de transformation est appelée **contravariante**, puisque sous cette transformation  $A$ ,

$$B \longrightarrow B' \quad (1.42)$$

$$v[B] \longleftarrow v[B']. \quad (1.43)$$

## Covariance

Considérons maintenant l'espace dual  $E^*$ , espace des formes linéaires de  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

Une base duale naturelle (d'où son nom de base canonique) peut être définie comme un ensemble de  $n$  formes linéaires  $e^i$ , via leur action sur une base donnée de  $E$  suivant les relations

$$e^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i. \quad (1.44)$$

Toute forme linéaire  $\ell \in E^*$  peut alors être développée dans cette base, en écrivant

$$\ell = \ell_i[B]e^i = \ell[\vec{e}_i]e^i. \quad (1.45)$$

En effet, tout coefficient  $\ell_i[B]$  de ce développement peut s'obtenir facilement par action de  $\ell$  sur le vecteur de base  $\vec{e}_i$  :

$$\ell(\vec{e}_i) = \ell_j[B]e^j(\vec{e}_i) = \ell_j[B]\delta_j^i = \ell_i[B]. \quad (1.46)$$

Ce développement peut s'écrire sous une forme plus compacte, et très utile

$$\ell = \ell_i[B]e^i = \ell[\vec{e}_i]e^i = \ell[B]B^*, \quad (1.47)$$

dans laquelle le vecteur *ligne* de composantes  $\ell_i[B]$  est noté

$$\ell[B] = (\ell_1[B], \dots, \ell_n[B]) = (\ell(\vec{e}_1), \dots, \ell(\vec{e}_n)) \quad (1.48)$$

et le vecteur *colonne* de composantes  $e^i$  est noté  $B^*$

$$B^* = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

ce qui permet ainsi d'utiliser un produit matriciel dans la dernière égalité de l'Eq. (1.47).

L'action de  $\ell \in E^*$  sur un vecteur arbitraire  $\vec{v} \in E$  s'écrit donc

$$\ell(\vec{v}) = \ell(\vec{e}_i)e^i(\vec{v}) = \ell(\vec{e}_i)e^i(v^j\vec{e}_j) = \ell(\vec{e}_i)v^j e^i(\vec{e}_j) = \ell(\vec{e}_i)v^j \delta_j^i = \ell(\vec{e}_i)v^i, \quad (1.50)$$

où nous avons utilisé le développement de  $\vec{v}$  dans la base  $B$ , voir l'Eq. (1.37). A nouveau, en utilisant nos notations compactes (vecteurs lignes pour les formes, vecteurs colonnes pour les vecteurs), nous pouvons écrire cette action sous la forme

$$\boxed{\ell(\vec{v}) = \ell(\vec{e}_i)v^i = \ell[B]v[B].} \quad (1.51)$$

Examinons comment le changement de base (1.35) sur  $E$  se traduit dans l'espace dual  $E^*$ . Nous avons

$$\boxed{\ell_i[B'] = \ell_j[B]A^j_i.} \quad (1.52)$$

En effet, à partir des Eqs. (1.46) et (1.36)

$$\ell_i[B'] = \ell_i[BA] = \ell(\vec{e}'_i) = \ell(\vec{e}_j A^j_i) = \ell(\vec{e}_j)A^j_i = \ell_j[B]A^j_i. \quad (1.53)$$

Écrit sous une forme plus compacte, ceci signifie que

$$\ell[B'] = \ell[B]A \quad (1.54)$$

Une telle loi de transformation est appelée **covariante**, puisque sous une transformation  $A$  nous venons de voir que

$$B \longrightarrow B' \quad (1.55)$$

$$\ell[B] \longrightarrow \ell[B']. \quad (1.56)$$

Les formes linéaires sont pour cette raison appelés co-vecteurs.

## Correspondance entre vecteurs et co-vecteurs dans le cas d'un espace de Hilbert

Dans le cas d'un espace de Hilbert<sup>5</sup>, le théorème de représentation de Riesz assure qu'il existe une correspondance bijective entre formes linéaires et vecteurs :

En notant la métrique par  $g$ , et  $(\cdot, \cdot)_g$  le produit scalaire associé,

$$\forall \ell \in E^*, \exists! \vec{\ell}_g \in E / \forall \vec{v} \in E, \ell(\vec{v}) = (\vec{\ell}_g, \vec{v})_g. \quad (1.57)$$

En pratique, le produit scalaire est généralement dénoté sans référence explicite à la métrique sous-jacente, de sorte que l'indice  $g$  est simplement enlevé.

La discussion ci-dessus est familière en mécanique quantique, où la forme  $\phi$  de l'espace dual  $\mathcal{E}_H^*$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}_H$  est notée  $\langle \phi |$  (bra) et signifie, par le théorème de correspondance,  $\langle \phi | = (\phi, \cdot)_g$  ou plus explicitement, lorsqu'elle agit sur le vecteur  $|\psi\rangle$  (ket),  $\langle \phi | \psi \rangle = (\phi, \psi)_g$ .

En revenant à l'Eq. (1.51), et en enlevant toute référence à  $g$ , on peut donc maintenant écrire

$$\boxed{\ell(\vec{v}) = \ell_i v^i = (\vec{\ell}, \vec{e}_i) v^i.} \quad (1.58)$$

### 1.3.2. Covariance et contravariance appliquées à l'espace de Minkowski

Considérons une espace de dimension  $d$ , muni d'une base  $\underline{e}_\mu (\mu=1, \dots, d)$ , et d'une métrique  $g$ . Comme cas particulier, l'espace de Minkowski  $M$  peut être décrit à l'aide d'une base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$  notée usuellement  $\underline{e}_\mu (\mu=0, \dots, 3)$ , la métrique étant donnée par l'Eq. (1.3). À noter que nous évitons ici d'utiliser des flèches, que l'on réservera traditionnellement pour la partie spatiale d'un vecteur à 4 dimensions.

#### Composantes contravariantes

Un quadrivecteur arbitraire  $\underline{A}$  peut se décomposer sur une telle base, sous la forme

$$\underline{A} = A^\mu \underline{e}_\mu. \quad (1.59)$$

La collection des coefficients  $A^\mu$  forme les *composantes contravariantes* de  $\underline{A}$ .

---

5. En dimension finie, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est automatiquement un espace de Hilbert ; ce n'est pas automatiquement le cas pour les espaces de dimension infinie.



*Remarque :* Les  $\underline{e}_\mu$  ne sont pas des vecteurs puisqu'ils ne sont pas invariants lors d'un changement d'axes (rappelons que par définition un vecteur est un objet à  $d$  composantes qui est invariant lors d'un changement d'axes).

### Composantes covariantes

En utilisant la métrique  $g$  qui permet grâce à la relation (1.57) de définir un covecteur associé au vecteur  $\underline{A}$ , les *composantes covariantes*  $A_\mu$  de ce covecteur s'écrivent, d'après l'Eq. (1.58),

$$A_\mu = \underline{A} \cdot \underline{e}_\mu \quad (1.60)$$

Il est donc clair qu'en général,  $A^\mu \neq A_\mu$ . A titre d'exemple, considérons le plan euclidien, voir la Fig. 1.3, avec une base non orthogonale.

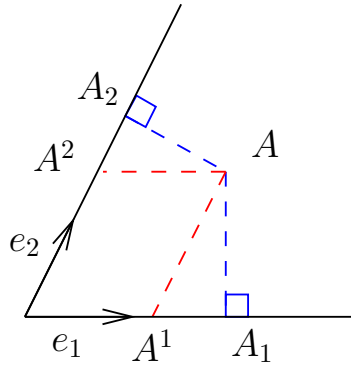


FIGURE 1.3. – Composantes contravariantes et covariantes.

### Relation entre composantes covariantes et contravariantes

Par définition, le tenseur métrique (ou métrique) est relié aux vecteurs de base par

$$\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = g_{\mu\nu}$$

avec  $g_{\mu\nu}$  donné par l'Eq. (1.3) dans le cas de l'espace de Minkowski. Nous avons donc

$$A_\mu = \underline{A} \cdot \underline{e}_\mu = A^\nu \underline{e}_\nu \cdot \underline{e}_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

On définit  $g^{\mu\nu}$  comme l'inverse de  $g_{\mu\nu}$  :  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ .

Dans le cas de l'espace de Minkowski, comme  $g_{\mu\nu}$  est son propre inverse,  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ .

## 1. Le groupe de Lorentz

Ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu \\ A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu . \end{aligned}} \quad (1.61)$$

Ceci implique que

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu . \quad (1.62)$$

### Retour sur l'intervalle d'espace-temps

L'expression du produit scalaire (1.62) a pour conséquence que

$$ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} = dx^\mu dx^\nu \underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} ,$$

en accord avec la définition vue plus haut, voir l'Eq. (1.4).

On peut également s'appuyer sur l'intervalle espace-temps écrit sous forme covariante, de sorte que nous avons les identités suivantes, de sorte que nous avons les relations suivantes

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu .} \quad (1.63)$$

### Inverse d'une transformation de Lorentz en notations covariantes

Considérons une transformation  $\Lambda$  de  $\mathcal{L}$ . Partant de la relation (1.16)

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu} ,$$

on obtient

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu = g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\beta$$

et donc

$$(\Lambda^{-1})^\nu_\beta = g_{\beta\alpha} \Lambda^\alpha_\mu g^{\mu\nu} .$$

Notons

$$\Lambda_\beta^\nu = g_{\beta\alpha} \Lambda^\alpha_\mu g^{\mu\nu} . \quad (1.64)$$

On a donc

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^\nu_\beta = \Lambda_\beta^\nu .} \quad (1.65)$$

On pourra remarquer que l'Eq. (1.64) est parfaitement cohérente avec la covariance d'un tenseur à deux indices, que nous allons discuter un peu plus loin, voir la section 1.3.4. En effet, l'Eq. (1.64) signifie que  $\Lambda^\alpha_\mu$  est un tenseur mixte d'ordre 2, qui se transforme comme  $A^\alpha B_\mu$ .

Nous avons donc  $\Lambda_{\beta}^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta} = ({}^t\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu}$  et l'on peut vérifier explicitement que  $\Lambda_{\beta}^{\nu}\Lambda^{\rho}_{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta}\Lambda^{\rho}_{\nu} = \Lambda^{\rho}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta} = \delta^{\rho}_{\beta}$ .

*Remarque :*

Avec ces notations, comme  $\mathbb{1} = \mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}^t$ , on peut écrire

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} = \delta_{\mu}^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}.$$

Il n'est donc pas utile de prendre garde à la position droite/gauche des indices d'un symbole de Kronecker.

Conclusion :

L'inverse d'une matrice  $\mathcal{L}$  s'obtient facilement en montant et en descendant les indices avec le tenseur métrique, puis en transposant.

### 1.3.3. Transformation des composantes covariantes sous $\mathcal{L}$

Sous une transformation  $\Lambda$  de  $\mathcal{L}$ , les composantes contravariantes d'un vecteur se transforment de la façon suivante :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.66)$$

d'après l'Eq. (1.11). Ceci implique que

$$\boxed{x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu}} \quad (1.67)$$

*Preuve :*

Cette expression est une simple répétition de la relation (1.52) avec ici  $A = \Lambda^{-1}$  :

$$x'_{\mu} = x_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu}. \quad (1.68)$$

Plus directement, on a en effet

$$\underline{x} = x^{\mu}\underline{e}_{\mu} = x'^{\nu}\underline{e}'_{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}x^{\mu}\underline{e}'_{\nu} \quad (1.69)$$

et donc

$$\underline{e}_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}\underline{e}'_{\nu} \quad \text{et} \quad \underline{e}'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu}\underline{e}_{\nu}$$

en accord avec la notation tensorielle introduite pour  $\Lambda^{-1}$ .

## 1. Le groupe de Lorentz

$$\text{Ainsi } x'_\mu = \underline{x} \cdot \underline{e}'_\mu = \underline{x} \cdot \Lambda_\mu^\nu \underline{e}_\nu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu.$$

*Remarque* : le fait que les composantes covariantes se transforment par  ${}^t\Lambda^{-1}$ , qui est la transposée inverse de la matrice de transformation des composantes contravariantes, est dû à l'invariance de  $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$  qui implique que  ${}^t\Lambda g \Lambda = g$ , voir l'Eq. (1.18). En effet, ceci s'écrit encore  ${}^t\Lambda^{-1} = g \Lambda g^{-1}$ . Partant de  $v' = \Lambda v$  pour  $v$  contravariant, on en déduit :

$$\underbrace{g v'}_{\text{vecteur covariant}} = \underbrace{g \Lambda g^{-1}}_{{}^t\Lambda^{-1}} \underbrace{g \xi}_{\text{vecteur covariant}}.$$

### 1.3.4. Tenseurs

Sur la base des outils présentés ci-dessus, nous pouvons à présent introduire la covariance relativiste dans un contexte plus général : les quantités physiques décrivant l'état d'un système ne sont généralement pas les mêmes pour différents observateurs. Nous pouvons donc distinguer :

- des quantités scalaires, qui ne dépendent pas d'un choix spécifique de référentiel. Elles sont définies par des fonctions scalaires : étant donné une fonction  $\phi$  définie sur  $M$ , dans un référentiel  $F$ , la fonction scalaire qui lui correspond dans le nouveau référentiel  $F'$  est telle que  $\phi'(x') = \phi(x)$ , avec  $x' = \Lambda x$ , afin de laisser invariante la quantité physique associée.

- les composantes contravariantes  $v^\mu$  d'un vecteur se transforment comme des coordonnées (dans le cas plus général de  $\mathcal{P}$ , les translations n'affectent que les coordonnées) :

$$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu \left( = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \right).$$

- les composantes covariantes  $v_\mu$  d'un vecteur se transforment comme  $x_\mu$  :

$$v'_\mu = \Lambda_\mu^\nu v_\nu.$$

- tenseur de rang  $\left( \underbrace{m}_{\text{co-}}, \underbrace{n}_{\text{contra-}} \right)$

$$F'_{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\alpha_m}^{\beta_m} \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\rho_n} F_{\beta_1 \dots \beta_m}{}^{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

- dérivation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \quad \text{avec} \quad \Lambda_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}.$$

En effet,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{et} \quad x^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x'^{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x'^{\mu} \quad \text{de sorte que} \quad \Lambda_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}.$$

Ainsi  $\frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$  se transforme comme vecteur covariant, noté  $\partial_{\nu} \phi$ .

D'après la définition des coordonnées contravariantes  $x^{\mu} = (x^0, \vec{x})$  on obtient

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right), \quad (1.70)$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla} \right). \quad (1.71)$$

Prendre garde aux signes :  $\vec{x}$  est contravariant mais  $\vec{\nabla}$  est covariant.

La quadri-divergence d'un quadri-vecteur est le scalaire

$$\partial^{\mu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A^{\mu} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Cela conduit naturellement à l'introduction de l'opérateur scalaire d'Alembertien :

$$\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta. \quad (1.72)$$

Résumé :

- On peut passer d'une forme à l'autre d'un tenseur donné en élevant ou en abaissant les indices à l'aide du tenseur métrique, comme on le fait pour les quadri-vecteurs.

- La transformation de Lorentz agit par multiplication à gauche de sa matrice représentative (soit sur ses composantes contravariantes, soit sur ses composantes covariantes), en faisant la somme sur des indices répétés (un vers le haut, un vers le bas). Pour les composantes contravariantes, la matrice représentative est la matrice  $\Lambda$  elle-même, et pour les composantes covariantes, il s'agit de son inverse transposée.

### 1.3.5. Quelques exemples

Considérons quelques exemples de tenseurs.

## 1. Le groupe de Lorentz

### Temps propre

Le premier exemple de scalaire de Lorentz est bien sûr fourni par le temps propre infinitésimal  $d\tau$  de toute particule : c'est un invariant de Lorentz (qui est égal à zéro pour une particule sans masse).

### Quadrivitesse

Elle est définie par

$$V^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (1.73)$$

qui vérifie

$$V^2 = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2.$$

La définition ci-dessus a un sens pour une particule massive. Pour une particule de masse nulle, la discussion ci-dessus perd son sens puisque  $d\tau = 0$  et  $\gamma \rightarrow \infty$ . Néanmoins, dans n'importe quel référentiel, nous avons  $\frac{d\vec{x}}{dt} = c\vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire pointant dans la direction du mouvement de la particule, de sorte que la différentiation par rapport à  $t$  au lieu de  $\tau$  conduit à

$$V^\mu = (c, c\vec{n}),$$

qui vérifie maintenant  $V^2 = 0$ .

### Quadri-impulsion (ou quadri-moment)

Pour une particule massive, elle est définie comme suit :

$$P^\mu = mV^\mu = m \frac{dX^\mu}{d\tau} = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (1.74)$$

qui vérifie

$$P^2 = m^2 c^2.$$

La définition ci-dessus fait sens pour une particule massive. Pour une particule sans masse, la dernière égalité est encore valable, de sorte que pour une masse arbitraire, nous définissons

$$\boxed{P^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)}. \quad (1.75)$$

Notons que dans tous les cas <sup>6</sup>,

$$\frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{p}}{E}. \quad (1.76)$$

### Quadri-courant

A partir des densité de charge et de courant habituelles, on peut définir le quadri-courant

$$\boxed{J^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x))}. \quad (1.77)$$

En introduisant la densité de charge au repos  $\rho_0$  (i.e. la densité de charge dans le référentiel au repos), liée à la densité de charges  $\rho = \rho_v$  dans un référentiel se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au référentiel propre par la relation <sup>7</sup>  $\rho_v = \gamma\rho_0$ , avec comme d'habitude  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , on montre facilement que

$$J^\mu(x) = (c\rho_v(x), \rho_v(x)\vec{v}) = \rho_0 V^\mu.$$

ce qui montre que les  $J^\mu$  sont les composantes contravariantes d'un quadrivecteur ( $\rho_0$  est un scalaire de Lorentz).

Considérons le cas particulier du quadricourant associé au mouvement d'une particule chargée, de charge  $q$ , se déplaçant le long d'une trajectoire  $\vec{X}(t)$ . Nous avons alors

$$\rho(ct, \vec{x}) = q \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t)) \quad (1.78)$$

$$\vec{j}(ct, \vec{x}) = q \frac{d\vec{X}}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t)). \quad (1.79)$$

La trajectoire s'écrit

$$X^\mu(T) = (cT, \vec{X}(T)). \quad (1.80)$$

Il est donc naturel d'écrire en conséquence, en partant de l'idée que le quadricourant "ressent" la charge au point  $x$  si et seulement si elle s'y trouve, en couvrant toutes les possibilités par intégration sur l'ensemble de la trajectoire,

$$J^\mu(x) = qc \int dT \frac{dX^\mu}{dT}(T) \delta^{(4)}(x - X(T)). \quad (1.81)$$

6. Dans le cas massif, c'est immédiat d'après la dernière égalité de l'Eq. (1.74). Dans le cas sans masse, cela vient de  $E = h\nu = pc$ .

7. En effet  $\rho = \frac{d^3q}{d^3x}$  et  $d^3x_v = \frac{1}{\gamma} d^3x_r$  lorsqu'on exprime le volume infinitésimal dans le référentiel boosté ("v") en fonction du volume infinitésimal dans le référentiel boosté ("r"), de sorte que  $\rho_v = \gamma\rho_0$ .

## 1. Le groupe de Lorentz

Tout d'abord, notons que cette expression est invariante sous reparamétrisation puisque  $dT$  se simplifie dans cette expression. De plus, cette expression satisfait la covariance. En effet,  $d^4x$  est un scalaire (sous un boost,  $dx^0 \rightarrow \gamma dx^0$  and  $d^3x \rightarrow \frac{d^3x}{\gamma}$ ) et donc  $\delta^{(4)}(x)$  est aussi un scalaire, puisque

$$\int d^4x \delta^{(4)}(x) = 1.$$

Ainsi,  $J^\mu(x)$  se transforme comme  $dX^\mu$ , c'est-à-dire comme les composantes contravariantes d'un quadrivecteur.

En insérant (1.80) dans le courant (1.81), et comme

$$\frac{dX^\mu}{dT}(T) = \left( c, \frac{d\vec{X}}{dT}(T) \right), \quad (1.82)$$

nous obtenons pour le quadricourant

$$J^\mu(ct, \vec{x}) = qc \int dT \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t)) \delta(ct - cT) \left( c, \frac{d\vec{X}}{dT}(T) \right) \quad (1.83)$$

$$= \left( cq\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t)), q\frac{d\vec{X}}{dt}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t)) \right) \quad (1.84)$$

$$= \left( c\rho(x), \vec{j}(x) \right) \quad (1.85)$$

comme attendu.

## 1.4. Algèbre de Lie du groupe de Lorentz\*

Plutôt que d'étudier le nombre de paramètres permettant de décrire le groupe de Lorentz restreint comme nous l'avons fait dans la section 1.2.4 en étudiant directement sa structure, on peut obtenir le même résultat en considérant son *algèbre de Lie* (voir appendice C pour plus de détails). Celle-ci est formé par l'espace tangent au groupe de Lorentz restreint en un point donné, constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires des termes d'ordre 1 dans le développement de Taylor du groupe en ce point.

### 1.4.1. Groupe et algèbre de Lie

Un *groupe continu* est par définition continu par rapport à ses paramètres : ceci vaut aussi bien pour le produit de deux éléments du groupe que pour l'inverse d'un élément.



Un *groupe de Lie* est un groupe continu qui est par hypothèse analytique dans ses paramètres (à nouveau aussi bien pour le produit de deux éléments du groupe que pour l'inverse d'un élément) : on peut *différencier* ce groupe par rapport à ses paramètres. Le corps utilisé pour former les combinaisons linéaires obtenues par différentiation sera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dans le premier cas on parlera de  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie, dans le second cas de  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie. On obtient ainsi une structure d'espace vectoriel. En lui ajoutant un crochet de Lie, en pratique ici pour une algèbre de matrices, il s'agit simplement du commutateur des matrices, on obtient alors une structure dite d'algèbre de Lie<sup>8</sup>. Une base  $T^a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) de l'algèbre de Lie étant choisie<sup>9</sup>, la connaissance des crochets de Lie de ces différents vecteurs de base fixe complètement la structure de l'algèbre de Lie :

$$\boxed{[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c} \quad (1.86)$$

Les coefficients  $f_{ab}^c$  sont appelés *constantes de structure du groupe*.

Nous allons ici utiliser le résultat important :

La dimension  $n$  de l'algèbre de Lie du groupe est égale au nombre de paramètres indépendants permettant de décrire complètement le groupe. On appellera indifféremment  $n$  la *dimension* du groupe de Lie ou de son algèbre de Lie.

En effet, une base de l'algèbre de Lie s'obtient simplement en différentiant le groupe par rapport à l'un ou l'autre des  $n$  paramètres indépendants décrivant le groupe. On obtient ainsi  $n$  *générateurs*.

### 1.4.2. Algèbre de Lie du groupe de Lorentz restreint $L_+^\uparrow$

#### Forme infinitésimale d'une transformation de $L_+^\uparrow$

Considérons une transformation infinitésimale

$$\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}, \text{ avec } \|\omega^{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (1.87)$$

La contrainte  $g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\rho} \Lambda^{\nu\sigma} = g^{\rho\sigma}$  donne

$$g_{\mu\nu} (g^{\mu\rho} + \omega^{\mu\rho}) (g^{\nu\sigma} + \omega^{\nu\sigma}) = g^{\rho\sigma}$$

---

8. De façon générale, le crochet de Lie d'une algèbre de Lie doit par définition être une loi interne, et être bilinéaire, contraintes évidemment satisfaites dans le cas d'une algèbre de matrices, ce qui sera quasiment toujours le cas en physique.

9. Une base n'est bien sûr pas unique, en accord avec le fait qu'au niveau de l'algèbre, on peut faire un changement de base, et qu'au niveau du groupe, le choix de  $n$  directions indépendantes suivant lesquelles on va différentier n'est bien sûr pas unique.

## 1. Le groupe de Lorentz

soit au premier ordre en  $\omega$ ,

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} \omega^{\nu\sigma} + g_{\mu\nu} \omega^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} = g^{\rho\sigma}$$

d'où

$$\delta_{\nu}^{\rho} g^{\nu\sigma} + \delta_{\nu}^{\rho} \omega^{\nu\sigma} + \delta_{\mu}^{\sigma} \omega^{\mu\rho} = g^{\rho\sigma} + \omega^{\rho\sigma} + \omega^{\sigma\rho} = g^{\rho\sigma}$$

et donc

$$\omega^{\rho\sigma} + \omega^{\sigma\rho} = 0. \quad (1.88)$$

$\omega^{\mu\nu}$  est donc un tenseur réel  $4 \times 4$  antisymétrique : il dépend de 6 paramètres réels, en accord avec le résultat obtenu plus haut.

### Forme non covariante des générateurs

De la contrainte (1.88) écrite sous la forme

$$\omega_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta}, \quad (1.89)$$

on tire la relation matricielle  $\omega_{\alpha}^{\beta} = -\omega_{\alpha}^{\beta} = -g_{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \omega_{\beta'}^{\alpha'}$ .

En utilisant la forme explicite de la métrique  $g^{\mu\nu}$ , qui s'écrit

$$g_{i\alpha'} = -\delta_i^{\alpha'} \quad , \quad g^{0\beta'} = \delta_0^{\beta'},$$

on en déduit l'écriture matricielle

$$\begin{cases} \omega_{i0}^0 = \omega_{i0}^i \\ \omega_{ij}^i = -\omega_{ij}^j \end{cases}$$

soit

$$\omega_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_1 & d\phi_2 & d\phi_3 \\ d\phi_1 & 0 & -d\theta_3 & +d\theta_2 \\ d\phi_2 & +d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ d\phi_3 & -d\theta_2 & +d\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

où le bloc  $3 \times 3$  correspond à la matrice  $3 \times 3$  d'une rotation infinitésimale dans le sous-espace des rotations spatiales.

• Introduisons les générateurs  $J^i$  (ce sont les générateurs des rotations ; nous le justifierons explicitement dans le paragraphe 1.8) de la forme

$$J^i = \begin{pmatrix} 0 & \\ & J_{3 \times 3}^i \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

où les matrices  $3 \times 3$   $J_{3 \times 3}^i$  sont les générateurs des rotations à 3 dimensions, qui s'écrivent  $(J_{3 \times 3}^i)_{kj} = i\epsilon_{ijk}$ . On a  $J^+ = J$ . Explicitement,

$$J_{3 \times 3}^1 = i \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad J_{3 \times 3}^2 = i \begin{pmatrix} & -1 & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad J_{3 \times 3}^3 = i \begin{pmatrix} & -1 & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

• De même, on introduit les générateurs  $K^i$  (qui sont les générateurs des boosts : voir paragraphe 1.8), sous de la forme (en ne représentant que les éléments non nuls)

$$K^1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad K^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad K^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

On a  $K^+ \neq K$ .

Nous pouvons alors écrire (1.90) sous la forme

$$\omega = id\vec{\phi} \cdot \vec{K} - id\vec{\theta} \cdot \vec{J}. \quad (1.94)$$

Dans le cas d'une transformation finie, nous aurons le résultat suivant, justifié page 29,

Boost pur	$\Lambda = e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{K}}$
Rotation pure	$\Lambda = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}$

Un boost pur est non unitaire car  $K_i^\dagger \neq K_i$ .

Dans le cas général, et comme nous l'avons dit plus haut, un élément quelconque de  $L_+^\uparrow$  pourra s'écrire  $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$  où  $\Lambda_1$  est une rotation et  $\Lambda_2 = e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{K}}$  est un boost.

Par ailleurs, l'ensemble du groupe de Lorentz restreint s'obtient par exponentiation de son algèbre de Lie<sup>10</sup> : tout  $\Lambda$  de  $L_+^\uparrow$  peut s'écrire sous la forme

$$\Lambda = e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{K} - i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}. \quad (1.95)$$

---

10. Ceci est une sorte d'exception au cas général des groupes non-compacts, pour lesquels, sauf dans un voisinage de l'identité, l'ensemble du groupe ne peut s'obtenir par exponentiation de son algèbre de Lie, contrairement aux groupes compact pour lesquels l'ensemble de la composante connexe de l'identité s'obtient toujours par exponentiation de son algèbre de Lie.

## 1. Le groupe de Lorentz

### Algèbre de Lie

Des formes explicites (1.91) et (1.93) des générateurs on tire immédiatement les relations de commutation

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (1.96)$$

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (1.97)$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k \quad (1.98)$$

### Exercice 1.8

le vérifier en utilisant les expressions intrinsèques

$$(J_i)^k{}_j = i\varepsilon_{ijk} \quad (1.99)$$

et

$$(K_i)^\mu{}_\nu = -i[\delta^0_\nu\delta^\mu_i + \delta^\mu_0\delta^i_\nu]. \quad (1.100)$$

### Conséquences importantes :

- la relation (1.96) prouve que le groupe des rotations est un sous-groupe de  $L_+^\uparrow$ . En revanche, on constate d'après (1.98) que les boosts ne constituent pas un sous-groupe de  $L_+^\uparrow$ .

- $[J_1, K_1] = 0$  donc une rotation effectuée autour de la direction de la vitesse d'une transformation de Lorentz ne modifie pas cette transformation :

$$e^{-i\theta_1 J_1} e^{i\phi_1 K_1} e^{i\theta_1 J_1} = e^{i\phi_1 K_1}$$

puisque la loi de transformation d'un opérateur  $T$  s'écrit de façon générale, dans une représentation  $D$  du groupe des rotations<sup>11</sup>,  $T' = D(R)TD^+(R)$  .

- l'équation (1.98) exprime que  $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$  se transforme par rotation comme les composantes d'un vecteur (au sens de la représentation adjointe de  $SO(3)$  discutée plus loin : c'est un opérateur tensoriel d'ordre 1, ou opérateur vectoriel.

- l'équation (1.97)  $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$  exprime le fait que deux transformations de Lorentz pures  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_j$  le long des axes  $i$  et  $j$  engendrent une rotation

---

11. Ici, il s'agit de la représentation de spin 1, donc  $D(R) = R$ .

lorsqu'on effectue l'opération  $\Lambda_i \Lambda_j \Lambda_i^{-1}$ . Ce résultat est à l'origine du phénomène de "précession de Thomas" : une succession de transformations de Lorentz pures appliquées à une particule à spin peuvent ramener l'impulsion à sa valeur initiale (représentation vectorielle) alors que le spin a tourné (représentation spinorielle).

- attention : comme  $[J, K] \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \exp(i\vec{\phi} \cdot \vec{K}) \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) \neq \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) \exp(i\vec{\phi} \cdot \vec{K}) \\ &\neq \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J} + i\vec{\phi} \cdot \vec{K}) . \end{aligned} \quad (1.101)$$

### Transformation de Lorentz pure à partir de l'algèbre de Lie

Considérons une transformation de Lorentz pure d'axe  $\vec{x}$  engendré par  $K_1$ , de paramètre  $\phi_1$  (transformation active)

$$e^{iK_1\phi_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iK_1\phi_1)^{2k}}{(2k)!} + iK_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iK_1\phi_1)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$(iK_1) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad (iK_1)^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $\sigma_1^2 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ , donc

$$\begin{aligned} e^{iK_1\phi_1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_1)^{2k}}{(2k)!} + iK_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_1^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \text{ch } \phi_1 + iK_1 \text{sh } \phi_1 \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch } \phi_1 & \text{sh } \phi_1 & 0 & 0 \\ \text{sh } \phi_1 & \text{ch } \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La relation  $\vec{x}' = e^{iK_1\phi_1} \vec{x}$  s'écrit ainsi

$$\begin{cases} x'^0 = \text{ch } \phi_1 x^0 + \text{sh } \phi_1 x^1 \\ x'^1 = \text{sh } \phi_1 x^0 + \text{ch } \phi_1 x^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^0 = \text{ch } \phi_1 x'^0 - \text{sh } \phi_1 x'^1 \\ x^1 = -\text{sh } \phi_1 x'^0 + \text{ch } \phi_1 x'^1 . \end{cases} \quad (1.102)$$

En considérant un point particulier tel que  $x^1 = \text{constante}$ , on tire immédiatement  $v = \frac{dx'^1}{dx'^0} = \text{th } \phi$  : c'est la vitesse du point après boost, mesurée par

## 1. Le groupe de Lorentz

rapport au référentiel par rapport auquel il était fixe avant boost.

$$\boxed{\phi = \text{Argth } v \text{ est appelée rapidité.}}$$

On déduit de ce qui précède la paramétrisation

$$\begin{cases} \text{ch } \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ \text{sh } \phi_1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad (1.103)$$

et

$$\boxed{\begin{aligned} x'^0 &= \frac{x^0}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}x^1 \\ x'^1 &= \frac{v x^0}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x^1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}} \quad (1.104)$$

qui est bien la forme usuelle d'une transformation spéciale de Lorentz. Tout ceci est en accord avec l'ensemble des résultats déjà obtenus à la section 1.5.

### Cas général :

Considérons une transformation de Lorentz pure d'axe quelconque  $\vec{n}$  ( $\vec{n}^2 = 1$ ) et de vitesse  $v$  (point de vue actif) en terme de matrices,  $(K_i)^\mu{}_\nu = -i[\delta^0_\nu \delta^\mu_i + \delta_0^\mu \delta^i_\nu]$ . Montrons que  $\vec{x}' = e^{i\phi \vec{n} \cdot \vec{k}} \vec{x}$  est donné par

$$\boxed{\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \text{ch } \phi + (\vec{n} \cdot \vec{x}) \text{sh } \phi \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{n} (\vec{x} \cdot \vec{n}) + (x^0 \text{sh } \phi + (\vec{n} \cdot \vec{x}) \text{ch } \phi) \vec{n} \end{aligned}} \quad (1.105)$$

*Preuve :*

Partant de la définition des  $K^i$ , nous pouvons écrire

$$\left( i\vec{K} \cdot \vec{n} \right)^\mu{}_\nu = + [\delta^0_\nu n^\mu - \delta_0^\mu n_\nu] \quad (1.106)$$

où l'on a pris garde au fait que  $\vec{n} \cdot \vec{K} = n^i K^i$  ( $= n^i K_i$  car dans nos conventions  $K_i = K^i$ !). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left[ \left( i\vec{K} \cdot \vec{n} \right)^2 \right]^\mu{}_\nu &= \left[ i\vec{K} \cdot \vec{n} \right]^\mu{}_{\nu'} \left[ i\vec{K} \cdot \vec{n} \right]^{\nu'}{}_\nu = [\delta^0_{\nu'} n^\mu - \delta_0^\mu n_{\nu'}] [\delta^0_\nu n^{\nu'} - \delta_0^{\nu'} n_\nu] \\ &= (n^0 n^\mu \delta^0_\nu - n^\mu n_\nu - \delta_0^\mu \delta^0_\nu n^2 + n_0 \delta_0^\mu n_0) = -n^\mu n_\nu + \delta_0^\mu \delta^0_\nu \end{aligned} \quad (1.107)$$

puisque  $n^2 = -1$ . Enfin

$$\left[ (i\vec{K} \cdot \vec{n})^3 \right]^\mu_\nu = [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_\nu] [-n^\nu n_\nu + \delta_0^\nu \delta_\nu^0] = n^\mu \delta_\nu^0 - \delta_0^\mu n_\nu = (i\vec{K} \cdot \vec{n})^\mu_\nu. \quad (1.108)$$

La série s'écrit donc

$$\begin{aligned} \left[ e^{i\phi \vec{n} \cdot \vec{K}} \right]^\mu_\nu &= \delta_\nu^\mu + [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_\nu] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\quad + [-n^\mu n_\nu + \delta_0^\mu \delta_\nu^0] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + n^\mu n_\nu - \delta_0^\mu \delta_\nu^0 \\ &= \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu - \delta_0^\mu \delta_\nu^0 + [\delta_\nu^0 n^\mu - \delta_0^\mu n_\nu] \operatorname{sh} \phi + [-n^\mu n_\nu + \delta_0^\mu \delta_\nu^0] \operatorname{ch} \phi. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Ainsi

$$x'^\mu = x^\mu + n^\mu (x \cdot n) - \delta_0^\mu x^0 + [x^0 n^\mu - \delta_0^\mu (n \cdot x)] \operatorname{sh} \phi + [-n^\mu (n \cdot x) + \delta_0^\mu x^0] \operatorname{ch} \phi$$

ce qui prouve le résultat.

### Rotation à partir de l'algèbre de Lie

A titre d'exercice, nous pouvons également déterminer la forme explicite d'une rotation, que l'on peut bien entendu obtenir directement de façon purement géométrique.

Pour une rotation active d'axe  $\vec{z}$  et d'angle  $\theta_3$ ,

$$\begin{aligned} e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} = e^{-i\theta_3 J_3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_3)^{2k}}{(2k)!} (-i\theta_3)^{2k} - iJ_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_3)^{2k}}{(2k+1)!} \theta_3^{2k+1} (-i)^{2k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(+\theta_3)^{2k}}{(2k)!} (-1)^k}_{\cos \theta_3} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_3^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k (-iJ_3)}_{\sin \theta_3} \end{aligned}$$

En effet,

$$J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

## 1. Le groupe de Lorentz

donc

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \mathbb{1}_{2 \times 2} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $\sigma_2^2 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ . Ainsi

$$e^{-i\theta_3 J_3} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & \\ & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation passive (rotation des axes) est obtenue en faisant  $\theta \rightarrow -\theta$ .

### Cas général :

Dans le cas d'une rotation quelconque d'axe  $\vec{n}$  et d'angle  $\theta$  (point de vue actif), montrons que

$$\boxed{\vec{x}' = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}} \vec{x} = (\vec{x} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x})) \cos \theta + \vec{n} \wedge \vec{x} \sin \theta + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x})}. \quad (1.110)}$$

*Preuve :*

Calculons donc

$$e^{-i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{n} \cdot \vec{J})^k}{k!} \theta^k. \quad (1.111)$$

Nous pouvons écrire

$$\left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_j^k = -i(J^i)^k_j n^i = \varepsilon_{ijk} n^i \quad (1.112)$$

où dans ce calcul à 3 dimensions, on utilise les conventions habituelles dans lesquelles on ne distingue pas les composantes co- et contra-variantes. Ainsi

$$\left( (-i\vec{J} \cdot \vec{n}) \vec{x} \right)^k = \varepsilon_{ijk} n^i x^j = (\vec{n} \wedge \vec{x})^k \quad (1.113)$$

et

$$\left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{kk'}^2 = \left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{kj} \left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{jk'} = \varepsilon_{ijk} n^i \varepsilon_{i'k'j} n^{i'} = -\delta_{k'}^k + n^k n^{k'} \quad (1.114)$$

puisque  $\vec{n}^2 = 1$ . Enfin

$$\begin{aligned} \left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{kk'}^3 &= \left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{kj} \left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{jk'}^2 = \varepsilon_{ijk} n^i \left( -\delta_{k'}^j + n^j n^{k'} \right) \\ &= -\varepsilon_{ik'k} n^i + \varepsilon_{ijk} n^i n^j n^{k'} = -\left( -i\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{kk'} \end{aligned} \quad (1.115)$$



où, pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé le fait que  $\varepsilon_{ijk}n^i n^j n^{k'} = 0$  par contraction d'un tenseur antisymétrique par un tenseur symétrique. Ainsi

$$\begin{aligned} \left( e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}} \right)_{kj} &= \delta_j^k + \theta \varepsilon_{ijk} n^i - \frac{\theta^2}{2} (\delta_j^k - n^k n^j) - \frac{\theta^3}{3!} \varepsilon_{ijk} n^i + \frac{\theta^4}{4!} (\delta_j^k - n^k n^j) + \dots \\ &= (\delta_j^k - n^k n^j) \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} + \dots \right) + n^k n^j + \varepsilon_{ijk} n^i \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.116)$$

soit

$$\left( e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}} \right)_{kj} = (\delta_j^k - n^k n^j) \cos \theta + \varepsilon_{ijk} n^i \sin \theta + n^k n^j \quad (1.117)$$

d'où finalement

$$e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}} \vec{x} = \vec{x}' = (\vec{x} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x})) \cos \theta + \vec{n} \wedge \vec{x} \sin \theta + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) \quad (1.118)$$

puisque  $\varepsilon_{ijk} n^i x^j = (\vec{n} \wedge \vec{x})_k$ .

### Forme covariante de l'algèbre de Lie de $L_+^\uparrow$

Nous avons écrit en 1.2.2 une transformation infinitésimale sous la forme

$$\Lambda = \mathbb{1} + \omega$$

ou encore

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu,$$

et montré que  $\omega_{\mu\nu}$  est antisymétrique, i.e. que  $\omega_{\mu\nu}$  dépend de 6 paramètres, ce qui définit la dimension de l'algèbre de Lie.

Plutôt que d'utiliser une paramétrisation non covariante de cette transformation infinitésimale à l'aide de  $(d\vec{\theta}, d\vec{\phi})$ , comme nous l'avons fait dans le paragraphe 1.4.2, on peut utiliser  $\omega_{\mu\nu}$  comme collection de paramètres. Ceci nous conduit à introduire la définition suivante, covariante, des générateurs de l'algèbre de Lie :

$$\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}. \quad (1.119)$$

Dans cette définition, les indices  $(\alpha, \beta)$  jouent le rôle d'étiquetage des générateurs. Ceux-ci sont eux-même des tenseurs, et portent donc également des indices. On peut imposer  $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$  puisque les  $\omega^{\alpha\beta}$  sont antisymétriques,

## 1. Le groupe de Lorentz

d'où le facteur conventionnel  $\frac{1}{2}$  pour éviter le double comptage Tensoriellement, la relation (1.119) s'écrit :

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})_{\mu\nu} .$$

Donc

$$\omega_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})_{\mu\nu} . \quad (1.120)$$

On en déduit que les  $J_{\alpha\beta}$  sont des tenseurs antisymétriques (i.e. que  $(J_{\alpha\beta})_{\mu\nu}$  est antisymétrique par rapport à  $(\mu\nu)$ ).

Introduisons la base

$$(a_{\mu'\nu'})^{\mu\nu} = \delta_{\mu'}^{\mu}\delta_{\nu'}^{\nu} - \delta_{\mu'}^{\nu}\delta_{\nu'}^{\mu} . \quad (1.121)$$

C'est une base, dite canonique, des tenseurs antisymétriques, qui s'écrit encore

$$a_{\mu'\nu'} = e_{\mu'\nu'} - e_{\nu'\mu'}$$

où

$$(e_{\mu'\nu'})^{\mu\nu} = \delta_{\mu'}^{\mu}\delta_{\nu'}^{\nu}$$

est la base canonique des tenseurs de rang 2. Dans cette base, (1.120) s'écrit

$$-\frac{i}{2} \left( \delta_{\mu'}^{\alpha}\delta_{\nu'}^{\beta} - \delta_{\mu'}^{\beta}\delta_{\nu'}^{\alpha} \right) (J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = \delta_{\mu'}^{\mu}g_{\nu\nu'} - g_{\nu\mu'}\delta_{\nu'}^{\mu} .$$

Le premier membre de cette égalité s'écrit encore  $-\frac{i}{2} [(J_{\mu'\nu'})^{\mu}_{\nu} - (J_{\nu'\mu'})^{\mu}_{\nu}] = -i (J_{\mu'\nu'})^{\mu}_{\nu}$  par antisymétrie sur  $(\mu'\nu')$ .

Donc

$$\boxed{(J_{\mu'\nu'})^{\mu}_{\nu} = i \left( g_{\mu'}^{\mu}g_{\nu\nu'} - g_{\nu\mu'}g_{\nu'}^{\mu} \right) ,}$$

ou encore

$$\boxed{(J_{\mu'\nu'})_{\mu\nu} = i (a_{\mu'\nu'})_{\mu\nu} .}$$

L'algèbre de Lie s'en déduit immédiatement :

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i (g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) .} \quad (1.122)$$

*Preuve :*

- directement, en utilisant la forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]_{\beta}^{\alpha} &= (J_{\mu\nu})_{\beta'}^{\alpha} (J_{\rho\sigma})_{\beta}^{\beta'} - (J_{\rho\sigma})_{\beta'}^{\alpha} (J_{\mu\nu})_{\beta}^{\beta'} \\
 &= -(\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\nu\beta'} - g_{\beta'\mu} \delta_{\nu}^{\alpha}) (\delta_{\rho}^{\beta'} g_{\sigma\beta} - g_{\beta\rho} \delta_{\sigma}^{\beta'}) \\
 &\quad + (\delta_{\rho}^{\alpha} g_{\sigma\beta'} - g_{\beta'\rho} \delta_{\sigma}^{\alpha}) (\delta_{\mu}^{\beta'} g_{\nu\beta} - g_{\beta\mu} \delta_{\nu}^{\beta'}) \\
 &= -g_{\nu\rho} (\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\sigma\beta} - \delta_{\sigma}^{\alpha} g_{\beta'\mu}) + g_{\mu\rho} (-\delta_{\sigma}^{\alpha} g_{\nu\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha} g_{\sigma\beta}) \\
 &\quad - g_{\mu\sigma} (-\delta_{\rho}^{\alpha} g_{\nu\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha} g_{\beta\rho}) + g_{\nu\sigma} (\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\rho\beta} - \delta_{\rho}^{\alpha} g_{\beta\sigma}) \\
 &= i (g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho})_{\beta}^{\alpha}
 \end{aligned}$$

• en écrivant les générateurs sous la forme manifestement antisymétrique  $J_{\mu\nu} = i(e_{\mu\nu} - e_{\nu\mu}) = i(|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|)$ , avec le produit scalaire minkowskien  $\langle \alpha|\mu \rangle = g_{\alpha\mu}$ , on peut aisément retrouver l'équation précédente de manière intrinsèque. Le lecteur non convaincu vérifiera préalablement que

$$\begin{aligned}
 (J_{\mu\nu})_{\alpha\beta} &= i (\langle \alpha|\mu \rangle \langle \nu|\beta \rangle - \langle \alpha|\nu \rangle \langle \mu|\beta \rangle) \\
 &= i (g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta})
 \end{aligned}$$

en accord avec la forme obtenue plus haut. L'obtention des relations de commutation de l'algèbre de Lie est alors immédiate :

$$\begin{aligned}
 [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -(|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|) (|\rho\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\rho|) \\
 &\quad + (|\rho\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\rho|) (|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|) = -g_{\nu\rho} (|\mu\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\mu|) \\
 &\quad + g_{\mu\rho} (|\nu\rangle\langle\sigma| - |\sigma\rangle\langle\nu|) - g_{\mu\sigma} (|\nu\rangle\langle\rho| - |\rho\rangle\langle\nu|) + g_{\nu\sigma} (|\mu\rangle\langle\rho| - |\rho\rangle\langle\mu|) \\
 &= i (g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}) .
 \end{aligned}$$

On notera que dans ce calcul, la forme explicite des générateurs ne joue aucun rôle. Seul compte leur propriété d'antisymétrie par rapport à leur index d'étiquetage, qui provient elle-même de l'antisymétrie des  $\omega_{\mu\nu}$ , i.e. de la définition de  $L_{+}^{\uparrow}$ . Ceci ne doit pas nous surprendre : l'algèbre de Lie est la même quelque soit la représentation choisie. Nous allons le vérifier explicitement sur la représentation régulière discutée dans le paragraphe qui suit.

### 1.4.3. Représentations du groupe de Lorentz

#### Représentations non unitaires de dimensions finies

Il est possible de rendre l'algèbre de Lie compacte, en utilisant la méthode présentée à la fin de l'appendice C.

## 1. Le groupe de Lorentz

Partant des 6 générateurs (1.91) et (1.93), posons en effet

$$\begin{cases} M_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \\ N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \end{cases} . \quad (1.123)$$

L'algèbre de Lie donnée par les relations de commutation (1.96, 1.97, 1.98) conduit alors à

$$[M_i, M_j] = i \varepsilon_{ijk} M_k \quad (1.124)$$

$$[N_i, N_j] = i \varepsilon_{ijk} N_k \quad (1.125)$$

$$[M_i, N_j] = 0. \quad (1.126)$$

Cette algèbre de Lie est donc identique à celle du groupe  $SU(2) \times SU(2)$ .

L'algèbre de Lie ainsi obtenue est une forme réelle compacte de même extension complexe que  $\mathfrak{so}(3, 1)$ .  $\vec{M}^2$  et  $\vec{N}^2$  sont deux opérateurs quadratiques invariants. Ces Casimirs commutent avec  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$ , donc avec toute l'algèbre, et donc avec tout élément du groupe de Lorentz restreint  $L_+^\uparrow$ . Dans le cas d'une représentation irréductible, d'après le lemme de Schur (voir l'appendice B), on a

$$\begin{aligned} \vec{M}^2 &= j_1(j_1 + 1)\mathbf{1} \\ \vec{N}^2 &= j_2(j_2 + 1)\mathbf{1} \end{aligned} \quad (1.127)$$

avec  $j_1, j_2$  entiers ou demi-entiers.

Bien entendu, du fait du facteur  $i$  introduit dans les définitions (1.123), lorsque l'on revient aux représentations du groupe de Lorentz restreint  $L_+^\uparrow$ , ces représentations perdent leur unitarité, mais ce sont les seules de dimension finie. Ceci est en accord avec le résultat général valable pour un groupe de Lie non compact, cf théorème B.12.

### Représentation unitaire de dimension infinie sur les fonctions scalaires

On s'inspire ici du principe général de construction des représentations régulières, voir l'appendice B.3. Ici, plutôt que de faire agir le groupe sur des fonctions agissant sur les éléments du groupe, on fait agir le groupe sur des fonctions agissant sur des quadrivecteurs de l'espace de Minkowski :

$\forall \Lambda \in L_+^\uparrow$  on associe la transformation  $T_\Lambda$  agissant sur les fonctions  $f(x)$  :

$$f(x) \xrightarrow{T_\Lambda} (T_\Lambda f)(x) = f(\Lambda^{-1}x) .$$

T est une représentation de  $L_+^\uparrow$

*Preuve :*

$$\begin{aligned} (T_\Lambda T_{\Lambda'} f)(x) &= T_{\Lambda'} f(\Lambda^{-1}x) = f(\Lambda'^{-1}\Lambda^{-1}x) \\ &= f((\Lambda\Lambda')^{-1}x) \\ &= (T_{\Lambda\Lambda'} f)(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $T_\Lambda T_{\Lambda'} = T_{\Lambda\Lambda'}$ .

### Générateurs de cette représentation :

A la transformation infinitésimale de Lorentz

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$$

correspond

$$(T_\Lambda f)(x) = \left(1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right) f(x) \quad (\text{facteur 2 à cause du double comptage})$$

où les  $J_{\mu\nu}$  sont des opérateurs différentiels. En utilisant la définition de  $T$ , on a donc

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right) f(x) &= f(\Lambda^{-1}x) = f(x^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu) \\ &= f(x) - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu f \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)} . \quad (1.128)$$

On vérifiera aisément que ces générateurs satisfont l'algèbre de Lie (1.122).

## 1. Le groupe de Lorentz

Cette représentation est **unitaire** :

$$\int d^4x f^2(\Lambda^{-1}x) = \int d^4x f^2(x) \quad (1.129)$$

puisque le changement de variable  $x \rightarrow \Lambda x$  est de jacobien égal à 1 pour une transformation de Lorentz. Notons que  $L_+^\uparrow$  n'est pas compact, et que la représentation unitaire de  $L_+^\uparrow$  que nous venons de construire est de dimension **infinie**, en accord avec le théorème B.12.

Si l'on se restreint au sous-groupe  $SO(3)$  des rotations, les générateurs se réduisent aux 3 générateurs  $\vec{L}$  du moment cinétique orbital. Cette représentation de dimension infinie, unitaire, se réduit alors, pour ce groupe compact, à une somme (infinie) de représentation unitaire irréductible, étiquetées par la valeur du moment cinétique orbital  $\ell$ . On tombe ainsi sur la théorie des harmoniques sphériques. Mathématiquement, toute fonction de carré sommable (condition sine qua non pour définir une norme sur ces fonctions et donc pouvoir parler d'unitarité) définie sur la sphère  $S^2$  peut bien se décomposer sur les harmoniques sphériques.

# 2. Théorie classique des champs

## 2.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons examiner comment généraliser le formalisme de la mécanique analytique aux systèmes comportant un nombre infini de degrés de liberté<sup>1</sup> Un champ est un système possédant un nombre infini de degrés de liberté. C'est le cas par exemple de la mécanique des fluides ou encore de l'électromagnétisme. Dans la suite, nous allons nous intéresser aux théories des champs relativistes, pour lesquels le groupe de symétrie d'espace-temps sera le groupe de Poincaré. Notons cependant que la forme des équations du mouvement pour le champ, de même que l'écriture de la seconde variation de l'action, ne font pas explicitement intervenir le groupe de symétrie d'espace-temps envisagé (groupe de Galilée pour la mécanique des fluides non relativistes par exemple). Le passage de la mécanique analytique à la théorie des champs consiste à remplacer les coordonnées  $q_i(t)$ , en nombre fini (indexées par  $i$ ) par une collection infinie de coordonnées, indexées par un paramètre qui pourra être discret (exemple : théorie des champs sur réseau) ou continu. Dans la suite, on supposera que ces coordonnées sont indexées par les coordonnées spatiales supposées continues, et pour simplifier les notations, on discutera le cas d'un champ scalaire, qui sera noté génériquement  $\phi(\vec{x}, t)$ . Dans le cas relativiste, on notera  $\phi(x)$  ce champ,  $x$  étant alors la coordonnée quadridimensionnelle. Bien entendu, le champ pourra être vectoriel, spinoriel, tensoriel... Les lois de transformation de tels champs sous le groupe de symétrie d'espace-temps seront discutées en détail dans les chapitres suivants.

## 2.2. Formulation lagrangienne

On se limitera dans tout ce qui suit aux théories des champs *locales*, pour lesquelles l'action pourra s'écrire sous la forme

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \tag{2.1}$$

---

1. Nous renvoyons aux cours de mécanique analytique pour le cas d'un nombre fini de degrés de liberté. Références utiles : *Mécanique analytique*, J.-M. Rax ; *Mécanique*, L. Landau, E. Lifchitz ; *Classical Mechanics*, H. Goldstein.

## 2. Théorie classique des champs

où  $\mathcal{L}(x)$  est la densité lagrangienne qui sera supposée ne dépendre que d'un nombre *fini* de dérivées des champs<sup>2</sup>. En pratique, en général  $\mathcal{L}(x)$  ne dépendra que des champs et de leur dérivée première, tout comme en mécanique, la fonction de Lagrange ne dépend que des coordonnées généralisées et de leur première dérivée temporelle, de sorte que les équations du mouvement sont des équations différentielles d'ordre deux<sup>3</sup>. Ainsi  $\mathcal{L}(x)$  sera de la forme

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x), x). \quad (2.2)$$

L'indice  $i$  permet d'étiqueter les champs de différente nature ou, si les champs ne sont pas scalaire, leurs composantes (exemple :  $A_\mu(x)$  dans le cas de l'électromagnétisme, ou  $\Psi(x)$ , un champ bispinoriel, i.e. une collection de 4 nombres complexes, décrivant une particule relativiste de spin 1/2). En général, on supposera que les champs s'annulent assez vite à l'infini, ce qui permet de se débarrasser des termes de bord lors des manipulation habituelles basées sur des intégrations par partie (exception notable : théories topologiques).

## 2.3. Equations d'Euler-Lagrange

On note  $\Omega$  le domaine d'espace temps<sup>4</sup> sur lequel on intègre la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  pour obtenir l'action  $S$ . La méthode pour obtenir les équations du mouvement est exactement la même qu'en mécanique analytique : on varie l'action en supposant qu'elle soit extrémale pour les valeurs de champs décrivant l'état du système. On varie donc l'action sur une trajectoire, en effectuant la transformation

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x), \quad (2.3)$$

qui conduit à une variation de l'action de la forme

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \phi_i(x)} \delta \phi_i(x) + \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \partial_\mu \phi_i(x)} \delta(\partial_\mu \phi_i(x)) \right], \quad (2.4)$$

---

2. En effet, ceci est supposé afin de respecter la localité : si  $\mathcal{L}(x)$  dépendait des valeurs des champs en des points  $y$ , distincts de  $x$ , la valeur du champ  $\phi(y)$  pourrait être reconstruite à partir de celle de  $\phi(x)$  et de ses dérivées au point  $x$ , ce qui exige de façon générale de connaître *un nombre infini de dérivées de ce champ en  $x$*  par développement de Taylor...

3. Ceci est dû à l'apparition d'instabilités d'Ostrogradsky, pour les théories ayant des équations du mouvement faisant intervenir des dérivées temporelles des coordonnées d'ordre supérieur à deux. Un théorème dû à Mikhaïl Ostrogradsky en mécanique classique énonce en effet qu'un Lagrangien non dégénéré (i.e. les coordonnées canoniques peuvent être exprimées en termes des dérivées de  $q$  et vice versa) dépendant de dérivées d'ordre supérieur à un correspond à un hamiltonien non borné par valeurs inférieures, qui est donc non physique. De récents développements en théorie modifiée de la gravitation (donc au-delà de la relativité générale) contournent ce théorème en utilisant des lagrangiens dégénérés dans le cadre des théories tenseurs-scalaires.

4. En général,  $\Omega$  sera l'espace temps tout entier (et donc chaque composante de  $x$  variera sur  $]-\infty, +\infty[$ , mais il est utile de garder  $\Omega$  en toute généralité, en particulier en vue du théorème de Noether).



avec la contrainte que les champs sur le bord  $\partial\Omega$  sont données a priori, et donc fixées. La variation  $\delta\phi(x)$  s'annule donc pour tout  $x$  appartenant à  $\partial\Omega$ . Pour obtenir l'expression (2.4) on a simplement effectué un développement de la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  au premier ordre en  $\delta\phi_i(x)$  et  $\delta(\partial_\mu\phi_i(x))$ .

En intégrant par partie, on obtient alors

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} \right] \delta\phi_i(x) + \int_{\partial\Omega} \delta\phi_i(x) \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} d^3\sigma_\mu \quad (2.5)$$

où  $\partial\Omega$  est le bord de  $\Omega$  et  $d^3\sigma_\mu$  est l'élément d'intégration sur ce bord. Le dernier terme de l'équation précédente est nul puisque  $\delta\phi_i(x)$  s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ <sup>5</sup>. L'action devant être stationnaire au voisinage des solutions des équations du mouvement (donc pour toute variation  $\delta\phi_i(x)$ ), on déduit de (2.5) que

$$\boxed{\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} = 0} \quad (2.6)$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange pour les champs  $\phi_i(x)$ .

Dans le cas où  $\Omega$  est l'espace-temps tout entier, notons que l'ajout d'une divergence totale à la densité lagrangienne ne modifie pas l'action, puisque cette 4-divergence s'intègre à 0, et donc laisse invariante les équations du mouvement<sup>6</sup>.

## 2.4. Les symétries globales

L'objectif de cette section est de montrer que pour toute action invariante sous une symétrie globale, on peut construire un courant conservé, et une charge conservée qui en découle.

### 2.4.1. Variation de l'action par rapport aux conditions aux limites

Comme première étape, étudions comment l'action est modifiée lorsqu'une configuration des champs, solution des équations du mouvement, est modifiée en une autre solution des équations du mouvement, infiniment proche, sur l'ensemble du domaine d'espace-temps  $\Omega$ , *y compris sa frontière*, en particulier sans

5. Dans le cas où  $\Omega$  est l'espace-temps tout entier, ceci est compatible avec l'hypothèse usuelle, non indispensable ici, de décroissance des champs à l'infini

6. En effet  $\int_{\Omega} \partial_\mu F^\mu(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x), x) = \int_{\partial\Omega} F^\mu(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x), x) d^3\sigma_\mu = 0$  pour des champs nuls à l'infini conduisant donc à une annulation de  $F^\mu$  sur le bord  $\partial\Omega$ .

## 2. Théorie classique des champs

fixer cette configuration sur le bord  $\partial\Omega$ . Ceci est donc à distinguer de l'étude menée précédemment dans la section 2.3 lorsque nous avons établi les équations d'Euler-Lagrange, pour laquelle les configurations des champs étaient fixées sur les bords.

Nous allons montrer que cette variation de l'action revêt une expression très simple, fonction uniquement de la variation de la configuration des champs sur le bord. Notons qu'à ce stade, les transformations envisagées ne sont pas supposées être des symétries de l'action.

Considérons donc une transformation quelconque des coordonnées et des champs<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= x^{\mu} + \delta x^{\mu} \\ \phi'(x') &= \phi(x) + \delta\phi(x).\end{aligned}\tag{2.7}$$

On obtient alors la variation locale du champ

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\phi(x) &= \phi'(x) - \phi(x) \\ &= \phi(x - \delta x) + \delta\phi(x - \delta x) - \phi(x) \\ &= \delta\phi(x) - \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x) + \dots \text{(termes d'ordre supérieur)}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

L'action pour les champs solutions des équations du mouvement qui s'écrit, avant transformation,

$$S = \int_{\Omega} d^4\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x), x)\tag{2.9}$$

devient donc

$$S' = \int_{\Omega'} d^4\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_{\mu}\phi'(x), x)\tag{2.10}$$

où  $\Omega'$  est le transformé de  $\Omega$  par (2.7). Or  $S'$  s'écrit encore, en utilisant le fait que  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont infiniment proches,

$$S' = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_{\mu}\phi', x) + \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_{\mu} \delta x^{\mu} \mathcal{L}(\phi', \partial_{\mu}\phi', x),\tag{2.11}$$

ce qui donne, par développement de Taylor à l'ordre 1, et en négligeant les termes d'ordre 2,

$$S' = S + \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu}\phi)} \partial_{\mu}\bar{\delta}\phi \right) + \int_{\delta\Omega} d^3\sigma_{\mu} \delta x^{\mu} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x) + \dots.\tag{2.12}$$

---

7. Pour alléger les notations, nous omettons ici l'indice  $i$ , qui indexait dans la section 2.3 les différents types de champs et/ou leurs composantes. Ceci ne change bien sûr rien à la preuve dans le cas général.

En intégrant par partie, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 S' &= S + \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \right) \bar{\delta} \phi + \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \bar{\delta} \phi \right) \\
 &\quad + \int_{\delta \Omega} d^3 \sigma_{\mu} \delta x^{\mu} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu} \phi, x) + \dots .
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Le second terme s'annule puisque les champs satisfont les équations du mouvement. Le troisième terme étant une 4-divergence, il s'intègre facilement, ce qui conduit, en regroupant ensemble le 3ème et le 4ème terme, à

$$\begin{aligned}
 S' &= S + \int_{\delta \Omega} d^3 \sigma_{\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \bar{\delta} \phi + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \right) + \dots \\
 &= S + \int_{\delta \Omega} d^3 \sigma_{\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\nu} \phi \delta x^{\nu} + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

où on a utilisé l'eq. (2.8). On obtient finalement

$$\delta S = \int_{\delta \Omega} d^3 \sigma_{\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi - \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - g^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \right) \delta x^{\nu} \right) + \dots , \tag{2.15}$$

en utilisant le fait que  $g^{\mu}_{\nu} \equiv \delta^{\mu}_{\nu}$ .

### 2.4.2. Théorème de Noether

Dans le cas particulier où les transformations considérées laissent invariante l'action, on obtient alors le théorème de Noether, qui énonce qu'à *tout groupe continu de symétrie de l'action est associé une quantité conservée*. Le courant conservé correspondant à cette symétrie s'écrit

$$\boxed{j^{\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi - \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - g^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \right) \delta x^{\nu}} \tag{2.16}$$

puisque d'après la relation (2.15),

$$\delta S = 0 = \int_{\delta \Omega} d^3 \sigma_{\mu} j^{\mu} = \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} j^{\mu}$$

quelque soit  $\Omega$ , ce qui montre que le courant  $j^{\mu}$  est conservé :

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 .$$

## 2. Théorie classique des champs

La charge conservée correspondante s'écrit

$$Q = \int d^3x j^0(x). \quad (2.17)$$

En effet,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int d^3x \partial_0 j^0(x) = - \int d^3x \partial_i j^i(x) = 0$$

pour des champs rapidement décroissants à l'infini. On peut plus généralement définir la charge conservée par la relation

$$Q = \int_{N_3} d^3\sigma_\mu j^\mu(x), \quad (2.18)$$

où  $N_3$  est une 3-surface de genre espace.

Les transformations envisagées précédemment sont a priori globales (appelées encore *rigides*). Aucune hypothèse sur le caractère *local* de ces transformations n'est ici nécessaire. Le fait d'imposer une invariance de l'action sous les transformations locales est une exigence supplémentaire que l'on impose dans le cas des théories de jauge, ce qui fournit un principe dynamique pour construire le lagrangien (exemples : électromagnétisme, théories de Yang-Mills).

### 2.4.3. Applications

#### Invariance par translation

Si la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement de  $x^\mu$  (invariance par translation d'espace-temps), alors on peut considérer les transformations particulières

$$\begin{aligned} \delta x^\mu(x) &= \text{constante} = \delta x^\mu, \\ \delta \phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

On en déduit que le courant

$$\left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x_\nu \quad (2.20)$$

est conservé, pour tout  $\delta x^\nu$  constant arbitraire, c'est-à-dire que le tenseur

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right)}, \quad (2.21)$$

appelé *tenseur canonique d'énergie-impulsion du champ*, est conservé :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.22)$$

Par analogie immédiate avec la définition de l'impulsion en mécanique analytique, l'*impulsion du champ* est définie par

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \phi)} \quad (2.23)$$

d'où l'on déduit que

$$T^{0\nu} = \Pi \partial^\nu \phi - g^{0\nu} \mathcal{L} \quad (2.24)$$

et

$$T^{00} = \Pi \partial^0 \phi - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H}. \quad (2.25)$$

ce qui permet d'interpréter la charge  $\int T^{00} d^3x$  comme l'énergie totale du champ. Ainsi

$$P^\nu = \int T^{0\nu} d^3x, \quad (2.26)$$

qui se transforme comme un quadrivecteur, peut être identifié au quadrivecteur énergie-impulsion totale du champ.

On dispose ainsi à présent d'une formule générale pour le courant conservé par une transformation laissant invariante l'action : en combinant (2.16) et (2.21) on obtient en effet

$$\boxed{j^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta \phi - T^{\mu\nu} \delta x_\nu.} \quad (2.27)$$

### Cas des lagrangiens indépendants des champs

Le cas des lagrangiens indépendants des champs présente un intérêt particulier. C'est le fait par exemple des champs de jauge, qui sont de masse nulle (on verra plus loin qu'un terme de masse dans le lagrangien briserait l'invariance de jauge ; les bosons massifs ne peuvent acquérir leur masse que par un mécanisme de brisure spontanée de symétrie d'un champ auxiliaire scalaire : c'est le mécanisme de Higgs).

Considérons par exemple le cas de QED en l'absence de matière que nous construirons explicitement un peu plus loin. Le lagrangien correspondant s'écrit

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.29)$$

## 2. Théorie classique des champs

Sous la transformation globale

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= 0 \\ \delta A^\mu(x) &= \text{constante} = \delta A^\mu,\end{aligned}\tag{2.30}$$

l'action du champ est laissée invariante, d'où l'on déduit la conservation du courant

$$j^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu$$

pour tout  $\delta A^\mu$  constant, ce qui conduit donc à la conservation de

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)}.$$

Le calcul de ce courant pour le lagrangien (2.28) est élémentaire. L'antisymétrie de  $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  permet de réécrire (2.28) sous la forme

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu, \tag{2.31}$$

qui mène immédiatement à

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}.$$

La conservation de ce courant s'écrit

$$\partial^\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.32}$$

ce qui constitue la forme covariante du premier couple d'équations de Maxwell dans le vide. Notons que la même équation s'obtient en écrivant l'équation du mouvement satisfaite par le champ  $A^\mu$ .

### Invariance de Lorentz

Si le lagrangien est invariant sous les transformations de Lorentz, alors on peut envisager (dans le cas des champs scalaires) la transformation

$$\begin{aligned}\delta x^\nu &= \omega^{\nu\mu} x_\mu \\ \delta \phi &= 0,\end{aligned}\tag{2.33}$$

qui laisse invariante l'action, pour tout tenseur infinitésimal  $\omega^{\nu\mu}$  antisymétrique. D'après le théorème de Noether, on peut donc immédiatement en déduire que le courant

$$\left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \omega_{\nu\rho} x^\rho \tag{2.34}$$

est conservé, ou encore, puisque  $\omega^{\nu\rho}$  est antisymétrique et en utilisant la définition du tenseur d'énergie-impulsion (2.21), que

$$(T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \omega^{\nu\rho} \quad (2.35)$$

est conservé, pour tout  $\omega^{\nu\rho}$ . On en tire finalement la conservation du tenseur de moment cinétique

$$J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

La charge correspondante s'écrit

$$J^{\nu\rho} = \int d^3x J^{0,\nu\rho} = \int d^3x (x^\nu T^{0\rho} - x^\rho T^{0\nu}). \quad (2.37)$$

C'est le moment angulaire total du champ, qui s'obtient bien, comme on pouvait s'y attendre, en intégrant la contribution en chaque point  $x$  du moment orbital. L'écriture explicite de la conservation de  $J^{\mu,\nu\rho}$  est instructive. En utilisant la conservation du tenseur  $T^{\mu\nu}$ , on obtient

$$\partial_\mu J^{\mu,\nu\rho} = \partial_\mu (x^\nu T^{\mu\rho}) - \partial_\mu (x^\rho T^{\mu\nu}) = g_\mu^\nu T^{\mu\rho} - g_\mu^\rho T^{\mu\nu} \quad (2.38)$$

soit encore

$$T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} = 0. \quad (2.39)$$

ce qui prouve que la conservation de  $J^{\mu,\nu\rho}$  a pour conséquence la symétrie de  $T^{\nu\rho}$ . Dans le cas général d'un champ qui n'est pas scalaire, la loi de transformation du champ sous le groupe de Lorentz  $\phi'(x') = \phi(x)$  doit être généralisée en  $\phi'_a(x') = S(\Lambda)_{ab} \phi_b(x)$  où  $S(\Lambda)$  est la matrice de la représentation considérée (spinorielle, vectorielle, ...), qui se réduit à l'identité dans le cas des champs scalaires. La structure du tenseur moment cinétique obtenu est alors de la forme

$$J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu\rho} \quad (2.40)$$

où  $\Delta^{\mu\nu\rho}$  est antisymétrique en  $\nu$  et  $\rho$ , et correspond à la contribution du moment cinétique intrinsèque, i.e du spin. Le tenseur canonique d'énergie-impulsion n'est alors plus symétrique dans le cas général d'un champ de spin arbitraire. Or le tenseur d'énergie-impulsion n'est pas défini de manière univoque : de façon plus générale, le courant  $j^\mu$  associé à une symétrie continue de l'action peut être modifié sans changer la charge associée.

### Exercice 2.1

Vérifier que le courant  $j'^\mu = j^\mu + \partial_\rho X^{\rho\mu}$  (où  $X^{\rho\mu}$  est un tenseur antisymétrique fonction des champs et des coordonnées d'espace-temps, supposé s'annuler rapidement à grande distance) est également conservé, et que les charges associées

## 2. Théorie classique des champs

à ces deux courants sont identiques.

Il est possible de préserver l'écriture (2.36) de la densité de moment cinétique du champ en fonction de la densité d'impulsion (*a priori* uniquement valable pour un champ scalaire), pour un champ de spin quelconque, en redéfinissant le tenseur énergie-impulsion. Le tenseur moment cinétique est alors également modifié, mais la relation entre ce tenseur modifié et la densité d'impulsion modifiée est la même que dans le cas scalaire. Il faut pour cela rendre le tenseur d'énergie-impulsion symétrique (on a vu en effet plus haut que c'est une condition nécessaire à la conservation du tenseur moment cinétique correspondant). Le tenseur d'énergie-impulsion obtenu porte le nom de tenseur de Belinfante.



# 3. Electrodynamique

Nous allons à présent utiliser le système d'unités de Heaviside-Lorentz, dans lequel la force de Coulomb est donnée par

$$F = \frac{QQ'}{4\pi r^2} \quad (3.1)$$

ce qui signifie que  $\varepsilon_0 = 1$  and  $\mu_0 = 1$ . De plus, nous nous placerons dans un système d'unités tel que  $c = 1$ . On lira avec intérêt l'appendice de Jackson<sup>1</sup> pour une discussion détaillée des différents systèmes d'unités.

## 3.1. Equations de Maxwell

### 3.1.1. Forme locale

Rappelons que les 4 équations de Maxwell s'écrivent sous forme locale de la façon suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.5)$$

La conservation locale des charges s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Forme intégrale

Les formes intégrales correspondant à ces 4 équations de Maxwell s'écrivent

---

1. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*.

### 3. Electrodynamique

- ◇ Théorème de Gauss : pour toute surface  $S$  entourant un volume  $V$ , on a

$$\iint_S \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \iiint_V \rho d^3x. \quad (3.7)$$

- ◇ Théorème d'Ampère Généralisée : pour toute courbe fermée  $C$  entourant une surface  $S$ ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d^2\vec{S}, \quad (3.8)$$

où  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est le courant de déplacement, qui était absent dans la formulation originelle du théorème d'Ampère.

- ◇ Absence de monopole magnétique :

pour toute surface fermée  $S$ ,

$$\iint_C \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0, \quad (3.9)$$

qui correspond au fait qu'il n'existe pas de monopole magnétique, par opposition avec le théorème de Gauss qui fait intervenir des charges électriques.

- ◇ Théorème d'induction de Faraday :

pour toute courbe fermée  $C$ , entourant une surface  $S$ ,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S}. \quad (3.10)$$

## 3.2. Formulation covariante de l'électrodynamique

Un point de l'espace-temps de Minkowski sera noté

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \quad (3.11)$$

et le 4-courant électrique sera noté

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}). \quad (3.12)$$

### 3.2.1. Le tenseur du champ électromagnétique et son dual

Sous forme covariante, le tenseur du champ électromagnétique (ou tenseur de Faraday) est un tenseur de rang (0, 2) antisymétrique, défini par

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^2 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

i.e.

$$F^{i0} = -F^{0i} = -F_{i0} = F_{0i} = E^i = -E_i, \quad (3.14)$$

$$F^{ij} = F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k = -\varepsilon_{ijk} B^k. \quad (3.15)$$

Réciproquement, le champ magnétique peut s'exprimer à l'aide du tenseur du champ électromagnétique, en partant de

$$\varepsilon_{ijk} F_{ij} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk'} B_{k'} = 2B_k \quad (3.16)$$

puisque  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'}$ . Ainsi,

$$B_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{ij} = -B^k. \quad (3.17)$$

Un second tenseur peut être construit à partir du tenseur  $F^{\mu\nu}$ , son dual. Pour le définir, on doit introduire le pseudo-tenseur 4-dimensionnel de Levi-Civita  $\varepsilon$  (voir Appendice D pour les détails). Ce tenseur est défini comme étant complètement antisymétrique, ses composantes contravariantes étant données par<sup>2</sup>

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } \{\mu\nu\rho\sigma\} \text{ est une permutation paire de } \{0,1,2,3\} \\ -1 & \text{si } \{\mu\nu\rho\sigma\} \text{ est une permutation impaire de } \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Comme  $\det g = -1$ , nous avons donc

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (3.19)$$

Le tenseur dual est alors défini par

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu} \quad (3.20)$$

---

2. Notons que cette définition n'est pas universelle. Certains auteurs utilisent cette définition pour les composantes covariantes, ce qui conduit à un tenseur opposé par rapport à la présente définition.

### 3. Electrodynamique

puisque  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est complètement antisymétrique.

Inversement,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}F_{\lambda\tau} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}F_{\lambda\tau} \\ &= \frac{1}{2}(-2)(g_{\mu}^{\lambda}g_{\nu}^{\tau} - g_{\mu}^{\tau}g_{\nu}^{\lambda})F_{\lambda\tau} = -2F_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (3.21)$$

et donc

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma} . \quad (3.22)$$

En conclusion, nous avons

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (3.23)$$

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma} . \quad (3.24)$$

Les composantes de  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  s'obtiennent facilement :

$$\tilde{F}^{0i} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0i\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} = B_i = -B^i , \quad (3.25)$$

et

$$\tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk0}F_{k0} = \varepsilon^{0ijk}F_{0k} = \varepsilon_{ijk}F_{0k} = \varepsilon_{ijk}E^k . \quad (3.26)$$

Ainsi,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

i.e.

$$\tilde{F}^{i0} = -\tilde{F}^{0i} = -\tilde{F}_{i0} = \tilde{F}_{0i} = B^i = -B_i , \quad (3.28)$$

$$\tilde{F}^{ij} = \tilde{F}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}E_k = \varepsilon_{ijk}E^k . \quad (3.29)$$

En outre, les deux tenseurs sont reliés par la transformation suivante :

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow[\vec{E} \rightarrow \vec{B}]{\vec{B} \rightarrow -\vec{E}} \tilde{F}^{\mu\nu} . \quad (3.30)$$

### 3.2.2. Transformations de Lorentz

Comme tout tenseur de rang  $(0, 2)$ ,  $F^{\mu\nu}$  se transforme sous une transformation de Lorentz  $\Lambda$  suivant

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} F^{\mu'\nu'}. \quad (3.31)$$

#### Transformations orthogonales

Considérons tout d'abord les transformations orthogonales de  $O(3)$ . Elles correspondent à des transformations particulières  $\Lambda$  de la forme

$$\Lambda^0_0 = 1 \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = 0 \quad \Lambda^i_j = O^i_j \quad (3.32)$$

i.e.

$$\Lambda = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & O & \\ 0 & & & \end{array} \right). \quad (3.33)$$

La matrice  $3 \times 3$   $O$  satisfait aux contraintes

$$O^t O = O O^t = \text{Id} \quad (3.34)$$

par définition de  $O(3)$ , qui est l'ensemble des matrices orthogonales réelles, qui de façon équivalente laissent le produit scalaire  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  invariant.

En prenant le déterminant de l'Eq. (3.34), on obtient

$$(\det O)^2 = 1 \quad (3.35)$$

de sorte que

- ◇ soit  $\det O = +1$  : donc  $O \in SO(3)$  (rotations)
- ◇ soit  $\det O = -1$  :  $O = R \cdot P$  où  $R \in SO(3)$  et  $P$  est la parité :  $P = -\text{Id}_{3 \times 3}$ .

De l'Eq. (3.34), on tire les relations suivantes entre les différentes composantes de  $O$  :

$$(O^t)^i_{j'} O^{j'}_j = O^{j'}_i O^{j'}_j = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad (O)^i_{j'} (O^t)^{j'}_j = O^i_{j'} O^j_{j'} = \delta_{ij}. \quad (3.36)$$

Considérons maintenant la façon dont les différentes composantes de  $F$  se transforment sous la transformation de Lorentz  $\Lambda$ .

### 3. Electrodynamique

◇ Champ électrique :

$$F'^{i0} = \Lambda^i_j \Lambda^0_0 F^{j0}, \quad (3.37)$$

de sorte que

$$E'^i = O^i_j E^j \quad (3.38)$$

comme attendu pour un vecteur : cette équation nous indique que  $\vec{E}$  se transforme un vecteur sous une rotation  $O = R \in SO(3)$ , et s'inverse, tout comme  $\vec{x}$ , sous la parité.

Ainsi

$\vec{E}$  est un vecteur (appelé également vecteur polaire).

◇ Champ magnétique :

$$F'^{ij} = \Lambda^i_{i'} \Lambda^j_{j'} F'^{i'j'}, \quad (3.39)$$

avec

$$F'^{ij} = -\varepsilon_{i'j'k'} B^{k'}. \quad (3.40)$$

Nous avons donc

$$B'^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F'^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} O^i_{i'} O^j_{j'} \varepsilon_{i'j'k'} B^{k'}. \quad (3.41)$$

En utilisant le fait que

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijn} \delta_{nk} \quad (3.42)$$

et

$$O^n_p O^k_p = \delta_{nk}, \quad (3.43)$$

voir l'Eq. (3.36), nous obtenons donc

$$\varepsilon_{ijk} O^i_{i'} O^j_{j'} = \varepsilon_{ijn} O^i_{i'} O^j_{j'} O^n_p O^k_p = \varepsilon_{i'j'p} O^k_p \det O, \quad (3.44)$$

puisque

$$\varepsilon_{ijn} O^i_{i'} O^j_{j'} O^n_p = \varepsilon_{i'j'p} \det O, \quad (3.45)$$

voir l'Appendice D. Finalement,

$$B'^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F'^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{i'j'p} \varepsilon_{i'j'k'} O^k_p B^{k'} \det O = \det O O^k_{k'} B^{k'}, \quad (3.46)$$

### 3.2. Formulation covariante de l'électrodynamique

puisque  $\varepsilon_{i'j'p}\varepsilon_{i'j'k'} = 2\delta_{pk'}$ .

En raison de la présence du préfacteur  $\det O$ , cette équation nous indique que  $\vec{B}$  se transforme un vecteur sous une rotation  $O = R \in SO(3)$ , et reste invariant sous la parité. Par conséquent,

$\vec{B}$  est un pseudo-vecteur (également appelé vecteur axial).

#### Boosts

On peut montrer, voir exercice, que sous un boost arbitraire dans la direction  $\vec{n}$  ( $\vec{n}^2 = 1$ ), i.e. de vitesse  $\vec{v} = \beta\vec{n}$ ,

$$\vec{E}' = (\vec{E} \cdot \vec{n})\vec{n} + \gamma \left[ \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{n})\vec{n} \right] + \gamma \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (3.47)$$

$$\vec{B}' = (\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{n} + \gamma \left[ \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{n} \right] - \gamma \vec{v} \wedge \vec{E}. \quad (3.48)$$

Dans la limite non relativiste ; les transformations (3.47) et (3.48) se simplifient en

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (3.49)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{E}, \quad (3.50)$$

qui sont particulièrement importants pour décrire les phénomènes d'induction.

#### 3.2.3. Invariants relativistes

A partir des tenseurs  $F$  et  $\tilde{F}$ , il est facile de construire deux invariants de Lorentz.

◇ Premièrement, considérons la contraction de  $F$  avec lui-même :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} \\ &= 2F_{0i}F^{0i} + \varepsilon_{ijk}B_k\varepsilon_{ijk'}B_{k'} \\ &= -2E^iE^i + 2B_kB_k \\ &= -2\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2 = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \end{aligned} \quad (3.51)$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho'\sigma'}F_{\rho'\sigma'} \\ &= \frac{1}{4}(-2)\left(g_{\rho}^{\rho'}g_{\sigma}^{\sigma'} - g_{\rho}^{\sigma'}g_{\sigma}^{\rho'}\right)F^{\rho\sigma}F_{\rho'\sigma'} = -F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

### 3. Electrodynamique

résultat identique (au signe près) à celui obtenu par contraction de  $F$  avec lui-même, voir l'expression (3.51) ci-dessus, résultat évident si l'on applique la symétrie (3.30) à l'expression (3.51).

◇ Deuxièmement, considérons la contraction de  $F$  avec  $\tilde{F}$  :

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \\
 &= \frac{1}{2}F_{ij}\varepsilon^{ijk0}F_{k0} + \frac{1}{2}F_{ij}\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \frac{1}{2}F_{0i}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} + \frac{1}{2}F_{i0}\varepsilon^{i0jk}F_{jk} \\
 &= -F_{ij}\varepsilon^{0ijk}F_{k0} + F_{0i}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} \\
 &= -F_{ij}\varepsilon_{ijk}F_{k0} + F_{0i}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \\
 &= 2F_{0i}\varepsilon_{ijk}F_{jk} = -4E^iB^i = -4\vec{E} \cdot \vec{B}.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

En conclusion, nous avons construit deux invariants relativistes à partir des deux tenseurs  $F$  et  $\tilde{F}$  :

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \tag{3.54}$$

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B}. \tag{3.55}$$

Notons que sous la transformation  $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ , le premier invariant (3.54) est inchangé, tandis que le second (3.55) devient opposé, en accord avec la propriété (3.30). En effet, l'invariant (3.54) est un *scalaire* de Lorentz, alors que l'invariant (3.55) est une *pseudo-scalaire* de Lorentz (puisque  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur).

## 3.3. Forme covariante des équations de Maxwell

### 3.3.1. Equations de Maxwell

Nous allons maintenant montrer que les quatre équations de Maxwell (3.2) peuvent se résumer à l'ensemble très élégant suivant de deux équations, qui sont explicitement covariantes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{3.56}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.57}$$



### 3.3. Forme covariante des équations de Maxwell

*Preuve :*

◇ Théorème de Gauss :

$$\partial_i F^{i0} = j^0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (3.58)$$

◇ Théorème de Maxwell-Ampère généralisé :

$$\partial_0 F^{0k} + \partial_i F^{ik} = j^k \quad (3.59)$$

avec

$$F^{ik} = -\varepsilon_{ikn} B^n \text{ and } F^{0k} = -E^k \quad (3.60)$$

de sorte que

$$-\partial_t \vec{E}^k - \varepsilon_{ikn} \vec{\nabla}^i B^n = \left( -\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right)^k = j^k \quad (3.61)$$

i.e.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}. \quad (3.62)$$

◇ Absence de monopole magnétique :

$$\partial_i \tilde{F}^{i0} = 0 \Leftrightarrow \partial_i B^i = 0 \Leftrightarrow \text{div} \vec{B} = 0. \quad (3.63)$$

◇ Théorème de Maxwell-Faraday :

$$\partial_0 \tilde{F}^{0k} + \partial_i \tilde{F}^{ik} = 0. \quad (3.64)$$

avec

$$\tilde{F}^{ik} = \varepsilon_{ikn} E^n \text{ et } \tilde{F}^{0k} = -B^k \quad (3.65)$$

et donc

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.66)$$

Condition de compatibilité :

Le tenseur du champ  $F^{\mu\nu}$  est antisymétrique, ainsi

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 = \partial_\nu j^\nu, \quad (3.67)$$

ce qui signifie que le courant doit être conservé :

$$\boxed{\partial_\nu j^\nu = 0.} \quad (3.68)$$

### 3.3.2. Quadripotentiel

De  $F^{\mu\nu}$  à  $A^\mu$

Plusieurs remarques peuvent être faites :

- ◇ Les équations de Maxwell, exprimées à l'aide des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , ne sont pas covariantes.
- ◇ Elles ne font intervenir que des dérivées du premier ordre des variables dynamiques  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . En conséquence, leurs moments conjugués ne sont pas indépendants des variables dynamiques<sup>3</sup>.

On doit donc plutôt rechercher des équations du second ordre.

Introduisons donc le *quadri-potentiel*  $A^\mu$  tel que

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad (3.69)$$

Théorème (Poincaré) :

L'équation  $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$  est une condition nécessaire pour que  $A^\mu$  existe. Ceci est une condition suffisante si l'espace est contractile, ce qui signifie qu'il peut être contracté en un point, de manière continue.

*Preuve :*

Nous allons nous contenter de vérifier que la condition est nécessaire.

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = 0 \quad (3.70)$$

où l'on a utilisé le fait que chacun des deux termes fait respectivement intervenir un tenseur symétrique en  $\mu \leftrightarrow \rho$  et en  $\sigma \leftrightarrow \rho$ , contracté avec le tenseur  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  qui est complètement antisymétrique.

L'Eq. (3.69) implique que

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.71)$$

et

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i \quad (3.72)$$

---

3. Considérer par exemple le cas trivial  $\mathcal{L} = \dot{\phi}\phi$ , action dans laquelle  $\phi$  n'apparaît pas de façon quadratique.

### 3.3. Forme covariante des équations de Maxwell

i.e.

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\partial^i A^j - \partial^j A^i) = -\varepsilon_{ijk}\partial^i A^j = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^k \quad (3.73)$$

et donc

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.74)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad (3.75)$$

ce qui est bien en accord avec les relations bien connues entre champs électrique et magnétique et potentiels scalaire et vectoriel.

#### Invariance de jauge

La relation (3.69) ne conduit pas à un choix unique pour le 4-potential  $A^\mu$ .

En effet, la transformation de *jauge*

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \phi, \quad (3.76)$$

où  $\phi$  est une fonction arbitraire, laisse  $F^{\mu\nu}$  invariant.

En supposant le domaine d'espace-temps contractile, les équations de Maxwell sont équivalentes à

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu. \quad (3.77)$$

L'équation

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad (3.78)$$

est invariante de jauge, puisque sous une transformation de jauge (3.76), nous avons

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) \rightarrow \square A^\nu + \partial^\nu \square \phi - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) - \partial^\nu \square \phi = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu). \quad (3.79)$$

Ecrivons maintenant explicitement les différentes composantes des équations de Maxwell (3.78) :

◇ Composante temporelle :

$$\square A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial A^0}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right] = \rho, \quad (3.80)$$

### 3. Electrodynamique

i.e.

$$\boxed{-\Delta A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \rho.} \quad (3.81)$$

◇ Composantes spatiales :

$$\boxed{\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left( \frac{\partial A^0}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right) = \vec{j}.} \quad (3.82)$$

#### Jauges usuelles

Il existe un ensemble infini de choix de jauges possibles. Les plus courantes sont :

◇ Jauge de Lorenz-Landau

Elle s'appuie sur la condition de fixation de jauge covariante

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (3.83)$$

qui implique donc que

$$\square A^\nu = j^\nu. \quad (3.84)$$

On notera que cette fixation de jauge est incomplète : en effet toute transformation de jauge décrite par une fonction scalaire  $\phi$  satisfaisant à l'équation d'onde  $\square \phi = 0$  satisfait à la condition de Lorenz-Landau.

◇ Jauge de Coulomb

Elle repose sur une condition de fixation de jauge non-covariante :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (3.85)$$

ce qui implique que le potentiel scalaire  $A^0$  satisfait l'équation de Poisson

$$-\Delta A^0 = \rho. \quad (3.86)$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre est donnée par

$$A^0(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(t, \vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} \quad (3.87)$$

### 3.3. Forme covariante des équations de Maxwell

puisque

$$-\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.88)$$

Dans cette jauge,  $A^0$  est donc un potentiel instantané. Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est donc, d'après l'Eq. (3.82), solution de l'équation

$$\square \vec{A} = \vec{j} - \vec{\nabla} \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\partial \rho(t, \vec{x}')}{\partial t} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (3.89)$$

On notera la cohérence avec le fait que le courant doit être conservé :

$$\text{div} \square \vec{A} = \text{div} \vec{j} - \Delta \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\partial \rho(t, \vec{x}')}{\partial t} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.90)$$

$$= \text{div} \vec{j} + \int d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') \frac{\partial \rho(t, \vec{x}')}{\partial t} \quad (3.91)$$

$$= \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} = 0, \quad (3.92)$$

ce qui est donc cohérent avec notre choix de jauge  $\text{div} \vec{A} = 0$ .

#### ◇ Jauge temporelle

Dans cette jauge, on impose au potentiel scalaire d'être nul :

$$A^0 = 0. \quad (3.93)$$

#### ◇ Jauge axiale

Dans cette jauge, fixée par le choix d'une direction de genre espace, par exemple  $z$ ,

$$A^3 = 0. \quad (3.94)$$

#### ◇ Jauge du cône de lumière

Cette jauge, particulièrement utile en physique des particules à haute énergie, est spécifiée en choisissant un vecteur sur le cône de lumière  $n$  avec  $n^2 = 0$ , de sorte que

$$A \cdot n = 0. \quad (3.95)$$

#### ◇ Jauge axiale quelconque : elle inclut les trois cas précédents, en introduisant un vecteur $n$ , et en imposant

$$A \cdot n = 0. \quad (3.96)$$

Clairement,  $n^2 > 0$  est une jauge temporelle,  $n^2 < 0$  est une jauge axiale, et  $n^2 = 0$  est une jauge sur le cône de lumière.

### 3.4. Lagrangien pour les photons

Nous cherchons à écrire un lagrangien décrivant les degrés de liberté des photons. Il doit être local, quadratique dans le champ  $A^\mu$  et ses dérivées, invariant de Lorentz, et ses équations de mouvement doivent être données par (3.78). Ecrivons donc génériquement

$$\mathcal{L}(x) = a A^\mu A_\mu + b (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + c (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + d (\partial_\mu A^\mu)^2 + e A_\mu j^\mu. \quad (3.97)$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A^\rho)} = 0 \quad (3.98)$$

ce qui conduit à

$$2aA_\rho + ej_\rho = \partial_\sigma [2b \partial_\rho A^\sigma + 2c \partial^\sigma A_\rho + 2d \delta_\rho^\sigma \partial_\mu A^\mu] \quad (3.99)$$

Étudions l'invariance de jauge de l'équation du mouvement pour  $j = 0$  : sous la transformation de jauge (3.76), nous obtenons

$$a \partial_\rho \phi = b \partial_\rho \partial_\sigma \partial^\sigma \phi + c \partial_\rho \partial_\sigma \partial^\sigma \phi + d \partial_\rho \partial_\sigma \partial^\sigma \phi = (b + c + d) \partial_\rho \square \phi, \quad (3.100)$$

de sorte que nous devons avoir  $a = 0$  et  $b + c + d = 0$ .

De plus, en réécrivant le terme  $(\partial_\mu A^\mu)^2$  dans la densité du Lagrangien comme suit

$$(\partial_\mu A^\mu)^2 = (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \partial_\mu [A_\nu (g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu)], \quad (3.101)$$

et en utilisant le fait que le second terme du membre de droite est une dérivée totale, qui ne contribue donc pas à l'action, il peut être simplement omis. En utilisant le fait que  $b + d = -c$ , nous obtenons

$$\mathcal{L} = -c (\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu) + e A_\mu j^\mu. \quad (3.102)$$

Par ailleurs, comme

$$\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.103)$$

la densité du Lagrangien s'écrit donc

$$\mathcal{L} = \frac{c}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e A_\mu j^\mu. \quad (3.104)$$

Il reste à ajuster correctement les valeurs de  $c$  et  $e$ .

Revenons à l'équation du mouvement (3.98). En utilisant le fait que

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A^\rho)} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 4F^\sigma{}_\rho, \quad (3.105)$$

on obtient

$$4\frac{c}{2}\partial_\sigma F^\sigma{}_\rho = e j_\rho \quad (3.106)$$

de sorte que pour que cette équation soit équivalente à l'équation de Maxwell (3.56), on doit avoir  $2c = e$ .

En fait, la normalisation globale, ainsi que la valeur relative de  $c$  et  $e$  peuvent être obtenues comme suit :

◇  $\vec{A}$  est une variable dynamique. Ainsi, le terme "cinétique" doit être

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 \quad (3.107)$$

dans  $\mathcal{L}$ . Maintenant, par inspection

$$\frac{c}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.108)$$

conduit à

$$\frac{c}{2} \times 2 \times F^{0i} F_{0i} = c \partial^0 A^i \partial_0 A_i = -c (\partial_0 A^i)^2 \quad (3.109)$$

de sorte que  $c = -\frac{1}{2}$ .

◇ Dans la densité lagrangienne  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$  où  $\mathcal{T}$  est l'énergie cinétique et  $\mathcal{U}$  est l'énergie potentielle, nous savons que  $\mathcal{U}$  doit contenir l'énergie potentielle  $\rho A^0$ , exactement sous cette forme. De plus,  $j^\mu A_\mu$  fournit exactement  $\rho A^0$ , de sorte que  $e = -1$ .

En conclusion,

$$\boxed{\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu,} \quad (3.110)$$

et l'action correspondante s'écrit

$$\boxed{I = \int \mathcal{L}(x) d^4x = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho A^0 + \vec{j} \cdot \vec{A} \right].} \quad (3.111)$$

### 3. Electrodynamique

Il faut noter que la densité lagrangienne (3.110) n'est pas invariante de jauge si  $j(x)$  est un courant externe. En effet, sous une transformation de jauge,

$$\mathcal{L}(x) \xrightarrow{A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \phi} \mathcal{L}(x) - j_\mu \partial^\mu \phi. \quad (3.112)$$

Néanmoins,

$$j_\mu \partial^\mu \phi = \partial^\mu (\phi j_\mu) - \phi \partial^\mu j_\mu \quad (3.113)$$

dans laquelle, dans le membre de droite, le premier terme est une dérivée totale et le second s'annule car  $j_\mu$  est un courant conservé. Par conséquent, les deux termes peuvent être omis de l'action  $I$ .



# 4. L'équation de Klein-Gordon

Dans ce chapitre, notre objectif est d'écrire une équation relativiste décrivant une particule massive de spin 0. Entre temps, nous verrons qu'une telle description conduit naturellement à des états d'énergie négative, qui se révéleront être des solutions de densité de probabilité négatives. Ces états seront réinterprétés comme des antiparticules.

## 4.1. Rappel : mécanique quantique non relativiste

### 4.1.1. Principe de correspondance et équation de Schrödinger

Nous commençons par la façon dont l'équation de Schrödinger peut être obtenue à partir du principe de correspondance. En partant de l'équation de dispersion non relativiste

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (4.1)$$

et en effectuant le remplacement, en suivant le principe de correspondance,

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}, \quad (4.3)$$

nous obtenons

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (4.4)$$

qui est l'équation de Schrödinger pour une particule libre.

### 4.1.2. Courant de probabilité

La densité de probabilité

$$\boxed{\rho = |\psi|^2} \quad (4.5)$$

#### 4. L'équation de Klein-Gordon

signifie physiquement que

$$d^3P = |\psi|^2 d^3V \quad (4.6)$$

est la probabilité de trouver une particule dans le volume élémentaire  $d^3V$  ..

D'une part, en partant de l'équation de Schrödinger (4.4), multipliée par  $\psi^*$ , et d'autre part en écrivant son conjugué complexe, multiplié par  $\psi$ , on obtient respectivement

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\Delta\psi = i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi\Delta\psi^* = -i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \quad (4.8)$$

d'où par soustraction

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*) = i\hbar\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right] \quad (4.9)$$

de sorte que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*) \quad (4.10)$$

i.e., puisque  $\Delta = \vec{\nabla}^2$ ,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\psi^*) = \frac{i\hbar}{2m}\vec{\nabla} \cdot (\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \quad (4.11)$$

qui s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad (4.12)$$

avec le courant de probabilité, également appelé densité de flux de probabilité, donné par

$$\boxed{\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)} \quad (4.13)$$

L'Eq. (4.12) exprime la conservation locale de la probabilité. Le point de vue global est obtenu par intégration sur un volume donné  $V$  : l'augmentation de la probabilité pour les particules d'être à l'intérieur de  $V$ , de frontière  $S$ , est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d^3V = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3V = - \iint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \quad (4.14)$$

où nous avons utilisé le théorème de Green-Ostrogradsky dans la dernière étape. L'équation (4.14) indique simplement que cette augmentation est égale à l'inverse du flux de particules hors du volume  $V$ , c'est-à-dire à travers  $S$ .

Une solution de type onde plane de l'équation de Schrödinger (4.4)

$$\psi = N e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}, \quad (4.15)$$

qui décrit une particule libre de moment  $\vec{p}$  et d'énergie  $E$  a donc une densité de probabilité et un courant

$$\rho = |N|^2, \quad (4.16)$$

$$\vec{j} = \frac{\vec{p}}{m}|N|^2 = \vec{v}|N|^2. \quad (4.17)$$

## 4.2. L'équation de Klein-Gordon

### 4.2.1. A la recherche d'une équation relativiste linéaire

L'équation de Schrödinger (4.4) viole explicitement la covariance de Lorentz. En relativité, nous pouvons écrire

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (4.18)$$

and thus

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (4.19)$$

si l'on cherche une équation du premier ordre, dans l'esprit de l'équation de Schrödinger, la règle de correspondance conduirait donc à écrire

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4} \psi = mc^2 \left( 1 - \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \Delta + \dots \right) \psi. \quad (4.20)$$

Cette équation est très non-locale, à cause de la racine carrée, et la symétrie entre  $ct$  et  $\vec{x}$  est complètement cachée.

### 4.2.2. Equation différentielle du second ordre

En renonçant à ces équations du premier ordre<sup>1</sup>, et en écrivant l'opérateur de quadri-impulsion comme<sup>2</sup>

$$p^\mu = \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right) = i\hbar \partial^\mu, \quad (4.21)$$

1. Une telle tentative a du sens lorsqu'on cherche une équation relativiste décrivant une particule de spin  $1/2$  : c'est l'essence même de la construction de l'équation de Dirac historiquement.

2. En effet  $\vec{\nabla} = \partial_i = -\partial^i$ .

#### 4. L'équation de Klein-Gordon

l'équation de dispersion quadratique (4.18) conduit, en utilisant le principe de correspondance, à

$$[-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu - m^2 c^2] \Phi = 0 \quad (4.22)$$

i.e.

$$\left[ \partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(x) = 0 \quad (4.23)$$

ou de façon équivalente, en posant  $c = \hbar = 1$ ,

$$\boxed{[\square + m^2] \Phi(x) = 0}, \quad (4.24)$$

qui porte le nom d'équation de Klein-Gordon.

Cette équation satisfait à la covariance de Lorentz puisque sous une transformation  $x' = \Lambda x$ , avec  $\phi'(x') = \phi(x)$ , l'Eq. (4.24) devient

$$[\square' + m^2] \Phi'(x') = 0, \quad (4.25)$$

puisque  $\square' = \partial'^\mu \partial'_\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \square$ , comme tout opérateur scalaire.

#### 4.2.3. Limite non relativiste

Afin d'étudier la limite classique (c'est-à-dire non relativiste), extrayons l'énergie de masse dans la dépendance temporelle de la fonction d'onde. Nous écrivons pour cela

$$\Phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \Psi(t, \vec{x}), \quad (4.26)$$

et donc

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - i \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} \right] \Psi(t, \vec{x}) = 0. \quad (4.27)$$

Dans la limite  $c \rightarrow \infty$ , en négligeant le premier terme, cette équation se simplifie en

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \vec{x}), \quad (4.28)$$

qui est bien l'équation de Schrödinger, comme attendu.

## 4.3. Equation de Klein-Gordon et action d'un champ scalaire

A titre de remarque discursive, montrons que l'équation de Klein-Gordon est l'équation du mouvement pour un champ scalaire libre. Considérons le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2. \quad (4.29)$$

Son équation de mouvement peut être facilement obtenue : en réécrivant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2, \quad (4.30)$$

on a

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} = -m^2 \Phi \quad (4.31)$$

et

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi} = \partial^\mu \Phi. \quad (4.32)$$

En effet,  $\mu$  et  $\nu$  sont des indices muets, et il ne faut donc pas omettre de différencier les deux termes de l'Eq. (4.30). Ceci conduit finalement à l'équation du mouvement

$$\left[ \partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(x) = 0 \quad (4.33)$$

qui est bien l'équation de Klein-Gordon.

## 4.4. Contenu physique

### 4.4.1. Densité et courant de probabilité

Construisons un quadri-courant conservé qui étend la densité de probabilité (4.16) et la densité de courant (4.17) au cas relativiste. Partant de l'équation de Klein-Gordon

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right] \Phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Phi = 0, \quad (4.34)$$

#### 4. L'équation de Klein-Gordon

et en multipliant par  $i\Phi^*$ , nous obtenons

$$\frac{1}{c^2}i\Phi^*\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - i\Phi^*\vec{\nabla}^2\Phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}i\Phi^*\Phi = 0, \quad (4.35)$$

tandis qu'en considérant le conjugué complexe de l'équation de Klein-Gordon (4.34) multiplié par  $i\Phi$ , on obtient

$$\frac{1}{c^2}i\Phi\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial t^2} - i\Phi\vec{\nabla}^2\Phi^* + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}i\Phi\Phi^* = 0, \quad (4.36)$$

de sorte que la soustraction des Eqs. (4.35, 4.36) conduit à

$$\frac{1}{c^2}i\left(\Phi^*\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Phi\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial t^2}\right) - i\left(\Phi^*\vec{\nabla}^2\Phi - \Phi\vec{\nabla}^2\Phi^*\right) = 0, \quad (4.37)$$

ou de façon équivalente

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left[i\left(\Phi^*\frac{\partial\Phi}{c\partial t} - \Phi\frac{\partial\Phi^*}{c\partial t}\right)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[-i\left(\Phi^*\vec{\nabla}\Phi - \Phi\vec{\nabla}\Phi^*\right)\right] = 0, \quad (4.38)$$

i.e.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0, \quad (4.39)$$

où

$$\rho = \frac{i\hbar}{c^2}\left(\Phi^*\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Phi\frac{\partial\Phi^*}{\partial t}\right), \quad (4.40)$$

$$\vec{j} = -i\hbar\left(\Phi^*\vec{\nabla}\Phi - \Phi\vec{\nabla}\Phi^*\right). \quad (4.41)$$

L'équation (4.39) reflète simplement la conservation de la probabilité si (4.40) et (4.41) doivent être interprétés respectivement comme les densités relativistes de probabilité et de courant de probabilité.

En introduisant le quadri-courant

$$j^\mu = \left(\rho c, \vec{j}\right), \quad (4.42)$$

qui a pour expression covariante

$$j^\mu = i\hbar(\Phi^*\partial^\mu\Phi - \Phi\partial^\mu\Phi^*), \quad (4.43)$$

la conservation de probabilité (4.39) qui s'écrit

$$\frac{\partial}{c\partial t}c\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0, \quad (4.44)$$

peut s'exprimer sous la forme covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.45)$$

Notez que le fait que  $\rho$  soit la composante temporelle d'un quadrivecteur est cohérent avec le fait que  $\rho d^3V$  est la probabilité qu'une particule se trouve dans le volume  $d^3V$ . Sous une impulsion du facteur de Lorentz  $\gamma$ ,  $d^3V$  est contracté de Lorentz d'un facteur de  $1/\gamma$ , ce qui est compensé par le fait que  $\rho$  est dilaté d'un facteur de  $\gamma$  comme toute composante temporelle d'un quadrivecteur, de sorte que la probabilité est effectivement invariante<sup>3</sup>.

#### 4.4.2. Limite non relativiste

Vérifions que les densités de probabilité et de courant de probabilité relativistes se réduisent aux expressions non relativistes (4.5) et (4.13) respectivement. En présentant à nouveau la fonction d'onde sous la forme (4.26), nous obtenons

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[ -i\frac{mc^2}{\hbar} 2\Psi^*\Psi + (\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*) \right], \quad (4.46)$$

$$j^i = -\frac{i\hbar}{2m} [\Psi^*\nabla^i\Psi - \Psi\nabla^i\Psi^*]. \quad (4.47)$$

Le courant de probabilité (4.47) a déjà la forme appropriée (4.13). En ce qui concerne  $\rho$ , puisque le terme entre parenthèses dans l'Eq. (4.46) est égal à  $-2i\Psi\Psi^*(E - mc^2)/\hbar$ , il est négligeable par rapport au premier terme (énergie de repos) dans la limite  $c \rightarrow \infty$ , de sorte que  $\rho$  se réduit à l'expression non-relativiste (4.5), comme prévu.

#### 4.4.3. Spectre d'énergie et densité de probabilité

Considérons une solution en onde plane<sup>4</sup>

$$\Phi = Ne^{-ip \cdot x}. \quad (4.48)$$

Nous obtenons donc, d'après l'Eq. (4.43),

$$j^\mu = 2p^\mu |N|^2. \quad (4.49)$$

---

3. L'argument est le même que celui de la fin du chapitre 1 lorsque nous avons introduit le concept de quadricourant de charge, voir 1.3.5.

4. Nous utilisons les unités naturelles  $c = 1$  et  $\hbar = 1$ .

#### 4. L'équation de Klein-Gordon

Cela semble très simple et élégant. Cependant, en substituant la solution en onde plane (4.48) dans l'équation de Klein-Gordon (4.24), nous obtenons la relation de dispersion

$$p^2 = m^2 \quad i.e. \quad E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (4.50)$$

de sorte que nous rencontrons deux problèmes très sérieux :

- il existe des solutions à énergie négative, et le spectre d'énergie n'est pas borné inférieurement, de sorte que sous une perturbation arbitraire, le système pourrait fournir une quantité arbitraire d'énergie à l'extérieur.

- la densité de probabilité étant proportionnelle à l'énergie, les solutions à énergie négative ont des densités de probabilité négatives !

Le problème est très sérieux puisque tout traitement cohérent d'un système physique nécessite de traiter un ensemble complet d'états, comme nous avons l'habitude de le faire en mécanique quantique, ce qui interdit de se limiter aux solutions d'énergies négatives.

#### 4.4.4. Courant de charge et réinterprétation des solutions d'énergie négative

Il s'avère que la multiplication du courant (4.43) par la charge élémentaire  $-e$  permet d'échapper aux deux problèmes précédents. Considérons en effet le courant

$$j^\mu = -ie (\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*) . \quad (4.51)$$

La densité correspondante  $\rho = j^0$  est maintenant la densité de charge, et non plus la densité de probabilité. En laissant de côté les effets de spin, utilisons l'équation de Klein-Gordon comme une équation relativiste décrivant les "électrons". Les effets de spin nécessitent l'introduction de l'équation de Dirac, qui ne sera pas abordée dans ce cours.

Considérons une onde plane (4.48). Pour un électron  $e^-$ , de charge  $-e$ , d'énergie  $E$  et de quantité de mouvement  $\vec{p}$ , on obtient, en utilisant la définition (4.51) du courant de charge,

$$j^\mu(e^-) = -2e|N|^2(E, \vec{p}). \quad (4.52)$$

Par ailleurs, pour un positron  $e^+$ , de charge  $+e$ , d'énergie  $E$  et de moment  $\vec{p}$ , on obtient, en utilisant la définition (4.51) du courant de charge,

$$j^\mu(e^+) = +2e|N|^2(E, \vec{p}) = -2e|N|^2(-E, -\vec{p}). \quad (4.53)$$



Cette dernière manipulation algébrique peut sembler quelque peu maladroite et triviale. Cependant, elle signifie simplement qu'il n'est pas nécessaire d'introduire les degrés de liberté du positron : ils sont déjà présents dans l'équation de Klein-Gordon, puisque selon l'identité précédente, un positron d'énergie  $E$  et de moment  $\vec{p}$  est identique à un électron d'énergie *négative*  $-E$ , de moment  $-\vec{p}$ , c'est-à-dire se propageant en arrière dans le temps.

De manière imagée, on peut donc dessiner

$$\begin{array}{ccc}
 \xrightarrow{\hspace{10em}} & & \\
 \text{time} & & \\
 & & (4.54) \\
 \xrightarrow{\hspace{2em}} & = & \xleftarrow{\hspace{2em}} \\
 e^+ & & e^- \\
 E > 0 & & (-E) < 0
 \end{array}$$

Du point de vue de l'évolution temporelle d'une fonction d'onde en mécanique quantique, cela repose sur le fait que la partie dépendant du temps d'une particule libre se déplaçant suivant le sens normal d'écoulement du temps, d'énergie  $E$ , est la même que celle d'une particule libre d'énergie  $-E$  se propageant en remontant le temps, puisque

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}. \quad (4.55)$$

#### 4.4.5. Le courant de charge revisité

Considérons à nouveau le lagrangien (4.29) d'un champ scalaire, en supposant maintenant que le champ est complexe :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi. \quad (4.56)$$

Cela signifie que  $\Phi$  et  $\Phi^*$  doivent être considérés comme des champs indépendants. Leurs deux équations de mouvement se lisent donc

$$\left[ \partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(x) = 0 \quad (4.57)$$

et

$$\left[ \partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi^*(x) = 0. \quad (4.58)$$

#### 4. L'équation de Klein-Gordon

De toute évidence, le lagrangien (4.56), et donc l'action correspondante, sont invariants sous les transformations de jauge dites globales

$$\Phi \rightarrow e^{ie\alpha}\Phi \quad (4.59)$$

$$\Phi^* \rightarrow e^{-ie\alpha}\Phi^* \quad (4.60)$$

où  $e$  est un paramètre arbitraire, qui a la signification physique de la charge électrique élémentaire, en raison de son rôle dans le courant de charge conservée que nous allons maintenant construire.

Calculons le courant de Noether associé à cette transformation. Nous considérons les versions infinitésimales des transformations (4.59-4.60)

$$\delta\Phi = ie\delta\alpha\Phi \quad (4.61)$$

$$\delta\Phi^* = -ie\delta\alpha\Phi^* \quad (4.62)$$

avec  $\delta x = 0$ . Par conséquent, selon l'Eq. (2.16), et en utilisant le fait que

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi)} = \partial^\mu\Phi^*, \quad (4.63)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi^*)} = \partial^\mu\Phi \quad (4.64)$$

nous obtenons

$$j^\mu = \partial^\mu\Phi^*(ie\delta\alpha\Phi) - \partial^\mu\Phi(-ie\delta\alpha\Phi^*) \quad (4.65)$$

valable pour tout  $\delta\alpha$ , qui peut donc être factorisé, de sorte que le quadruple courant électromagnétique

$$j^\mu = -ie(\Phi^*\partial^\mu\Phi - \Phi\partial^\mu\Phi^*) \quad (4.66)$$

est conservé. Nous avons donc retrouvé, à partir d'un principe de symétrie globale, le courant (4.51) qui avait été obtenu de manière heuristique.

# 5. Couplage entre la matière et le champ électromagnétique

## 5.1. Partie matière

Considérons deux champs scalaires réels  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , de masses identiques. Les densités lagrangiennes pour ces deux champs sont

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_1) - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2. \quad (5.2)$$

Introduisons les champs

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1 + i \Phi_2], \quad (5.3)$$

$$\Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1 - i \Phi_2] \quad (5.4)$$

qui sont traités comme des champs indépendants. On a alors

$$|\Phi|^2 = \Phi \Phi^* = \frac{1}{2} [\Phi_1^2 + \Phi_2^2] \quad (5.5)$$

et

$$|\partial_\mu \Phi|^2 = (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi)^* \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_1 + i \partial_\mu \Phi_2) (\partial^\mu \Phi_1 - i \partial^\mu \Phi_2) \quad (5.7)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_1) (\partial^\mu \Phi_1) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_2) (\partial^\mu \Phi_2). \quad (5.8)$$

Ainsi,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  peut être réécrit comme

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi)^* - m^2 \Phi \Phi^*. \quad (5.9)$$

## 5. Couplage entre la matière et le champ électromagnétique

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Phi)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square \Phi^* + m^2 \Phi^* = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Phi^*)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square \Phi + m^2 \Phi = 0. \quad (5.11)$$

Comme nous l'avons vu dans le Chap. 4, sous une transformation globale  $U(1)$

$$\Phi \rightarrow e^{ie\alpha} \Phi \quad i.e. \delta\Phi = ie\delta\alpha\Phi, \quad (5.12)$$

$$\Phi^* \rightarrow e^{-ie\alpha} \Phi^* \quad i.e. \delta\Phi^* = -ie\delta\alpha\Phi^*, \quad (5.13)$$

le Lagrangien  $\mathcal{L}$  est invariant, ce qui implique qu'il existe un courant de Noether conservé, à savoir

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{1}{\delta\alpha} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \delta\Phi^* \right] \\ &= ie [(\partial^\mu \Phi^*)\Phi - (\partial^\mu \Phi)\Phi^*] \\ &= -ie [\Phi^*(\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*)\Phi] \\ &= -ie \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi. \end{aligned} \quad (5.14)$$

On peut ajouter un terme potentiel à  $\mathcal{L}$ , de la forme  $V(\Phi^*\Phi)$ , sans briser l'invariance de jauge, de sorte que l'on écrira

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \mathcal{L}_{\text{free}} - V(\Phi^*\Phi). \quad (5.15)$$

Un exemple minimal est  $V = \lambda(\Phi^*\Phi)^2$ . Avec une telle modification, les équations du mouvement sont alors les suivantes

$$\square \Phi^* + m^2 \Phi^* = -\frac{\partial V}{\partial \Phi}, \quad (5.16)$$

$$\square \Phi + m^2 \Phi = -\frac{\partial V}{\partial \Phi^*}. \quad (5.17)$$

Evidemment, puisque  $\mathcal{L}_{\text{matter}}$  et  $\mathcal{L}_{\text{free}}$  ne diffèrent que par des puissances de  $\Phi^*\Phi$ , le courant de Noether (5.14) reste identique.

## 5.2. Partie purement photonique

Nous avons montré dans le chapitre 3 que le Lagrangien décrivant la dynamique des photons s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.18)$$

## 5.3. Interaction entre matière et photons

### 5.3.1. Lagrangien minimal à partir d'un courant dynamique

Nous savons que l'on peut ajouter un terme  $-j^\mu A_\mu$ , de sorte que l'équation du mouvement pour  $A_\mu$  mène aux équations de Maxwell. Ce faisant, nous rencontrons immédiatement un problème technique : en effet, ceci est valable pour  $j_\mu$  étant considéré comme externe, non dynamique, mais que se passe-t-il si  $j^\mu$  est considéré comme dynamique, étant lui-même construit à partir de champs dynamiques ?

Nous avons déjà un candidat pour commencer :

$$-j_{\text{Noether}}^\mu A_\mu = ie \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi A_\mu . \quad (5.19)$$

Mais ce nouveau terme du Lagrangien, qui fait maintenant intervenir des dérivées des champs  $\Phi$  et  $\Phi^*$ , va modifier le courant de Noether lui-même, de sorte que ce terme supplémentaire devrait être lui-même modifié, changeant le courant, etc. Diable, entrerions-nous dans une boucle sans fin ?

Montrons que l'on peut trouver une solution minimale et cohérente à cette difficulté. Pour cela, nous écrivons

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{int}} . \quad (5.20)$$

Formulons le problème de manière plus précise.

◇ Les équations d'Euler-Lagrange appliquée à  $\mathcal{L}$  pour le champ  $A^\mu$

$$\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A^\rho)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\rho} \quad (5.21)$$

devraient conduire aux équations de Maxwell. Deux remarques s'imposent alors :

- Puisque la dynamique de  $A^\mu$  (sa dérivée temporelle, et par covariance n'importe laquelle de ses dérivées) est à l'intérieur de  $\mathcal{L}_{\text{em}}$ , seule  $\mathcal{L}_{\text{em}}$  contribue au membre de gauche de l'Eq. (5.21).

- le membre de droite de l'Eq. (5.21) reçoit seulement des contributions de  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ .

## 5. Couplage entre la matière et le champ électromagnétique

Ainsi, l'Eq. (5.21) s'écrit en fait

$$\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial (\partial_\sigma A^\rho)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial A^\rho}, \quad (5.22)$$

ou de façon équivalente

$$-\partial_\sigma F^\sigma{}_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial A^\rho} = -J_\rho \quad (5.23)$$

où  $J_\rho$  est le courant de Noether *complet*, puisque les équations de Maxwell avec ce courant doivent être vérifiées.

◇ Le courant de Noether complet est donné par

$$J^\mu = \frac{1}{\delta\alpha} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \delta\Phi^* \right] \quad (5.24)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} J^\mu = & ie \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \Phi - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \Phi^* \right] \\ & + ie \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \Phi - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \Phi^* \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dans cette expression, la première partie, qui vient de  $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ , est le courant

$$j^\mu = -ie \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}{}^\mu \Phi, \quad (5.26)$$

voir Eq. (5.14), qui est bien sûr indépendant de  $A^\mu$ .

Notre problème est donc de rechercher  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ , solution des équations couplées (5.23) et (5.25). Nous recherchons une solution minimale (le problème n'a en soi pas de solution unique).

Tout d'abord, intégrons l'Eq. (5.23) par rapport à  $A^\rho$  : en séparant le terme  $-j^\mu A_\mu$  de  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ , nous pouvons écrire

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu A_\mu + \mathcal{L}'_{\text{int}} = ie \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}{}^\mu \Phi A_\mu + \mathcal{L}'_{\text{int}}. \quad (5.27)$$

Faisons maintenant une hypothèse minimale : cherchons une solution avec  $\mathcal{L}'_{\text{int}}$  indépendante de  $\partial_\mu \Phi$  et  $\partial_\mu \Phi^*$ .

Ainsi,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial^\rho \Phi)} = ieA_\rho \Phi^*, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial^\rho \Phi^*)} = -ieA_\rho \Phi \quad (5.29)$$

et

$$\begin{aligned} J_\rho &= j_\rho + ie [ieA_\rho \Phi^* \Phi - (-ie)A_\rho \Phi \Phi^*] \\ &= j_\rho - 2e^2 A_\rho \Phi^* \Phi, \end{aligned} \quad (5.30)$$

i.e.

$$\boxed{J_\rho = -ie \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\rho \Phi - 2e^2 A_\rho \Phi^* \Phi.} \quad (5.31)$$

La dernière étape consiste à utiliser l'Eq. (5.23), qui s'écrit donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial A^\rho} = -J_\rho = -j_\rho + 2e^2 A_\rho \Phi^* \Phi \quad (5.32)$$

et de la résoudre, avec pour inconnue  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ . Nous obtenons donc

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu A_\mu + e^2 A^2 \Phi^* \Phi. \quad (5.33)$$

En conclusion, nous avons construit le Lagrangien minimal

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi)^* - m^2 \Phi \Phi^* - V(\Phi^* \Phi) \\ &\quad + ie A_\mu (\Phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi) + e^2 A^2 \Phi^* \Phi. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Résumons les équations du mouvement satisfaites par les champs  $A^\mu$ ,  $\Phi$  et  $\Phi^*$ ..

◇ Premièrement, les équations du mouvement pour  $A^\mu$  s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (5.35)$$

où  $J^\mu$  est donné par l'Eq. (5.31).

## 5. Couplage entre la matière et le champ électromagnétique

- ◇ Deuxièmement, les équations du mouvement pour  $\Phi$  et  $\Phi^*$ , en utilisant respectivement

$$\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \Phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \quad (5.36)$$

et

$$\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \Phi^*)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*}, \quad (5.37)$$

s'écrivent <sup>1</sup>

$$[(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2] \Phi^* = -\frac{\partial V}{\partial \Phi}. \quad (5.38)$$

et

$$[(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu) + m^2] \Phi = -\frac{\partial V}{\partial \Phi^*}. \quad (5.39)$$

### 5.3.2. Conservation du courant $J^\mu$

Prenons une petite respiration et vérifions la cohérence de ce que nous avons fait jusqu'à présent. Comme nous le savons, le courant  $J^\mu$  doit être conservé. Vérifions que notre courant construit satisfait effectivement cette contrainte, un fait qui n'est pas complètement évident à partir de son expression explicite (5.31).

Un calcul direct conduit à

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= -ie(\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) + ie(\partial^\mu \Phi)(\partial_\mu \Phi^*) - ie\Phi^* \square \Phi + ie(\square \Phi^*)\Phi \\ &\quad - 2e^2(\partial_\mu A^\mu)\Phi^* \Phi - 2e^2 A^\mu (\partial_\mu \Phi^*)\Phi - 2e^2 A^\mu \Phi^* (\partial_\mu \Phi). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Les deux premiers termes s'annulent. Pour les autres, les choses sont un peu plus délicates. Les deux équations du mouvement (5.38) et (5.39) peuvent être respectivement développées comme suit

$$(\square + m^2)\Phi^* + ie(\partial_\mu A^\mu)\Phi^* + 2ieA^\mu(\partial_\mu \Phi^*) - e^2 A^2 \Phi^* = -\frac{\partial V}{\partial \Phi} \quad (5.41)$$

et

$$(\square + m^2)\Phi - ie(\partial_\mu A^\mu)\Phi - 2ieA^\mu(\partial_\mu \Phi) - e^2 A^2 \Phi = -\frac{\partial V}{\partial \Phi^*}. \quad (5.42)$$

---

1. Attention au fait que dans ces deux équations, les opérateurs différentiels  $\partial_\mu$  et  $\partial^\mu$  agissent sur toute structure qui se trouve à leur droite, à savoir  $A_\mu$ ,  $\Phi$ ,  $\Phi^*$ .



Calculant  $ie\Phi \times (5.41) - ie\Phi^* \times (5.42)$  nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & ie\Phi(\square\Phi^*) - ie\Phi^*(\square\Phi) - 2e^2A^\mu(\partial_\mu\Phi^*)\Phi - 2e^2A^\mu\Phi^*(\partial_\mu\Phi) \\ &= -ie \left[ \Phi \frac{\partial V}{\partial \Phi} - \Phi^* \frac{\partial V}{\partial \Phi^*} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

qui montre explicitement, lorsqu'il est inséré dans l'Eq. (5.40), que le courant  $J^\mu$  est effectivement conservé.

### 5.3.3. Lagrangien minimal à partir de l'invariance de jauge

On a pu remarquer que la structure du lagrangien (5.34) est très particulière, comme on peut le deviner à partir des équations de mouvement (5.38) et (5.39). En effet,  $\mathcal{L}$  peut être réécrit de la façon suivante :

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^*(D_\mu\Phi) - m^2\Phi^*\Phi - V(\Phi^*\Phi)} \quad (5.44)$$

avec la dérivée covariante définie comme<sup>2</sup>

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu}, \quad (5.45)$$

de sorte que les équations du mouvement (5.38) et (5.39) sont les suivantes

$$[D^2 + m^2]^* \Phi^* = -\frac{\partial V}{\partial \Phi}, \quad (5.46)$$

$$[D^2 + m^2] \Phi = -\frac{\partial V}{\partial \Phi^*}. \quad (5.47)$$

Faisons un pas en arrière, et réexaminons le problème du couplage matière-photon, en partant simplement du Lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{matter}}$  sur lequel on *impose* l'invariance de jauge, comme principe général.

On considère donc la transformation  $U(1)$  *locale*, nommée transformation *de jauge* :

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) e^{ie\alpha(x)} \quad (5.48)$$

$$\Phi^*(x) \rightarrow \Phi^*(x) e^{-ie\alpha(x)}. \quad (5.49)$$

Ainsi,

$$\partial_\mu\Phi(x) \rightarrow \partial_\mu\Phi(x) e^{ie\alpha(x)} + ie\partial_\mu\alpha(x)\Phi(x) e^{ie\alpha(x)} \quad (5.50)$$

$$\partial_\mu\Phi^*(x) \rightarrow \partial_\mu\Phi^*(x) e^{-ie\alpha(x)} - ie\partial_\mu\alpha(x)\Phi^*(x) e^{-ie\alpha(x)}. \quad (5.51)$$

---

2. La présente convention est la même que celle utilisée dans Halzen-Martin. Elle est également cohérente avec Itzykson-Zuber et Peskin-Schroeder. Dans ces deux dernières références, il faut faire attention au fait que  $e$  est la charge électrique de l'électron, c'est-à-dire  $e = -|e|$ , alors que nous utilisons ici la convention que  $e = |e|$ .

## 5. Couplage entre la matière et le champ électromagnétique

Clairement, alors que  $-m^2\Phi^*\Phi - V(\Phi^*\Phi)$  est invariant de jauge, cette invariance est brisée par le terme  $(\partial_\mu\Phi(x))^*\partial^\mu\Phi(x)$ .

Le moyen de rétablir cette invariance de jauge est d'introduire un nouveau champ  $A^\mu$ , qui porte un indice  $\mu$  comme  $\partial_\mu$  (c'est donc un champ de spin un, comme le montre l'étude des représentations du groupe de Lorentz). Ces deux éléments sont combinés pour construire la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu.$$

Supposons maintenant que sous une transformation de jauge,  $A^\mu$  se transforme en

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu\alpha(x), \quad (5.52)$$

que nous avons déjà rencontré dans l'Eq. (3.76) lorsque nous avons discuté de l'invariance de jauge des équations de Maxwell exprimées en termes de  $A^\mu$ . On voit alors immédiatement que

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi(x) &\rightarrow [\partial_\mu\Phi(x) + ie\partial_\mu\alpha(x)\Phi(x) - ieA_\mu(x)\Phi(x) - ie\partial_\mu\alpha(x)\Phi(x)] e^{ie\alpha(x)} \\ &= [\partial_\mu\Phi(x) - ieA_\mu(x)\Phi(x)] e^{ie\alpha(x)} \\ &= [D_\mu\Phi(x)] e^{ie\alpha(x)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

et de façon similaire

$$[D_\mu\Phi(x)]^* \rightarrow [D_\mu\Phi(x)]^* e^{-ie\alpha(x)}. \quad (5.54)$$

Par conséquent, faire le remplacement minimal

$$[\partial_\mu\Phi(x)]^* [\partial_\mu\Phi(x)] \rightarrow [D_\mu\Phi(x)]^* [D_\mu\Phi(x)], \quad (5.55)$$

la partie cinétique du Lagrangien devient invariante de jauge. En ajoutant ce terme aux termes de masse et de potentiel pour les champs  $\Phi$  et  $\Phi^*$ , et au Lagrangien de la QED pure, on obtient donc le Lagrangien complet invariant de jauge de la QED que nous avons obtenu précédemment, voir l'équation (5.44).

Cette construction peut être étendue à d'autres groupes. C'est l'essence de la construction Yang-Mills. C'est LA façon de construire une théorie des champs dynamique qui couple les champs de matière et de jauge.

Par exemple, passer d'une invariance de jauge  $U(1)$  à  $U(1) \times SU(2)$  a conduit à la construction de la théorie électrofaible, avec des quarks et des leptons (électron, muon). leptons (électron, muon, tau et leurs neutrinos associés) comme champs de matière, portant des charges sous ce groupe, et  $\gamma, W^\pm, Z^0$  comme champs de jauge.

De même, une théorie de jauge basée sur le groupe (de couleur)  $SU(3)$  conduit à la chromodynamique (quantique) (QCD), la théorie moderne de l'interaction forte, avec des quarks comme champs de matière et des gluons comme champs de jauge.

Cela conduit au modèle standard, basé sur le groupe de jauge  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ .

On notera que la dynamique du champ de jauge est elle-même régie par un terme du type (5.18). En général, comme c'est le cas pour le Modèle Standard, le groupe de jauge est non-abélien. La conséquence est que les champs de jauge eux-mêmes portent une charge : par construction, les champs de jauge vivent dans la *représentation adjointe* du groupe. Pour un groupe abélien, cette représentation est triviale, et nous savons en effet que le photon n'a pas de charge, et ne se couple donc pas à lui-même. Mais pour un groupe non-abélien, les champs de jauge acquièrent une charge, de sorte qu'ils peuvent se coupler les uns aux autres. C'est le cas de  $W^\pm$  qui portent une charge électrique, de  $Z^0, W^\pm$  qui portent un isospin faible, des gluons qui portent une charge de couleur. Ceci est techniquement caché dans la force du champ  $F^{\mu\nu}$  qui n'est plus linéaire dans le champ de jauge.

Nous renvoyons aux cours de théorie des groupes pour plus de détails.



# 6. Théorie classique du rayonnement

Une charge unique, ou un système de charge, en mouvement, crée un champ électromagnétique dont la structure est particulière à grande distance. Son étude a de très nombreuses applications, en optique, en astrophysique, en physique des accélérateurs, en physique des particules élémentaires. En préambule, nous allons d'abord étudier plus en détail les propriétés générales du tenseur d'énergie-impulsion, en particulier dans le cas du champ électromagnétique.

## 6.1. Tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

### 6.1.1. Tenseur d'énergie-impulsion pour un système quelconque

Avant de discuter du cas particulier du champ électromagnétique, considérons le cas général. Le tenseur d'énergie-impulsion peut s'écrire sous la forme

$$T^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} u & \vec{g} \\ \hline \vec{S}_E & -\sigma^{ij} \end{array} \right). \quad (6.1)$$

Dans cette expression, en accord avec (2.24) et (2.26),  $u$  est la densité volumique d'énergie, et  $\vec{g}$  est la densité volumique de quantité de mouvement. Par ailleurs, comme nous allons le voir à présent,  $\vec{S}_E$  est le courant d'énergie du système, et  $T^{ij} = -\sigma^{ij}$  s'exprime à l'aide du tenseur des contraintes.

Ces différentes composantes ne sont en effet pas indépendantes : elles sont reliées par des équations de continuité, qui reposent sur la conservation du tenseur d'énergie-impulsion. En effet,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (6.2)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

La composante temporelle  $\nu = 0$  de cette équation s'écrit

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_E = 0, \quad (6.3)$$

et traduit la conservation de l'énergie.

La composante spatiale  $\nu = i$  de l'équation (6.2) s'écrit

$$\partial_\mu T^{\mu i} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial g^i}{\partial t} + \partial_j T^{ji} = 0, \quad (6.4)$$

et traduit la conservation de l'impulsion.

En notant  $V$  le volume du système, on peut obtenir l'énergie totale

$$W_V = \int_V u d^3x, \quad (6.5)$$

l'impulsion totale

$$\vec{P}_V = \int_V \vec{g} d^3x, \quad (6.6)$$

et le moment cinétique total

$$\vec{J}_V = \int_V \vec{r} \wedge \vec{g} d^3x. \quad (6.7)$$

Le tenseur énergie-impulsion est supposé symétrique : on utilise ici le tenseur de Belinfante, et non le tenseur canonique qui peut ne pas être symétrique, voir la discussion à la fin du Chap. 2. On a donc égalité entre le courant d'énergie et la densité de quantité de mouvement du système, et par ailleurs,  $T^{ij}$  est symétrique :

$$\vec{S}_E = \vec{g} \quad (6.8)$$

$$T^{ij} = T^{ji}. \quad (6.9)$$

Par ailleurs, la relation (6.7) justifie le fait que le moment cinétique total possède la forme simple d'intégration d'une densité locale formé à partir du produit vectoriel du vecteur position avec le vecteur densité de quantité de mouvement, y compris dans le cas où le moment cinétique total combine un moment cinétique orbital et un moment cinétique intrinsèque (spin).

Dans un volume fini  $V$  donné qui ne s'étend pas à l'espace tout entier, chacune des charges précédentes  $W_V$ ,  $\vec{P}_V$  et  $\vec{J}_V$  n'est bien sûr pas conservée, mais leurs variations temporelles s'interprètent facilement.

## 6.1. Tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

Pour l'énergie, on a

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d^3x, = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_E d^3x = - \int_{\partial V} \vec{S}_E \cdot d^2\vec{S}. \quad (6.10)$$

Pour l'impulsion totale, on a

$$\frac{dP_V^i}{dt} = \int_V \frac{\partial g^i}{\partial t} d^3x = - \int_V \partial_j T^{ji} = - \int_{\partial V} T^{ji} d^2S_j. \quad (6.11)$$

D'autre part, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{d\vec{P}_V}{dt} = \int_V d^3\vec{f} = \int_{\partial V} d^2\vec{f}. \quad (6.12)$$

Comme la force surfacique  $d^2\vec{f}$  s'exerçant sur une surface élémentaire  $d^2\vec{S}$  s'écrit

$$d^2f^i = \sigma^{ji} d^2S_j \quad (6.13)$$

où  $\sigma^{ji}$  est le tenseur des contraintes, on a donc  $\sigma^{ji} = -T^{ji}$  par comparaison de (6.11) et (6.12). En en déduit par ailleurs que le tenseur des contraintes  $\sigma^{ij}$  est symétrique par symétrie de  $T^{ij}$ .

Finalement, on a pour le moment cinétique total

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}_V}{dt} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_V \frac{\partial J^{0,ij}}{\partial t} d^3x = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_V \partial_n J^{n,ij} d^3x = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_{\partial V} J^{n,ij} d^2S^n \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_{\partial V} (x^i T^{nj} - x^j T^{ni}) d^2S^n = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_{\partial V} (x^i d^2f^j - x^j d^2f^i) \\ &= \int_{\partial V} (\vec{x} \wedge d^2\vec{f})_k, \end{aligned} \quad (6.14)$$

et donc

$$\frac{d\vec{J}_V}{dt} = \int_{\partial V} \vec{x} \wedge d^2\vec{f}. \quad (6.15)$$

On retrouve donc le théorème du moment cinétique comme attendu.

### 6.1.2. Application au cas du champ électromagnétique

Dans le cas de l'électromagnétisme, le tenseur d'énergie-impulsion canonique  $T_C^{\mu\nu}$  s'écrit, par application directe du théorème de Noether

$$T_C^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (6.16)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

Ce tenseur peut être rendu symétrique, en suivant la méthode de Belinfante. Tout d'abord, un nouveau tenseur s'obtient en lui ajoutant une divergence totale, en écrivant donc

$$T^{\mu\nu} = T_C^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu} \quad (6.17)$$

avec  $K^{\lambda\mu\nu}$  antisymétrique sur ses deux premiers indices. On montre alors facilement que ce nouveau tenseur  $T^{\mu\nu}$  est toujours conservé, et qu'il possède les mêmes charges conservées dans la limite du volume infini. En choisissant

$$K^{\lambda\mu\nu} = F^{\mu\lambda} A^\nu, \quad (6.18)$$

on a alors

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (6.19)$$

qui est manifestement symétrique. Nous allons utiliser ce tenseur dans tout ce qui suit.

### Densité d'énergie

La densité d'énergie s'écrit donc

$$u = T^{00} = F^{0\lambda} F_\lambda{}^0 + \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (6.20)$$

Comme

$$F^{0\lambda} F_\lambda{}^0 = F^{0i} F_i{}^0 = -F^{0i} F^{i0} = F^{0i} F^{0i} = E^2 \quad (6.21)$$

et

$$F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(E^2 - B^2) = -F^{0i} F^{i0} - \frac{1}{4}(E^2 - B^2), \quad (6.22)$$

on en déduit que

$$u = \frac{1}{2}(E^2 + B^2). \quad (6.23)$$

La densité de courant d'énergie s'écrit

$$S^i = T^{i0} = F^i{}_\rho F^{\rho 0} + \frac{1}{4} g^{i0} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = F^i{}_j F^{j0} = -F^{ij} F^{j0} = \epsilon_{ijk} B^k E^j = (\vec{E} \wedge \vec{B})^i$$

et donc

$$\vec{S}_E = \vec{E} \wedge \vec{B}. \quad (6.24)$$



## 6.1. Tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

C'est bien le vecteur de Poynting comme attendu.

Calculons à présent le tenseur des contraintes du champ électromagnétique, appelé également tenseur de Maxwell. On note ce tenseur<sup>1</sup>  $T_{(M)}^{ij} = \sigma^{ij}$ . On a donc

$$\begin{aligned} T_{(M)}^{ij} &= -T^{ij} = -F^i{}_{\rho} F^{\rho j} - \frac{1}{4} g^{ij} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\ &= F^i{}_k F^{kj} - F^i{}_0 F^{0j} - \frac{1}{2} \delta^{ij} (E^2 - B^2). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Or

$$F^i{}_k F^{kj} - F^i{}_0 F^{0j} = \epsilon_{ikl} \epsilon_{kjp} B^l B^p + E^i E^j = -B^2 \delta_{ij} + B^i B^j + E^i E^j, \quad (6.26)$$

puisque

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{kjp} = -\epsilon_{kil} \epsilon_{kjp} = -\delta_{ij} \delta_{lp} + \delta_{ip} \delta_{jl},$$

d'où finalement

$$\boxed{T_{(M)}^{ij} = E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2)}. \quad (6.27)$$

On déduit facilement des résultats précédents que le tenseur d'énergie-impulsion est de trace nulle. En effet,

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\nu} &= T^0{}_0 + T^i{}_i = T^0{}_0 + T^i{}_i = T^0{}_0 + T_{(M)}^{ii} \\ &= \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + E^2 + B^2 - \frac{3}{2} (E^2 + B^2) = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

On peut obtenir ce résultat directement en partant de (6.19), qui conduit à

$$T^{\mu}{}_{\nu} = F^{\mu}{}_{\rho} F^{\rho}{}_{\mu} + \frac{1}{4} g^{\mu}{}_{\mu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = F_{\mu\rho} F^{\rho\mu} + F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} + F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0. \quad (6.29)$$

Ce résultat n'est pas surprenant : le scalaire  $T^{\mu}{}_{\mu}$  a une dimension de densité d'énergie. Or l'électrodynamique en l'absence de charge et de courant est sans dimension : la seule échelle possible ne peut venir que de l'existence d'une masse, mais le photon est justement sans masse ! Cette trace ne peut donc qu'être nulle.

Le fait que le tenseur d'énergie-impulsion soit de trace nulle est directement lié à l'invariance d'échelle de la théorie. Ceci peut se montrer en étudiant de façon générale, pour une théorie de masse quelconque, le courant de dilatation de cette théorie (qui mesure l'effet d'un changement d'échelle) et en montrant que la divergence de ce courant (qui s'annule dans la limite de masse nulle), est proportionnelle à la trace du tenseur d'énergie-impulsion.

---

1. Attention aux notations !

## 6.2. Fonction de Green

Le concept de fonction de Green est très général, et dépasse de loin le cadre du présent chapitre. Il est commun à la théorie de la diffusion de la chaleur, à la diffusion neutronique, à la mécanique quantique non relativiste, à la théorie classique des champs et à la théorie quantique des champs. Nous allons étudier ce concept dans le cadre d'une équation d'Alembertienne, avec une application immédiate aux équations de Maxwell en jauge de Lorenz-Landau.

### 6.2.1. Intérêt

Supposons que l'on cherche à résoudre l'équation

$$\square\Psi(x) = \phi(x), \quad (6.30)$$

où est  $\phi(x)$  est connue, appelée terme de source, et  $\Psi(x)$  est l'inconnue.

Une méthode très efficace pour résoudre ce problème consiste à déterminer la fonction de Green  $G(x)$  solution du problème auxiliaire

$$\square G(x) = \delta^{(4)}(x). \quad (6.31)$$

A ce stade, le fait d'être dans un espace de Minkowski ne joue aucun rôle. La solution du problème (6.30) s'obtient alors formellement comme une convolution de la source avec la fonction de Green :

$$\psi(x) = \int d^4x' G(x - x') \phi(x'). \quad (6.32)$$

En effet,

$$\square_x \psi(x) = \int d^4x' \square_x G(x - x') \phi(x') = \int d^4x' \delta^{(4)}(x - x') \phi(x') = \phi(x). \quad (6.33)$$

### 6.2.2. Fonctions de Green retardée et avancée

La recherche de la fonction de Green, solution de l'équation (6.31), est simple à mener dans l'espace de Fourier. Partant de

$$\square G(x) = \delta^{(4)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x}, \quad (6.34)$$

et exprimant la fonction de Green  $G(x)$  à l'aide de sa transformée de Fourier  $\tilde{G}(k)$  :

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \tilde{G}(k), \quad (6.35)$$

on a

$$\square G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k (-ik) \cdot (-ik) e^{-ik \cdot x} \tilde{G}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k k^2 e^{-ik \cdot x} \tilde{G}(k), \quad (6.36)$$

et donc

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2} = -\frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2}, \quad (6.37)$$

soit finalement

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2} e^{-ik \cdot x}. \quad (6.38)$$

On constate que cette fonction de Green n'est pas correctement définie, puisqu'elle présente un pôle en  $k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$ .

Nous allons étudier comment la régulariser. Considérons tout d'abord l'intégrale sur les composantes spatiales de  $k$ . On a, en notant  $k = |\vec{k}|$ ,

$$\int d^3k \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{k_0^2 - \vec{k}^2} = 2\pi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k_0^2 - k^2} \quad (6.39)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k_0^2 - k^2} \int_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} d \cos \theta e^{ikr \cos \theta} \quad (6.40)$$

$$= \frac{2\pi}{ir} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k_0^2 - k^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad (6.41)$$

$$= \frac{2\pi}{ir} \left( \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k_0^2 - k^2} e^{ikr} - \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k_0^2 - k^2} e^{-ikr} \right) \quad (6.42)$$

$$= \frac{2\pi}{ir} \int_{-\infty}^\infty \frac{k^2 dk}{k_0^2 - k^2} e^{ikr}. \quad (6.43)$$

Cette intégrale est explicitement divergente, à cause de la présence de deux pôles en  $k = k_0$  et  $k = -k_0$ .

Nous allons maintenant remplacer cette intégrale sur l'axe réel par une intégrale sur un contour fermé  $\Gamma$ , constitué d'un segment  $[-R, R]$  complété d'un demi-cercle dans le demi-plan imaginaire  $\text{Im } k \geq 0$  parcouru dans le sens trigonométrique, voir fig. 6.1, et considérer la limite  $R \rightarrow \infty$ . La première étape est de montrer que la contribution du demi-cercle s'annule dans la limite  $R \rightarrow \infty$ . Sur ce demi-cercle,

$$k = R e^{i\alpha} = R \cos \alpha + iR \sin \alpha \quad (6.44)$$

avec  $\alpha \in [0, \pi]$ . On a donc

$$e^{ikr} = e^{iRr \cos \alpha} e^{-rR \sin \alpha} \quad (6.45)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

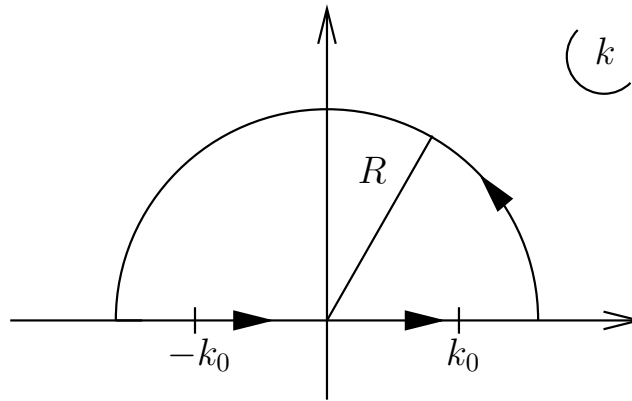


FIGURE 6.1. – Intégrale de Cauchy dans le plan  $k$ , avec les deux pôles de l'intégrand.

qui tend vers 0 dans la limite  $R \rightarrow \infty$ , grâce à la présence du second terme dans le membre de droite de l'Eq. (6.45), facteur exponentiellement décroissant, pour  $\sin \alpha > 0$ . On notera que fermer le contour vers le bas conduirait au contraire à une divergence exponentielle.

Rigoureusement, il faudrait introduire un petit angle  $\epsilon$  entre l'axe horizontal et le demi-segment parcouru à partir de l'origine vers la droite, et faire de même sur la gauche, comme indiqué dans la Fig. 6.2. On laissera au lecteur le soin de

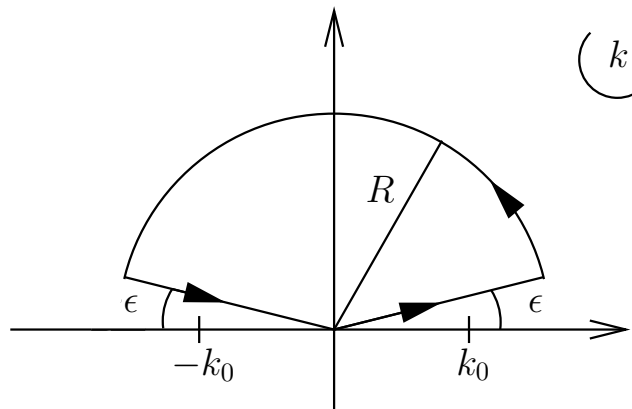


FIGURE 6.2. – Intégrale de Cauchy modifiée dans le plan  $k$ .

montrer que le résultat reste inchangé, après passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Nous allons donc à présent étudier

$$I(k_0) = \int_{\Gamma} \frac{k^2 dk}{k^2 - k_0^2} e^{ikr}, \quad (6.46)$$

ce qui nous permettra de donner un sens à

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i r} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 I(k_0) e^{-ik_0 x_0}. \quad (6.47)$$

Afin de donner un sens à cette intégrale  $I$ , supposons à présent que  $k_0$  possède une petite partie imaginaire. Deux cas se présentent donc :

$\text{Im } k_0 > 0$  : on écrira alors symboliquement<sup>2</sup> alors  $k_0$  sous la forme  $k_0 + I\epsilon$  (avec  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ). Les pôles se trouvent alors maintenant en  $k = k_0 + i\epsilon$  et en  $k = -k_0 - i\epsilon$ . Le contour  $\Gamma$  encercle le pôle en  $k = k_0 + i\epsilon$ , tandis que le pôle en  $k = -k_0 - i\epsilon$  se trouve en dehors, comme illustré sur la Fig. 6.3. Seul le premier de ces deux pôles contribue donc en vertu du théorème des résidus. On obtient donc

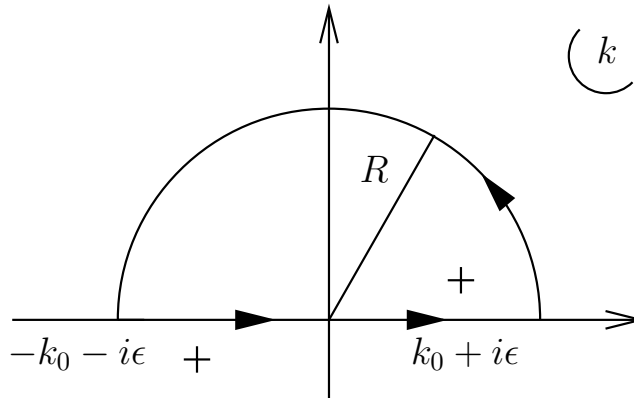


FIGURE 6.3. – Intégrale de Cauchy dans le plan  $k$ , dans le cas  $\text{Im } k_0 > 0$ . La position des pôles est indiquée par des croix.

$$I(k_0) = 2\pi i \frac{k_0 e^{ik_0 r}}{2k_0} = \pi i e^{ik_0 r}. \quad (6.48)$$

On en déduit donc que

$$G_+(x) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{-ik_0 x_0 + ik_0 r} = \frac{1}{4\pi r} \delta(r - x_0). \quad (6.49)$$

$\text{Im } k_0 < 0$  : on écrira alors  $k_0$  symboliquement sous la forme  $k_0 - i\epsilon$  (avec  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ). Les pôles se trouvent alors maintenant en  $k = k_0 - i\epsilon$  et en  $k = -k_0 + i\epsilon$ . Le contour  $\Gamma$  encercle le pôle en  $k = -k_0 + i\epsilon$ , tandis que le pôle en  $k = k_0 - i\epsilon$  se trouve en dehors, comme illustré sur la Fig. 6.4. Seul le premier de ces deux

2. On utilise également dans la littérature la notation  $k_0 + i0$ .

6. Théorie classique du rayonnement

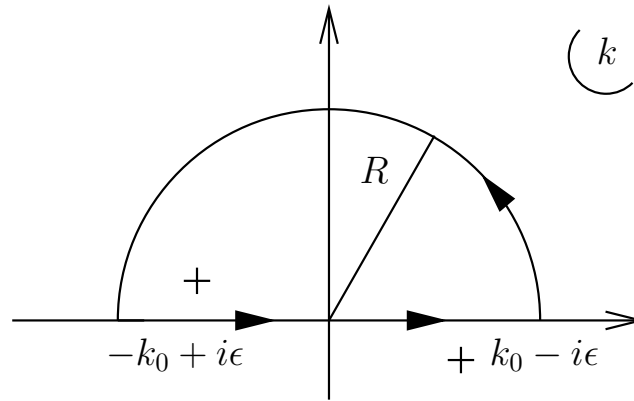


FIGURE 6.4. – Intégrale de Cauchy dans le plan  $k$ , dans le cas  $\text{Im } k_0 < 0$ . La position des pôles est indiquée par des croix.

pôles contribue donc en vertu du théorème des résidus. On obtient donc

$$I(k_0) = 2\pi i \frac{-k_0 e^{-ik_0 r}}{-2k_0} = \pi i e^{-ik_0 r}. \quad (6.50)$$

On en déduit donc que

$$G_-(x) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{-ik_0 x_0 - ik_0 r} = \frac{1}{4\pi r} \delta(r + x_0). \quad (6.51)$$

Nous avons donc construit deux fonctions de Green :

$$G_+(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(r - x_0) \quad \text{fonction de Green retardée} \quad (6.52a)$$

$$G_-(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(r + x_0) \quad \text{fonction de Green avancée} \quad (6.52b)$$

Leur support est illustré par la Fig. 6.5. Ces deux fonctions de Green peuvent d'écrire de façon covariante :

$$G_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x_0) \delta(x^2). \quad (6.53)$$

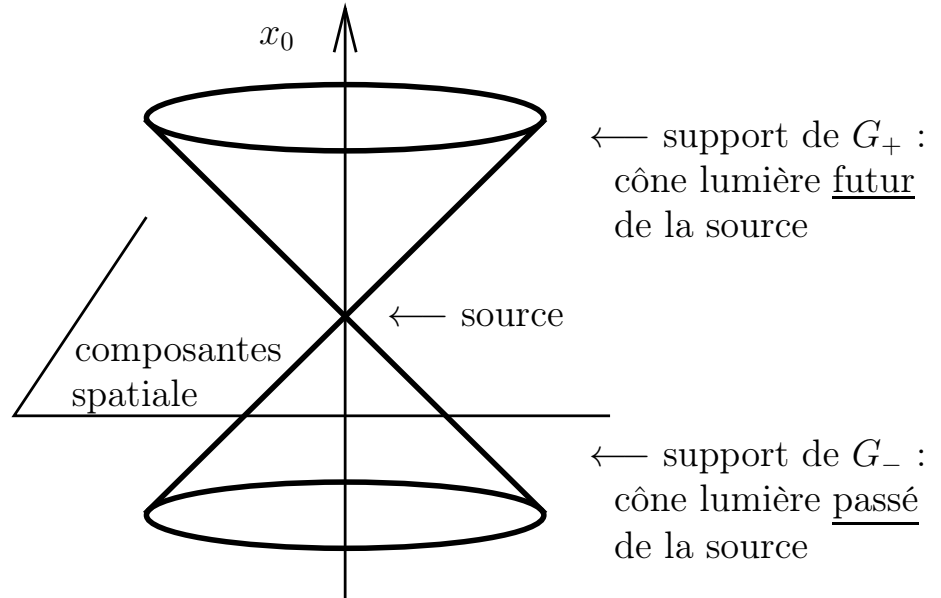
*Preuve :*

Il suffit de partir de la relation

$$\delta(f(r)) = \sum_i \frac{\delta(r - r_i)}{|f'(r_i)|} \quad (6.54)$$

où la somme porte sur les racines de  $f(r) = 0$ . On a donc

$$\frac{1}{2\pi} \theta(\pm x^0) \delta(r^2 - x_0^2) = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x^0) \left[ \frac{\delta(r - x_0)}{2r} + \frac{\delta(r + x_0)}{2r} \right] = \frac{1}{4\pi r} \delta(r \mp x_0). \quad (6.55)$$

FIGURE 6.5. – Support des fonctions de Green retardée  $G_+$  et avancée  $G_-$ .

### 6.2.3. Potentiels retardés

Nous allons maintenant appliquer l'approche précédente au cas de l'électromagnétisme. Plaçons nous dans la jauge de Lorenz (3.83)

$$k_\mu A^\mu = 0. \quad (6.56)$$

On doit donc résoudre l'équation (3.84)

$$\square A^\nu = j^\nu. \quad (6.57)$$

En suivant la logique de la partie 6.2, la solution recherchée s'écrit donc

$$\begin{aligned} A_{ret}^\alpha(x) &= \int d^4x' G_+(x-x') j^\alpha(x') \\ &= \int d^4x' G_+(x') j^\alpha(x-x'). \end{aligned} \quad (6.58)$$

On vérifie bien que la condition de Lorenz-Landau est satisfaite puisque par hypothèse le courant  $j^\alpha$  est conservé :

$$\partial_\alpha A_{ret}^\alpha(x) = \int d^4x' G_+(x') \partial_\alpha j^\alpha(x-x') = 0. \quad (6.59)$$

On notera que l'invariance de jauge résiduelle, cf la discussion p60, a été fixée par le choix de la fonction de Green retardée.

## 6. Théorie classique du rayonnement

On peut à présent obtenir l'expression du potentiel retardé, en réintroduisant  $c$  pour faciliter l'interprétation physique, qui s'écrit

$$A_{ret}^\alpha(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j^\alpha\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right). \quad (6.60)$$

Cette expression fait donc intervenir la valeur du courant à l'instant retardé  $t - \frac{R}{c}$  avec  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ . Le retard correspond au temps que met la lumière pour aller de la position retardée  $\vec{r}'$  à la position d'observation  $\vec{r}$ .

La solution générale de (6.57) s'écrit donc

$$A^\alpha(x) = A_{in}^\alpha(x) + A_{ret}^\alpha(x) \quad (6.61)$$

où  $A_{in}^\alpha$  est solution de l'équation d'onde homogène. Supposons que les sources sont localisées dans l'espace-temps :

$$j^\alpha(t, \vec{r}) = 0 \quad \text{pour } t < t_0. \quad (6.62)$$

Alors

$$A^\alpha(x) = A_{in}^\alpha(x) \quad \text{pour } t < t_0. \quad (6.63)$$

C'est le champ électromagnétique exciteur d'une antenne initialement au repos. Le champ  $A_{ret}^\alpha$  décrit quant à lui le rayonnement émis par l'antenne.

Dans le cas d'un courant stationnaire, le potentiel se simplifie en

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

qui vérifie la condition de jauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (6.65)$$

puisque toute dépendance temporelle a disparu.

## 6.3. Charge ponctuelle en mouvement

### 6.3.1. Potentiel de Liénard-Wiechert

Considérons une charge  $q$  en mouvement, sa trajectoire étant caractérisée par le quadrivecteur position ( $\xi^0 = t, \vec{\xi}(t)$ ).



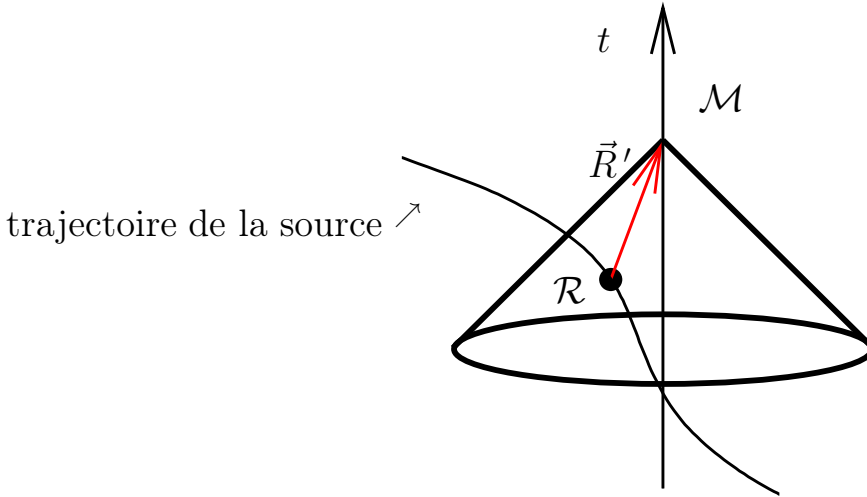


FIGURE 6.6. – Pour tout point d’observation  $\mathcal{M}$ , l’événement retardé  $\mathcal{R}$  est défini comme l’intersection (unique) du cône de lumière passé de  $\mathcal{M}$  avec la ligne d’univers de la charge ponctuelle. Le vecteur  $\vec{R}'$  joint la position retardée  $\mathcal{R}$  au point d’observation  $\mathcal{M}$ .

On a donc

$$j^\mu(x'') = q \int dt \frac{d\xi^\mu}{dt}(t) \delta^{(4)}(x'' - \xi(t)) = q \frac{d\xi^\mu}{dt''}(t'') \delta^{(4)}(\vec{r}'' - \vec{\xi}(t'')). \quad (6.66)$$

Ainsi

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4x''}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}''| - (t - t'')) q \delta^{(3)}(\vec{r}'' - \vec{\xi}(t'')) \frac{d\xi^\mu}{dt''}(t'') \quad (6.67)$$

$$= \frac{q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \frac{d\xi^\mu}{dt''}(t'') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|} \delta(t'' - t + |\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|). \quad (6.68)$$

Afin d’alléger autant que possible les calculs qui vont suivre, nous allons noter  $t'$  le temps retardé correspondant à l’événement retardé  $\mathcal{R} = (t', \vec{\xi}(t'))$ , qui est relié à l’instant d’observation  $\mathcal{M} = (t, \vec{r})$  par la relation

$$t' - t + |\vec{r} - \vec{\xi}(t')| = 0, \quad (6.69)$$

comme illustré par la Fig. 6.6.

Simplifions à présent  $\delta(t'' - t + |\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|)$  qui apparaît dans l’Eq. (6.67). En posant

$$f(t'') = t'' - t + |\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|, \quad (6.70)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

on aura donc

$$\delta(f(t'')) = \frac{\delta(t'' - t)}{\left. \frac{df(t'')}{dt''} \right|_{t''=t}}. \quad (6.71)$$

Partant de (6.70) on obtient

$$\frac{df(t'')}{dt''} = 1 - \frac{d\vec{\xi}(t'')}{dt''} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{\xi}(t'')}{|\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|} \quad (6.72)$$

et donc

$$\frac{df(t'')}{dt''} = 1 - \frac{d\vec{\xi}(t'')}{dt''} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{\xi}(t'')}{|\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|}, \quad (6.73)$$

et donc

$$\left. \frac{df(t'')}{dt''} \right|_{t''=t} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}', \quad (6.74)$$

où l'on a posé

$$\vec{\beta}' = \frac{d\vec{\xi}(t')}{dt'}, \quad (6.75)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}'}{R'} \quad \text{avec} \quad \vec{R}' = \vec{r} - \vec{\xi}(t'). \quad (6.76)$$

Le vecteur  $\vec{R}'$  joint donc la position retardée  $\mathcal{R}$  au point d'observation  $\mathcal{M}$ , comme illustré dans la Fig. 6.6,  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire pointant dans cette direction, et  $\vec{\beta}'$  est la vitesse de la source au temps retardé.

On obtient ainsi finalement le quadri-potentiel de Liénard-Wiechert

$$\boxed{A^\mu(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{d\xi^\mu(t')}{dt'} \frac{q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')R'}}, \quad (6.77)$$

et donc

$$V(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')R'}, \quad (6.78)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q\vec{\beta}'}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')R'}. \quad (6.79)$$

Dans la limite non-relativiste où  $\beta' \ll 1$ , on retrouve bien les expressions habituelles, puisqu'alors  $t' = t$  :

$$V(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi r}, \quad (6.80)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{q\vec{\beta}(t)}{4\pi r}. \quad (6.81)$$

Une expression covariante de  $A^\mu$  peut être obtenue. Introduisons la quadri-  
vitesse de la source  $\vec{u}'^\mu$  à l'instant retardé, et posons

$$y^\mu = x^\mu - x'^\mu = (t - t', \vec{R}'). \quad (6.82)$$

Dans un référentiel co-mobile avec la particule au temps retardé  $t'$ , i.e.  $\vec{\beta}' = 0$ ,

$$y^\mu u'_\mu = t - t' = R' \quad (6.83)$$

et donc l'Eq. (6.77) se réduit à

$$A^0 = \frac{q}{4\pi R'}, \quad A^i = 0. \quad (6.84)$$

L'expression covariante de  $A^\mu$  est alors

$$A^\mu(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{u'^\mu}{y^\beta u'_\beta}. \quad (6.85)$$

### 6.3.2. Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

#### Calcul des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  peuvent être calculés à partir des relations

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

en utilisant l'expression des potentiels retardés (6.78) et (6.79).

Le calcul est cependant délicat :  $t' = t'(\vec{r}, t)$  est une fonction implicite de  $t$ . On a donc besoin de calculer  $\partial_t t'$  et  $\partial_i t'$ . Partant de (6.75),

$$\vec{R}' = \vec{r} - \vec{\xi}' \quad (6.87)$$

où l'on a noté par souci de simplification  $\vec{\xi}' = \vec{\xi}(t')$ , on a après différentiation

$$\frac{\vec{R}' \cdot d\vec{R}'}{R'} = dt - dt' \quad (6.88)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

avec

$$d\vec{R}' = d\vec{r} - d\vec{\xi}' = d\vec{r} - \vec{\beta}' dt'. \quad (6.89)$$

En introduisant le vecteur unitaire  $\vec{n}$  (6.75), l'Eq. (6.88) s'écrit encore

$$\frac{\vec{R}' \cdot (d\vec{r} - \vec{\beta}' dt')}{R'} = \vec{n} \cdot d\vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{\beta}' dt' = dt - dt' \quad (6.90)$$

et donc

$$\left(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'\right) dt' = dt - \vec{n} \cdot d\vec{r} \quad (6.91)$$

d'où

$$dt' = \frac{dt}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} - \frac{\vec{n} \cdot d\vec{r}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} \quad (6.92)$$

ce qui permet d'obtenir les expressions recherchées

$$\partial_t t' = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}, \quad (6.93)$$

$$\partial_i t' = -\frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.94)$$

Faisons maintenant le même exercice avec  $\vec{R}'$ . Considérons donc la composante  $R'_j$ . Partant de (6.87),

$$R'_j = x_j - \xi'_j \quad (6.95)$$

on a donc

$$\partial_t R'_j = -\partial_t \xi'_j = -\partial_{t'} \xi'_j \partial_t t' \quad (6.96)$$

and thus

$$\partial_t R'_j = -\frac{\beta'_j}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.97)$$

De façon similaire,

$$\partial_i R'_j = \partial_i x_j - \partial_i \xi'_j = \partial_i x_j - \partial_{t'} \xi'_j \partial_t t' \quad (6.98)$$

d'où

$$\partial_i R'_j = \delta_{ij} + \frac{n_i \beta'_j}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.99)$$

Le même exercice avec  $\vec{\beta}'$ , en considérant la composante  $\beta'_j$ , conduit à

$$\partial_t \beta'_j = \partial_{t'} \beta'_j \partial_t t' = \frac{\dot{\beta}'_j}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.100)$$

and

$$\partial_i \beta'_j = \partial_{t'} \beta'_j \partial_i t' = -\frac{n_i \dot{\beta}'_j}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.101)$$

Nous aurons besoin de calculer  $\partial_t(\vec{\beta}' \cdot \vec{R}')$  et  $\partial_i(\vec{\beta}' \cdot \vec{R}')$  ce qui est assez aisé en utilisant les résultats précédents. On a

$$\partial_t(\beta'_j R'_j) = (\partial_t \beta'_j) R'_j + \beta'_j (\partial_t R'_j) = \left( \dot{\beta}'_j R'_j - \beta'_j \dot{\beta}'_j \right) \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} \quad (6.102)$$

et donc

$$\partial_t(\vec{\beta}' \cdot \vec{R}') = \left( R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' - \beta'^2 \right) \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.103)$$

De même,

$$\partial_i(\beta'_j R'_j) = (\partial_i \beta'_j) R'_j + \beta'_j (\partial_i R'_j) = -\frac{n_i \dot{\beta}'_j}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} R'_j + \beta'_j \left( \delta_{ij} + \frac{n_i \beta'_j}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} \right) \quad (6.104)$$

et donc

$$\partial_i(\vec{\beta}' \cdot \vec{R}') = \beta'_i - \left( R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' - \beta'^2 \right) \frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.105)$$

Le dernier résultat manquant est le calcul des dérivées partielles de  $R'$ . Partant de  $R' = t - t'$ , on a

$$\partial_t R' = 1 - \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{\beta}'}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.106)$$

et

$$\partial_i R' = -\partial_i t' = \frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}. \quad (6.107)$$

En regroupant les résultats précédents, on a finalement

$$\partial_t(R' - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}') = \left( -\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' - R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' + \beta'^2 \right) \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} \quad (6.108)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

et

$$\begin{aligned}\partial_i(R' - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}') &= \frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} - \beta'_i + \left( R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' - \beta'^2 \right) \frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} \\ &= \frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} \left( 1 - \beta'^2 + R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' \right) - \beta'_i.\end{aligned}\quad (6.109)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

Partant de l'Eq. (6.78) on tire

$$-\partial_i V = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'} \left( 1 - \beta'^2 + R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' \right) - \beta'_i \right] \frac{1}{R'^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^2} \quad (6.110)$$

et utilisant l'Eq. (6.79) on obtient

$$\begin{aligned}-\partial_t A_i &= -\frac{q}{4\pi} \left[ \frac{\partial_t \beta'_i}{R' (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')} - \beta'_i \frac{\partial_t (R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}')}{R'^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^2} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[ -\frac{\dot{\beta}'_i}{R' (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^2} + \beta'_i \frac{-\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' - R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' + \beta'^2}{R'^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^3} \right]\end{aligned}\quad (6.111)$$

et donc, après regroupement des différents termes, et en utilisant le fait que  $1 - \beta'^2 = 1/\gamma'^2$ ,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^3} \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}'}{\gamma'^2 R'^2} + \frac{1}{R'} \left[ (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}') (\vec{n} - \vec{\beta}') - (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}') \dot{\vec{\beta}}' \right] \right] \quad (6.112)$$

Comme

$$\vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}') \wedge \dot{\vec{\beta}}'] = (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}') (\vec{n} - \vec{\beta}') - (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}') \dot{\vec{\beta}}' \quad (6.113)$$

le champ  $\vec{E}$  s'écrit encore

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^3} \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}'}{\gamma'^2 R'^2} + \frac{1}{R'} \vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}') \wedge \dot{\vec{\beta}}'] \right]} \quad (6.114)$$

Déterminons maintenant l'expression du champ  $\vec{B}$ , i.e. de  $B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$ . Partant de l'Eq. (6.79), on tire

$$\begin{aligned}\partial_j A_k &= \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{\partial_j \beta'_k}{R' (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')} - \frac{\partial_j (R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}')}{R'^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^2} \beta'_k \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{-n_j \dot{\beta}'_k}{R' (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^2} - \frac{n_j \beta'_k}{R'^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^3} \left( 1 - \beta'^2 + R' \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}' \right) \right],\end{aligned}\quad (6.115)$$

et donc

$$B_i = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^3} \left[ -\epsilon_{ijk} n_j \dot{\beta}'_k \frac{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}{R'} - \epsilon_{ijk} n_j \beta'_k \left( \frac{1 - \beta'^2}{R'^2} + \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}'}{R'} \right) \right], \quad (6.116)$$

soit finalement

$$\vec{B} = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')^3} \left[ \frac{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}{R'} \vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}}' + \left( \frac{1 - \beta'^2}{R'^2} + \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}'}{R'} \right) \vec{n} \wedge \vec{\beta}' \right] \quad (6.117)$$

On vérifie facilement à partir de l'Eq. (6.114) que

$$\boxed{\vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E}.} \quad (6.118)$$

Dans le cas où le référentiel  $K$  est co-mobile avec la particule chargée à l'instant retardé  $t'$ ,  $\vec{\beta}' = 0$  et donc

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{\vec{n}}{R'^2} + \frac{1}{R'} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}}') \right]}, \quad (6.119a)$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E}.} \quad (6.119b)$$

L'expression (6.119a) du champ  $\vec{E}$  fait donc apparaître deux termes :

- le premier, qui décroît comme  $1/R'^2$ , est la partie coulombienne.
- le second, qui décroît comme  $1/R'$ , et domine donc à grande distance, est la partie champ de rayonnement.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la structure à grande distance du champ, et donc ne garder que la partie rayonnement :

$$\boxed{\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{R'} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}}')}, \quad (6.120a)$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E}_{rad}.} \quad (6.120b)$$

### Structure des champs de rayonnement

Supposons que  $\vec{n}$  est suivant l'axe  $\vec{u}_z$ , avec donc  $\vec{n} = \vec{u}_z = \overrightarrow{\mathcal{RM}}/\mathcal{RM}$ , et que  $\vec{a}' = \dot{\vec{\beta}}'$  est dans le plan  $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$ , avec  $\theta = (\vec{n}, \vec{a}')$ .

D'après (6.120a, 6.120b) les champs  $\vec{E}_{rad}$  et  $\vec{B}_{rad}$  sont orthogonaux à  $\vec{n}$  et entre eux,  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$  formant un repère direct. Plus précisément, voir Fig. 6.7

- $\vec{E}$  est dans le plan  $(\vec{n}, \vec{a}')$ , avec  $\vec{E}$  orthogonal à  $\vec{n}$  et pointant (dans le cas où  $q > 0$ ), dans le demi-plan symétrique à  $\vec{a}'$  par rapport à  $\vec{n}$

## 6. Théorie classique du rayonnement

-  $\vec{B}$  est orthogonal au plan  $(\vec{n}, \vec{a}')$ ,  $(\vec{n}, \vec{a}', \vec{B})$  formant un repère direct. En effet (dans le cas où  $q > 0$ ),  $\vec{B}$  est dans le sens de

$$\vec{n} \wedge [\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a}')] = \vec{n} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{a}') - \vec{n} \wedge \vec{a}' = -\vec{n} \wedge \vec{a}'. \quad (6.121)$$

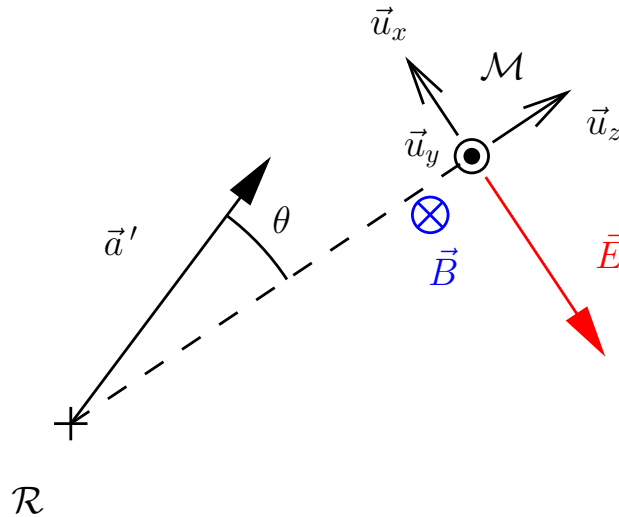


FIGURE 6.7. – Champs de radiation  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  au point d'observation  $\mathcal{M}$  pour une particule chargée d'accélération retardée  $\vec{a}'$  à la position retardée  $\mathcal{R}$ .

### 6.3.3. Densité d'énergie rayonnée ; formule de Larmor

Soit  $\mathcal{B}$  la boule de rayon  $R'$ , centrée au point retardé  $\mathcal{R}$  et passant par le point d'observation  $\mathcal{M}$ , comme indiqué sur la Fig. 6.8.

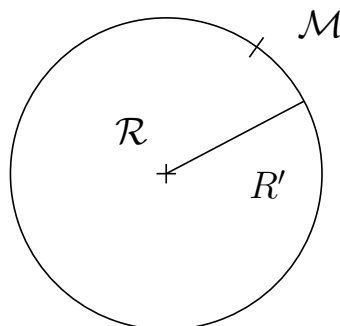


FIGURE 6.8. – Boule de rayon  $\mathcal{R}$  centrée sur la position retardée  $\mathcal{R}$ , passant par le point d'observation  $\mathcal{M}$ , de rayon  $R'$ .



On peut donc maintenant calculer la variation de l'énergie  $W_{\mathcal{B}}$  dans cette boule  $\mathcal{B}$  par unité de temps, opposée à la puissance de radiation, soit

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\mathcal{B}}}{dt} &= - \int_{\partial\mathcal{B}} \vec{S}_E \cdot d^2\vec{S} \\ &= - \int_{\partial\mathcal{B}} R'^2 (\vec{S}_E \cdot \vec{n}) d^2\Omega. \end{aligned} \quad (6.122)$$

La puissance radiée par angle solide est donc

$$\frac{d^2P}{d^2\Omega} = R'^2 (\vec{S}_E \cdot \vec{n}) = u R'^2 \quad (6.123)$$

soit

$$\boxed{\frac{d^2P}{d^2\Omega} = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{4\pi \cdot 4\pi}} \quad (6.124)$$

La variation de la quantité de mouvement totale dans la boule  $\mathcal{B}$  par unité de temps est nulle, par isotropie de l'espace. En effet, on peut vérifier par un calcul direct que

$$\frac{d\vec{P}_{\mathcal{B}}}{dt} = - \int_{\partial\mathcal{B}} d^2\Omega (R'^2 u \vec{n}) = - \int_{\partial\mathcal{B}} d^2\Omega \left( \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2} \vec{n} \right) = 0. \quad (6.125)$$

En effet, en utilisant le fait que  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  en coordonnées sphériques, le résultat s'obtient alors immédiatement par intégration sur l'angle solide  $d^2\Omega = d\varphi \sin \theta d\theta$ . D'une part l'intégration sur  $\varphi$  pour les composantes suivant  $x$  et  $y$  donne 0, et d'autre part l'intégration sur  $\theta$  pour la composante suivant  $z$  donne également 0.

Partant de (6.124), on peut maintenant calculer la puissance totale radiée, soit

$$\begin{aligned} P &= \int d^2\Omega \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{4\pi \cdot 4\pi} = \frac{q^2 a'^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{q^2 a'^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}, \end{aligned} \quad (6.126)$$

puisque

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta d\theta = \int_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \left[ \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} = \frac{4}{3}.$$

On obtient ainsi la **formule de Larmor**

$$\boxed{P = \frac{2 q^2 a'^2}{3 \cdot 4\pi}} \quad (6.127)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

Il est possible d'obtenir une formulation covariante du résultat précédent. En notant  $m$  la masse de la particule chargée, et  $p'^{\mu}$  et  $\tau'$  les impulsions et temps propres à l'instant retardé  $t'$ , on a dans le référentiel co-mobile

$$\frac{dp'^{\mu}}{d\tau'} = (0, m\vec{a}') \quad (6.128)$$

et donc, dans un référentiel quelconque,

$$P = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi m^2} \frac{dp'^{\mu}}{d\tau'} \frac{dp'_{\mu}}{d\tau'}. \quad (6.129)$$

## 6.4. Distribution de charges quelconque

### 6.4.1. Décomposition spectrale

En raison de l'effet de temps retardé, lié au temps de propagation entre la source et le point d'observation, nous allons voir qu'il est naturel de passer dans l'espace conjugué de Fourier au temps. Introduisons donc la transformée de Fourier

$$j_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt j^{\mu}(t, \vec{r}) e^{i\omega t} \quad (6.130)$$

et la transformée de Fourier inverse

$$j^{\mu}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega j_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (6.131)$$

Comme  $j^{\mu}$  est réel,

$$j_{\omega}^{\mu*}(\vec{r}) = j_{-\omega}^{\mu}(\vec{r}). \quad (6.132)$$

Partant de

$$A^{\mu}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j^{\alpha} \left( t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}' \right), \quad (6.133)$$

on a donc

$$A^{\mu}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega j_{\omega}^{\mu}(\vec{r}') e^{-i\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}. \quad (6.134)$$

Posons

$$A^{\mu}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (6.135)$$

et

$$A_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt A^{\mu}(t, \vec{r}) e^{i\omega t}. \quad (6.136)$$

On obtient alors une relation très simple entre source et quadri-potentiel, sous la forme

$$A_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} j_{\omega}^{\mu}(\vec{r}'). \quad (6.137)$$

En particulier, puisque  $\omega = ck$ ,

$$V_{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rho_{\omega}(\vec{r}'), \quad (6.138)$$

et

$$\vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_{\omega}(\vec{r}'). \quad (6.139)$$

### 6.4.2. Décomposition spectrale de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Partons de

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (6.140)$$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{B}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (6.141)$$

Comme

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{V}) = (\vec{\nabla}f) \wedge \vec{V} + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}), \quad (6.142)$$

on a donc

$$\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V_{\omega}(\vec{r}) + i\omega \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \quad (6.143)$$

soit

$$\boxed{\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = i\omega \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \vec{\nabla}_r \left[ \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \rho_{\omega}(\vec{r}'),} \quad (6.144)$$

et

$$\vec{B}_{\omega}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) \quad (6.145)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

soit

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \vec{\nabla}_r \left[ \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \wedge \vec{j}_\omega(\vec{r}'). \quad (6.146)$$

Insistons sur le fait que les deux relations précédentes sont à ce stade exactes.

### 6.4.3. Zone de rayonnement (ou zone radiative)

On suppose que des sources sont localisées dans une région de dimensions typiques  $a$  autour de l'origine  $O$ , comme illustré dans la Fig. 6.9. Le point

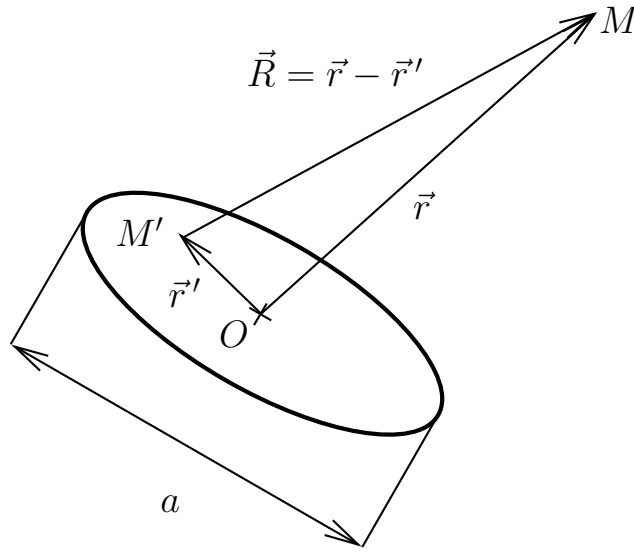


FIGURE 6.9. – Sources localisées dans une région de dimensions typiques  $a$  autour de  $O$ .

d'observation  $M$  est repéré par sa position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . Chaque point source  $M'$  est repéré par sa position  $\vec{r}' = \overrightarrow{OM'}$ , et on note  $\vec{R} = \overrightarrow{M'M} = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Nous allons à présent nous intéresser au rayonnement de fréquence  $\nu = c/\lambda$ . Pour une telle fréquence, considérons le domaine des grandes distances

$$R \gg \lambda \quad \text{et} \quad R \gg a \quad (\text{zone de rayonnement}). \quad (6.147)$$

On ne fait ici a priori aucune hypothèse sur la valeur de  $a$  versus  $\lambda$ .

D'après les expressions (6.144) et (6.146) des champs électriques et magnétiques, nous sommes donc amenés à étudier le gradient

$$\vec{\nabla}_r \left[ \frac{e^{ikR}}{R} \right] = \left[ ik \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R^2} \right] \vec{\nabla}_r R \quad (6.148)$$

On s'intéresse ici au régime où le premier terme domine devant le second, i.e.  $k/R \gg 1/R^2$ , soit  $k \gg 1/R$  ou encore  $2\pi R \gg \lambda$ .

Posons

$$\vec{n}' = \frac{\vec{R}}{R} \quad (6.149)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.150)$$

Alors

$$\vec{\nabla}_r \left[ \frac{e^{ikR}}{R} \right] \sim ik \frac{e^{ikR}}{R} \vec{\nabla}_r R = ik \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n}' \sim ik \vec{n} \frac{e^{ikR}}{R} = i\vec{k} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.151)$$

La première égalité s'obtient en écrivant  $R = (\vec{R} \cdot \vec{R})^{1/2}$  d'où l'on tire immédiatement  $\vec{\nabla}_r R = \vec{R}/R = \vec{n}'$ . La seconde approximation vient du fait que  $\vec{n} \sim \vec{n}'$  puisque  $R \gg a$ .

Dans la zone de rayonnement, on peut donc écrire  $\vec{\nabla}_r \sim i\vec{k}$ . On a ainsi les règles de calcul suivantes dans cette zone :

$$\vec{\nabla}_r \rightarrow i\vec{k} \quad (\text{approché}) \quad (6.152)$$

$$\partial_t \rightarrow -i\omega \quad (\text{exact}). \quad (6.153)$$

Ainsi, dans la zone de rayonnement,

$$\vec{E}_\omega = -i\vec{k} V_\omega(\vec{r}) + i\omega \vec{A}_\omega(\vec{r}), \quad (6.154a)$$

$$\vec{B}_\omega = i\vec{k} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}). \quad (6.154b)$$

L'utilisation de la condition de Lorenz-Landau (6.56) permet d'éliminer complètement le potentiel scalaire  $V_\omega$ . En effet, cette condition de jauge s'écrit dans la zone de rayonnement

$$i\vec{k} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}) - i\omega V_\omega(\vec{r}) = 0 \quad (6.155)$$

et donc

$$V_\omega(\vec{r}) = \vec{n} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}). \quad (6.156)$$

Ainsi

$$\vec{E}_\omega = i\omega \left[ \vec{A}_\omega(\vec{r}) - (\vec{n} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r})) \vec{n} \right]. \quad (6.157)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

On a alors les deux relations simples

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}_\omega &= i\vec{k} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}). \\ \vec{E}_\omega &= \vec{B}_\omega \wedge \vec{n}. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (6.158a) \\ (6.158b) \end{aligned}$$

La preuve de (6.158b) est immédiate en utilisant la formule du double produit vectoriel

$$(\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} \quad (6.159)$$

qui conduit ici à

$$\vec{B}_\omega \wedge \vec{n} = i(\vec{k} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r})) \wedge \vec{n} = i \left[ (\vec{k} \cdot \vec{n}) \vec{A}_\omega(\vec{r}) - (\vec{n} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r})) \vec{k} \right] \quad (6.160)$$

$$= i\omega \left[ \vec{A}_\omega(\vec{r}) - (\vec{n} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r})) \vec{n} \right] \quad (6.161)$$

puisque  $\omega = k$ .

### 6.4.4. Composante $\vec{A}_\omega(\vec{r})$

L'expression (6.139) de  $\vec{A}_\omega(\vec{r})$  se simplifie pour  $R \gg a$  en

$$\boxed{\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \int d^3r' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \vec{j}_\omega(\vec{r}').} \quad (6.162)$$

*Preuve :*

Il suffit d'utiliser le développement de

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \sim \frac{e^{ik(r-\vec{r}' \cdot \vec{n})}}{r} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'}, \quad (6.163)$$

qui s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned} |\vec{r}-\vec{r}'| &= [(\vec{r}-\vec{r}')^2]^{1/2} = [r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2]^{1/2} = r \left[ 1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{1/2} \\ &\sim r - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}' \sim r - \vec{n} \cdot \vec{r}'. \end{aligned} \quad (6.164)$$

**Domaine de validité dans le cas  $a \gtrsim \lambda$  :**

On peut améliorer le développement (6.164) en gardant le terme suivant dans

$$(1 + \epsilon)^\alpha \sim 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2}\epsilon^2 + \dots \quad (6.165)$$

soit

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= r \left[ 1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{1/2} \\ &= r \left[ 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^4} + o\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \right] \\ &\sim r - \vec{n} \cdot \vec{r}' + \frac{1}{2r} \left( r'^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2 \right) + o\left(\frac{r'^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (6.166)$$

Si  $a \gtrsim \lambda$ , la condition  $R \gg a$  conduit donc pour le terme de phase à

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \sim e^{ik(r-\vec{r}'\cdot\vec{n})} e^{ik\frac{r'^2-(\vec{n}\cdot\vec{r}')^2}{2r}}. \quad (6.167)$$

Si l'on suppose que  $O$  est au centre de la source, la phase du terme correctif s'écrit

$$k\frac{r'^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2}{2r} \sim k\frac{a^2}{8R} \quad (6.168)$$

puisque  $r' \lesssim a/2$ . On pourra typiquement négliger cette correction devant  $k\vec{r}' \cdot \vec{n}$ , qui varie de l'ordre de  $ka = \frac{2\pi}{\lambda}a \gtrsim 2\pi$ , si cette phase additionnelle vérifie par exemple  $\frac{a^2}{8R} \lesssim \frac{2\pi}{16}$ , soit donc  $\frac{2\pi a^2}{\lambda 8R} \lesssim \frac{2\pi}{16}$ , i.e.

$$R \gtrsim R_f = \frac{2a^2}{\lambda} \quad \text{distance de Fraunhofer.} \quad (6.169)$$

### 6.4.5. Energie rayonnée

Dans le cas d'une oscillation quelconque, a priori limitée dans le temps et donc non périodique, le rayonnement de la source aura un spectre continu en fréquence. Partant du vecteur de Poynting

$$\vec{S}(t, \vec{r}) = \vec{E} \wedge \vec{B} = \vec{n}B^2 = \vec{n} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{\omega'}(\vec{r}) e^{-i(\omega+\omega')t}, \quad (6.170)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

on peut exprimer l'énergie totale rayonnée par angle solide  $d^2\Omega$  par

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2W}{d^2\Omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{S}(t, \vec{r}) \cdot \vec{n} r^2 \\
 &= r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{\omega'}(\vec{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(\omega+\omega')t} \\
 &= 2\pi r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{-\omega}(\vec{r}) = 2\pi r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_\omega^*(\vec{r})
 \end{aligned} \tag{6.171}$$

où l'avant-dernière égalité est obtenue par intégration sur  $t$ , qui conduit à une distribution de Dirac, puis par intégration sur  $\omega'$ , et la dernière égalité vient du fait que  $\vec{B}(t, \vec{r})$  est réel et donc  $\vec{B}_\omega^*(\vec{r}) = \vec{B}_{-\omega}(\vec{r})$ .

L'énergie par angle solide et par élément spectral  $\omega > 0$  est donc

$$\boxed{\frac{d^3W}{d^2\Omega d\omega} = 4\pi r^2 \left| \vec{B}_\omega(\vec{r}) \right|^2.} \tag{6.172}$$

L'énergie totale rayonnée par angle solide s'obtient alors par intégration sur  $\omega$ , puis l'énergie totale par intégration sur  $d^2\Omega$ .

En résumé :

◇ l'énergie totale  $W$

◇ sa distribution angulaire  $\frac{d^2W}{d^2\Omega}$

◇ ses éléments spectraux  $\frac{d^3W}{d^2\Omega d\omega}$

s'obtiennent, à partir de la connaissance de  $\vec{j}(t, \vec{r})$ , par la suite de transformations  $\vec{j}(t, \vec{r}) \longrightarrow \vec{j}_\omega(\vec{r}) \longrightarrow \vec{A}_\omega(\vec{r}) \longrightarrow \vec{B}_\omega(\vec{r})$ .

### 6.4.6. Cas d'une source périodique

Pour une source périodique, de période  $T$  (avec  $\omega_0 T = 2\pi$ ), on développe en série de Fourier

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \vec{j}_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t} \tag{6.173}$$

$$\vec{j}_n(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{j}(t, \vec{r}) e^{in\omega_0 t}. \tag{6.174}$$



Les relations linéaires entre  $\vec{j}_\omega$  et  $\vec{A}_\omega$  (6.162), entre  $\vec{B}_\omega$  et  $\vec{A}_\omega$  (6.158a), et entre  $\vec{E}_\omega$  et  $\vec{B}_\omega$  (6.158b) restent valables pour les composantes spectrales  $n$ , en posant simplement  $\omega = n\omega_0$ .

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{S}(t, \vec{r}) &= \vec{n} B^2 = \vec{n} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) \cdot \vec{B}_m(\vec{r}), \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-i(n+m)t} \\ &= \vec{n} B^2 = \vec{n} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) \cdot \vec{B}_m(\vec{r}) \delta_{n,-m} = \vec{n} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{-n}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (6.175)$$

soit finalement, puisque  $\vec{B}_0(\vec{r}) = 0$  (en effet  $\vec{B}_{n\omega_0}(\vec{r}) = i\vec{k} \wedge \vec{A}_{n\omega_0}(\vec{r}) = 0$  car  $\vec{k} = 0$  pour  $n = 0$ ),

$$\vec{S}_{moy}(\vec{r}) = 2\vec{n} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \vec{B}_n(\vec{r}) \right|^2. \quad (6.176)$$

En conclusion,

$$\boxed{\frac{d^2 P_{moy}}{d^2 \Omega} = r^2 \vec{S}_{moy}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^2 \left| \vec{B}_n(\vec{r}) \right|^2.} \quad (6.177)$$

### 6.4.7. Approximation dipolaire électrique : $a \ll \lambda$

On considère une distribution de charges de petite dimension par rapport à  $\lambda$ , i.e.  $a \ll \lambda$ .

Du point de vue du mouvement des charges, ceci correspond pour un mouvement périodique de période  $T$ , à  $v \sim \frac{a}{T} = \frac{a}{\lambda} c \ll c$ . Les charges sont donc par hypothèse *en mouvement non relativiste*.

La limite  $a \ll \lambda$  s'écrit aussi  $a \ll \frac{2\pi}{k}$  i.e.  $ka \ll 2\pi$ . Partant de l'expression (6.162), on peut alors calculer  $\vec{A}_\omega$  par un développement en série de  $e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'}$  : avec  $|k\vec{n} \cdot \vec{r}'| < ka \ll 2\pi$  on a

$$\begin{aligned} \vec{A}_\omega(\vec{r}) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3 r' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}' \vec{j}_\omega(\vec{r}')} \\ &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-ik)^p}{p!} \int d^3 r' (\vec{n} \cdot \vec{r}')^p \vec{j}_\omega(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (6.178)$$

développement multipolaire que l'on peut tronquer à un ordre donné en  $p$ .

## 6. Théorie classique du rayonnement

L'approximation la plus simple, appelée approximation dipolaire, consiste à ne garder que le terme d'ordre le plus bas  $p = 0$ , i.e.  $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \sim 1$ , soit

$$\boxed{\vec{A}_\omega(\vec{r}) \sim \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{4\pi r} \int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}') \quad \text{approximation dipolaire.}} \quad (6.179)$$

On notera que dans cette approximation, l'effet de temps retardé est présent dans le terme de phase global, factorisé,  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ .

### Oscillation limitée dans le temps d'un système de charges

Nous allons à présent appliquer l'approximation dipolaire électrique précédente au cas d'un système de  $N$  particules. Chacune de ces particules, étiquetée par l'indice  $a$ , de charge  $q_a$ , est située en  $\vec{\xi}_a(t)$ , et se déplace à la vitesse  $\vec{V}_a(t)$  à l'instant  $t$ . Le courant correspondant s'écrit

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}_a(t)). \quad (6.180)$$

Partant de sa représentation spectrale

$$\vec{j}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{j}(t, \vec{r}) e^{i\omega t}, \quad (6.181)$$

on a

$$\begin{aligned} \vec{A}_\omega(\vec{r}) &= \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{4\pi r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \int d^3r' \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{\xi}_a(t)) \\ &= \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{4\pi r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t). \end{aligned} \quad (6.182)$$

Introduisons le moment dipolaire électrique

$$\vec{d}(t) = \sum_{a=1}^N q_a \vec{\xi}_a(t), \quad (6.183)$$

dont la dérivée temporelle s'écrit

$$\dot{\vec{d}}(t) = \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t). \quad (6.184)$$

L'expression du potentiel vecteur (6.182) s'écrit alors

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \dot{\vec{d}}(t), \quad (6.185)$$

d'où la forme particulièrement simple

$$\boxed{\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left[ \dot{\vec{d}} \right]_\omega \quad \text{approximation dipolaire.}} \quad (6.186)$$

De même, on obtient

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = ik\vec{n} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{n} \wedge \left[ \ddot{\vec{d}} \right]_\omega \quad (6.187)$$

avec

$$\left[ \ddot{\vec{d}} \right]_\omega = -i\omega \left[ \dot{\vec{d}} \right]_\omega. \quad (6.188)$$

Ceci permet d'en déduire l'énergie par angle solide et par élément spectral

$$\frac{d^3W}{d^2\Omega d\omega} = \frac{1}{4\pi} \left| \vec{n} \wedge \left[ \ddot{\vec{d}} \right]_\omega \right|^2. \quad (6.189)$$

En notant  $\theta = (\widehat{\vec{n}, \vec{a}'})$ , on a donc finalement

$$\boxed{\frac{d^3W}{d^2\Omega d\omega} = \frac{1}{4\pi} \sin^2 \theta \left| \left[ \ddot{\vec{d}} \right]_\omega \right|^2 \quad \text{rayonnement dipolaire.}} \quad (6.190)$$

### Systeme oscillant

Pour un système oscillant à la seule pulsation  $\omega_0$ , on aura

$$\vec{d}(t) = \vec{d}_1 e^{-i\omega_0 t} + \vec{d}_1^* e^{i\omega_0 t} = 2\text{Re} \left[ \vec{d}_1 e^{-i\omega_0 t} \right]. \quad (6.191)$$

Alors

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left[ \dot{\vec{d}} \right]_1 \quad (6.192)$$

et la puissance moyenne rayonnée par angle solide est donnée par

$$\frac{d^2P_{moy}}{d^2\Omega} = 2r^2 \left| \vec{B}_1(\vec{r}) \right|^2 = \frac{1}{8\pi^2} \left| \vec{n} \wedge \left[ \ddot{\vec{d}} \right]_1 \right|^2 \quad (6.193)$$

## 6. Théorie classique du rayonnement

soit

$$\boxed{\frac{d^2 P_{moy}}{d^2 \Omega} = \frac{1}{8\pi^2} \sin^2 \theta \left| \left[ \ddot{\vec{d}} \right]_1 \right|^2 \quad \text{avec} \quad \left[ \ddot{\vec{d}} \right]_1 = -i\omega_0 \left[ \dot{\vec{d}} \right]_1 = -\omega_0^2 \vec{d}_1.}$$

(6.194)

La distribution du rayonnement en fonction de la direction est donc donnée par le facteur  $\sin^2 \theta$ .

# 7. Théorie quantique du rayonnement

L'électrodynamique quantique permet de décrire les interactions électromagnétiques des particules chargées. Dans ce chapitre, nous allons présenter une version simplifiée de cette théorie, la description quantique d'un système {champ + particules} à basses énergies, régime où l'on peut négliger la possibilité de création de paires particules-antiparticules. Nous allons donc quantifier le champ électromagnétique, tandis que la matière sera traitée par la mécanique quantique, le nombre de particules de matière restant fixe.

Techniquement, la quantification d'un champ scalaire est beaucoup plus simple à mener. On quantifie cependant ici directement le champ électromagnétique pour son intérêt physique évident. Comme on va le voir, un champ vectoriel (massif ou non) a la propriété que le champ  $A^0$  n'est pas une variable dynamique. On passe alors de  $2 \times 4 = 8$  degrés de liberté pour  $A^\mu$  et  $\dot{A}^\mu$  à 6 degrés de liberté pour  $A^i$  et  $\dot{A}^i$ . D'autre part, dans le cas d'un champ libre de masse nulle, l'invariance de jauge fait disparaître un degré de liberté supplémentaire, de sorte qu'il reste 4 degrés de liberté pour  $A^i$  et son moment conjugué  $\vec{E}_\perp$  (la réduction du nombre de degrés de liberté se manifeste par la transversalité des polarisations du photon). Nous allons organiser le lagrangien en degrés de liberté indépendants avant de procéder à la quantification.

Pour cela, on abandonnera la covariance relativiste explicite en utilisant la *jauge de Coulomb*. Cette description est bien adaptée à l'étude des processus d'interaction entre matière (atomes et molécules) et rayonnement.

## 7.1. Quantification d'un oscillateur harmonique

### 7.1.1. Quantification canonique

En vue d'une utilisation ultérieure dans le cadre de la quantification de la dynamique des photons, pour laquelle nous allons voir qu'elle peut se ramener à une collection infinie d'oscillateurs indépendant, nous allons rappeler la méthode de quantification d'un oscillateur harmonique, en utilisant l'approche de Dirac. L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique à une dimension est

## 7. Théorie quantique du rayonnement

donnée par (en posant  $m = 1$ )

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (7.1)$$

Elle correspond au lagrangien

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2). \quad (7.2)$$

Le moment conjugué de  $x$  est  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$  et l'hamiltonien s'obtient par transformation de Legendre, i.e.

$$H = p\dot{x} - L = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2). \quad (7.3)$$

Les équations de Hamilton, qui décrivent la dynamique classique de l'oscillateur, sont alors

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (7.4)$$

La quantification canonique consiste à remplacer les variables conjuguées  $x$  et  $p$  par des opérateurs hermitiques qui agissent sur un espace de Hilbert, l'espace des états, vérifiant la relation de commutation

$$[x, p] = i\hbar. \quad (7.5)$$

On déduit de cette relation que

$$[p, f(x)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (7.6)$$

$$[x, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p} \quad (7.7)$$

de sorte que l'on peut faire les identifications

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (7.8)$$

dans l'espace des impulsions, et

$$x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \quad (7.9)$$

dans l'espace des coordonnées. L'hamiltonien  $H$  devient un opérateur qui détermine l'évolution du système. On peut adopter deux points de vue.

### Point de vue de Schrödinger

Dans ce point de vue, les opérateurs  $x$  et  $p$  sont fixes et les vecteurs d'état  $|\psi_S(t)\rangle$  évoluent suivant l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = H |\psi_S(t)\rangle. \quad (7.10)$$

Il existe un opérateur unitaire d'évolution  $U(t, t_0)$  qui amène les vecteurs d'état de l'instant  $t_0$  à l'instant  $t$ , suivant la relation

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle, \quad (7.11)$$

et donc

$$\langle \psi_S(t) | = \langle \psi_S(t_0) | U^\dagger(t, t_0) = \langle \psi_S(t_0) | U^{-1}(t, t_0). \quad (7.12)$$

L'opérateur d'évolution  $U(t, t_0)$  vérifie l'équation

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \quad \text{avec} \quad U(t_0, t_0) = 1. \quad (7.13)$$

Il satisfait à la loi de composition multiplicative

$$U(t, t_0) = U(t, t_1) U(t_1, t_0), \quad (7.14)$$

pour laquelle on montre facilement qu'elle définit un groupe abélien, à un paramètre. Supposant  $H$  indépendant du temps, on pourra alors écrire

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}. \quad (7.15)$$

### Point de vue d'Heisenberg

Dans le point de vue de Heisenberg, les vecteurs d'état  $|\psi_H\rangle$  sont fixes. En choisissant un instant arbitraire  $t_0$  où les deux représentations coïncident, on écrira

$$|\psi_H\rangle = U^{-1}(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle \quad (7.16)$$

et les opérateurs  $A_H(t)$  s'obtiennent par l'entrelacement

$$A_H(t) = U^{-1}(t, t_0) A_S U(t, t_0), \quad (7.17)$$

de façon à préserver les éléments de matrice des observables physiques dans les deux représentations, i.e.

$$\underbrace{\langle \psi'_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle}_{\text{représ. Schrödinger}} = \underbrace{\langle \psi'_H | A_H(t) | \psi_H \rangle}_{\text{représ. Heisenberg}} \quad (7.18)$$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

En effet,

$$\langle \psi'_H(t) | A_H(t) | \psi_H(t) \rangle = \langle \psi'_S(t) | U(t, t_0) A_H(t) U^{-1}(t, t_0) | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi'_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle$$

ce qui impose que  $A_S = U(t, t_0) A_H(t) U^{-1}(t, t_0)$ .

Les opérateurs dans la représentation d'Heisenberg évoluent au cours du temps suivant l'équation

$$\boxed{\frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{1}{i\hbar} [A_H(t), H_H] + \left( \frac{\partial A_S}{\partial t} \right)_H} \quad (7.19)$$

*Preuve :*

Pour simplifier, on note  $H_S = H_S(t)$ ,  $H_H = H_S(t)$ ,  $A_H = A_S(t)$  et  $U = U(t, t_0)$ . Partant de (7.17), on a donc

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{d}{dt} U^{-1} A_S U + U^{-1} \frac{dA_S}{dt} U + U^{-1} A_S \frac{d}{dt} U. \quad (7.20)$$

Or

$$U^{-1} U = \text{Id} \quad (7.21)$$

d'où

$$\frac{d}{dt} U^{-1} U + U^{-1} \frac{d}{dt} U = 0 \quad (7.22)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} U^{-1} = -U^{-1} \left( \frac{d}{dt} U \right) U^{-1} = -U^{-1} \frac{1}{i\hbar} H U U^{-1} = -U^{-1} \frac{1}{i\hbar} H. \quad (7.23)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_H(t) &= -\frac{1}{i\hbar} U^{-1} H A_S U + U^{-1} \frac{dA_S}{dt} U + \frac{1}{i\hbar} U^{-1} A_S H U \\ &= -\frac{1}{i\hbar} U^{-1} H U U^{-1} A_S U + U^{-1} \frac{dA_S}{dt} U + \frac{1}{i\hbar} U^{-1} A_S U U^{-1} H U \\ &= \frac{1}{i\hbar} [A_H(t), H_H] + \left( \frac{\partial A_S}{\partial t} \right)_H. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Le point de vue de Heisenberg conduit à une analogie formelle entre Mécanique Classique et Mécanique Quantique : l'équation (7.19) donne pour  $x_H(t)$  et  $p_H(t)$ , en utilisant les équations (7.8) et (7.9),

$$\frac{dx_H}{dt} = \frac{[x_H, H]}{i\hbar} = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_H \quad \text{et} \quad \frac{dp_H}{dt} = \frac{[p_H, H]}{i\hbar} = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_H \quad (7.25)$$

qui ont la même forme que les équations de Hamilton (7.4).



## 7.1.2. Rappels sur l'oscillateur harmonique

### Spectre

L'hamiltonien de l'oscillateur harmonique peut se réécrire à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation introduits par Dirac en 1927, en posant

$$a = \frac{\omega x + ip}{\sqrt{2\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \frac{\omega x - ip}{\sqrt{2\hbar\omega}}, \quad (7.26)$$

conjugués hermitiques l'un de l'autre. Ces opérateurs vérifient la relation de commutation

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (7.27)$$

et les opérateurs  $x$  et  $p$  s'écrivent alors

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a), \quad (7.28)$$

d'où l'expression de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right), \quad (7.29)$$

avec l'opérateur

$$N = a^\dagger a, \quad (7.30)$$

dont les vecteurs propres sont notés  $|n\rangle$ , de valeurs propres  $n$ , qui sont aussi les vecteurs propres de  $H$ , de valeurs propres  $\hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$ , où  $n = 0, 1, 2, \dots$ . On note  $|0\rangle$  le vide, qui par définition est annihilé par l'opérateur  $a$ . On a les relations

$$\begin{aligned} a|0\rangle &= 0, \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \end{aligned} \quad (7.31)$$

### Représentation de Heisenberg

En représentation de Heisenberg, les opérateurs de création et d'annihilation s'écrivent

$$a_H^\dagger(t) = a^\dagger e^{i\omega(t-t_0)}, \quad a_H(t) = a e^{-i\omega(t-t_0)}. \quad (7.32)$$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

*Preuve :*

On a

$$[N, a] = -a \quad \text{et} \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (7.33)$$

donc

$$\frac{da_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a_H(t), H] = -i\omega \quad \text{et} \quad \frac{da_H^\dagger(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a_H^\dagger(t), H] = i\omega, \quad (7.34)$$

d'où le résultat par intégration immédiate.

### Interprétation en termes de particules

Deux niveaux d'énergie consécutifs de  $H$  diffèrent d'un quantum d'énergie  $\hbar\omega$ . L'état  $|n\rangle$  s'interprète comme décrivant un système de  $n$  particules (phonon, photon, etc.) ayant toutes les mêmes caractéristiques :

- énergie  $\hbar\omega$
- quantité de mouvement  $\hbar\vec{k}$
- polarisation  $\vec{\epsilon}$  pour des photons.

L'opérateur  $N$  est le nombre de particules. L'opérateur  $a^\dagger$  crée une particule et l'opérateur  $a$  détruit une particule. Le vecteur d'état  $|0\rangle$  représente le vide, d'énergie  $\hbar\omega/2$ .

Les particules ainsi décrites sont des bosons : elles sont toutes dans le même état quantique et leur nombre  $n$  est arbitraire.

### 7.1.3. Ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants

Considérons maintenant un ensemble de  $p$  oscillateurs harmoniques indépendants. L'espace des états  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_p$  est alors le produit tensoriel des espaces  $\mathcal{E}_i$  des différents oscillateurs. L'hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_{i=1}^p \hbar\omega_i \left( a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \quad (7.35)$$

et les opérateurs de l'oscillateur  $k$  commutent avec ceux de l'oscillateur  $l \neq k$  :

$$\left[ a_k, a_l^\dagger \right] = \delta_{kl}, \quad \text{et} \quad \left[ a_k, a_l \right] = \left[ a_k^\dagger, a_l^\dagger \right] = 0. \quad (7.36)$$

Le vide est noté  $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$ . Les vecteurs propres de  $H$  sont alors

$$|m_1, m_2, \dots, m_p\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \otimes \cdots \otimes |m_p\rangle \quad (7.37)$$

$$= \frac{(a_1^\dagger)^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{(a_2^\dagger)^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} \cdots \frac{(a_p^\dagger)^{m_p}}{\sqrt{m_p!}} |0\rangle. \quad (7.38)$$

Ils forment une base de l'espace  $\mathcal{E}$ , et ont pour énergie  $\sum_{i=1}^p \hbar\omega_i (m_i + 1/2)$ .

Nous verrons plus loin que le champ électromagnétique libre se comporte comme une telle collection (infinie) d'oscillateurs harmoniques indépendants.

#### 7.1.4. Transformation unitaire d'opérateurs création-annihilation

Supposons que le système soit constitué d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques ayant tous la même pulsation  $\omega_i$ . On a donc un *oscillateur isotrope à  $p$  dimensions*. Ses niveaux d'énergie ne dépendent que de  $m = \sum_{i=1}^p m_i$  et sont dégénérés pour  $m > 0$ .

Un tel système possède une symétrie unitaire. En effet, considérons la transformation des opérateurs de création-annihilation

$$a'_i = U_{ij} a_j, \quad (7.39)$$

$$a'_i{}^\dagger = U_{ij}^* a_j^\dagger \quad (7.40)$$

où  $U_{ij}$  est une matrice unitaire  $p \times p$ .

Notons la cohérence de cette transformation :

$$\begin{aligned} a'_i &= U_{ij} a_j = (Ua)_i \\ \text{donc } a'_i{}^\dagger &= (a^\dagger U^\dagger)_i = a_j^\dagger U_{ji}^\dagger = a_j^\dagger U_{ij}^* = U_{ij}^* a_j^\dagger. \end{aligned}$$

Une telle transformation possède les propriétés suivantes :

◇ Elle préserve la forme (7.36) des relations de commutation :

$$\begin{aligned} [a'_i, a'_j{}^\dagger] &= [U_{ik} a_k, U_{j\ell}^* a_\ell^\dagger] = U_{ik} U_{j\ell}^* [a_k, a_\ell^\dagger] = U_{ik} U_{j\ell}^* \delta_{k\ell} \\ &= U_{ik} U_{jk}^* = U_{ik} U_{kj}^\dagger = \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$[a'_i, a'_j] = [U_{ik} a_k, U_{j\ell} a_\ell] = U_{ik} U_{j\ell} [a_k, a_\ell] = 0. \quad (7.42)$$

◇ Elle préserve la forme de l'opérateur  $N = a_j^\dagger a_j$  :

$$a'_j{}^\dagger a'_j = U_{jk}^* a_k^\dagger U_{j\ell} a_\ell = U_{jk}^* U_{j\ell} a_k^\dagger a_\ell = \delta_{k\ell} a_k^\dagger a_\ell = a_k^\dagger a_k. \quad (7.43)$$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

- ◇ Le changement de base pour les états propres de  $H$  conduit à la même forme fonctionnelle pour ceux-ci, puisque  $H$  garde la même forme :

$$H = \hbar\omega \sum_{i=1}^p \left( a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \sum_{i=1}^p \left( a_i'^\dagger a_i' + \frac{1}{2} \right), \quad (7.44)$$

et donc les états

$$|m'_1, m'_2, \dots, m'_p\rangle = \frac{(a_1'^\dagger)^{m'_1}}{\sqrt{m'_1!}} \frac{(a_2'^\dagger)^{m'_2}}{\sqrt{m'_2!}} \dots \frac{(a_p'^\dagger)^{m'_p}}{\sqrt{m'_p!}} |0\rangle, \quad (7.45)$$

forment une autre base de l'espace  $\mathcal{E}$ , d'énergie  $\hbar\omega \sum_{i=1}^p (m'_i + 1/2)$ .

## 7.2. Vers la quantification du champ électromagnétique

Nous allons à présent mener une succession de transformations afin d'organiser le lagrangien d'un système de particules chargées et de leur champ électromagnétique, ce dernier devenant une collection infinie d'oscillateurs harmoniques, que nous pourrons ensuite quantifier.

### 7.2.1. Lagrangien

Considérons un système formé de  $N$  particules chargées  $a = 1, \dots, N$ , de charges  $q_a$  et de coordonnées  $\vec{x}_a(t)$ . La densité de charge de la particule  $a$  est alors

$$\rho_a(\vec{r}, t) = q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)). \quad (7.46)$$

Le quadricourant s'écrit ( $c = 1$ )

$$j^\mu(\vec{r}, t) = \left( \rho, \vec{J} \right) = \sum_{a=1}^N \rho_a(\vec{r}, t) \left( 1, \dot{\vec{x}}_a(t) \right). \quad (7.47)$$

Les particules sont supposées non relativistes et sans spin. Le lagrangien du système {champ électromagnétique + particules} est alors

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \left( \dot{\vec{x}}_a \right)^2 + \int \mathcal{L} d^3x, \quad (7.48)$$

$$\mathcal{L} = -\rho V + \vec{J} \cdot \vec{A} + \frac{1}{2} \left( \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) \quad (7.49)$$

## 7.2.2. Problèmes rencontrés dans la quantification du champ électromagnétique

### Impulsion du champ et quantification

Considérons  $A^\mu$  comme variable dynamique du champ. Le champ moment conjugué  $\Pi_{A^\mu}$  de ce champ  $A^\mu$  est alors

$$\Pi_{A^\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}^\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A^\mu)} = -F^0{}_\mu \quad (7.50)$$

et donc

$$\Pi_{A^i} = -F^0{}_i = -E^i, \quad (7.51)$$

$$\Pi_{A^0} = 0. \quad (7.52)$$

Par ailleurs, les champs  $\Pi_{A^i}$  vérifient  $\sum_i \partial_i \Pi_{A^i} = -\partial_i E^i = -\rho$  qui ne dépend que de la position  $\vec{x}_a$  des particules.

La méthode de quantification remplace deux variables conjuguées par des opérateurs ayant un commutateur non nul. Deux difficultés apparaissent pour quantifier ce système :

- ◇ De façon évidente, on ne peut former un commutateur non nul avec le couple  $A^0, \Pi_{A^0}$ , puisque ce dernier est nul !
- ◇ L'existence d'une relation fonctionnelle entre les variables canoniques  $\vec{x}_a$  et  $\Pi_{A^i}(\vec{r}, t)$  est incompatible avec les formes usuelles des commutateurs. En effet les dérivées  $\partial_i \Pi_{A^j}$  par rapport à  $x^i$  sont des limites de différences de variables dynamiques infiniment proches : typiquement, on aura (en un point  $(x^1, x^2, x^3)$  où  $j$  est l'un des indices 1, 2, 3, et où l'on n'indique explicitement que la coordonnée  $x^j$  que l'on fait varier)

$$E^i(x^j + \delta) - E^i(x_j) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(x_j) \quad (7.53)$$

où  $E^i(x^j + \delta)$  et  $E^i(x_j)$  sont les valeurs de la composante  $E^i$  en des points distincts, et donc correspondent à des degrés de liberté distincts. Imposer une règle de commutation non triviale entre les degrés de liberté  $A^k$  et leur moment conjugué  $-E^k$  au même point, par exemple en  $x^j$  est donc impossible, puisqu'alors dans la relation (7.53) le commutateur du premier terme donnera 0, le second un résultat non nul et le second membre un résultat nul, ce qui est incompatible.

## 7. Théorie quantique du rayonnement

Ces difficultés sont directement reliées à l'invariance de jauge, ou de façon équivalente à la redondance des potentiels : un nombre infini de configuration distinctes pour  $A^\mu$  décrivent la même situation physique. Il est utile à ce stade de préciser le nombre de degrés de liberté indépendants d'un champ électromagnétique.

### Intermède : décomposition d'un vecteur en composantes transverses et longitudinales

De façon générale, un champ vectoriel  $V(t, \vec{r})$  peut toujours être décomposé comme la somme de deux termes :

$$\vec{V} = \vec{V}_\perp + \vec{V}_\parallel \quad (7.54)$$

avec

$$\vec{V}_\parallel = \vec{\nabla} f \quad \text{et donc} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_\parallel = 0, \quad (7.55)$$

appelée composante longitudinale, et

$$\vec{V}_\perp = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} \quad \text{et donc} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_\perp = 0, \quad (7.56)$$

appelée composante transverse (ou solénoïdal).

*Preuve :*

Passons dans l'espace de Fourier conjugué à l'espace des coordonnées spatiales. On a alors

$$\vec{V}(t, \vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\vec{V}}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (7.57)$$

Décomposons maintenant  $\tilde{\vec{V}}(t, \vec{k})$  en deux composantes orthogonale et parallèle à  $\vec{k}$ , i.e.

$$\tilde{\vec{V}}(t, \vec{k}) = \tilde{\vec{V}}_\perp(t, \vec{k}) + \tilde{\vec{V}}_\parallel(t, \vec{k}) \quad (7.58)$$

avec

$$\tilde{\vec{V}}_\perp(t, \vec{k}) = \vec{k} \tilde{f} \quad \text{et} \quad \tilde{\vec{V}}_\parallel(t, \vec{k}) \cdot \vec{k} = 0. \quad (7.59)$$

La seconde égalité précédente implique donc que  $\tilde{\vec{V}}_\parallel(t, \vec{k})$  peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{\vec{V}}_\parallel(t, \vec{k}) = \vec{k} \wedge \tilde{\vec{U}}_\parallel(t, \vec{k}). \quad (7.60)$$

Il suffit alors d'injecter la décomposition (7.58) dans le développement de Fourier (7.57) pour en déduire l'écriture (7.54,7.55,7.56) (à un facteur  $i$  près absorbé dans la définition de  $\vec{U}$ ).

En termes de comptage de nombre de degrés de liberté, la composante longitudinale  $\vec{V}_{\parallel}$  décrit un espace de dimension 1, alors que la composante  $\vec{V}_{\perp}$  couvre un espace de dimension 2, perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

Par cohérence, un vecteur  $\vec{V}$  qui satisfait à  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  sera appelé vecteur transverse (il peut de façon équivalente s'écrire comme un rotationnel), et un vecteur qui satisfait à  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$  sera appelé vecteur longitudinal (il peut de façon équivalente s'écrire comme un gradient).

### Nombre de degrés de liberté en électrodynamique

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , qui sont des tri-vecteurs mesurables, fonctions de  $(t, \vec{r})$ , correspondent donc a priori à  $2 \times 3 = 6$  degrés de liberté. Cependant, leurs composantes sont reliées par les deux équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.61)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (7.62)$$

L'Eq. (7.61) impose que  $\vec{B}_{\parallel} = 0$ , ce qui élimine un degré de liberté. Par ailleurs, l'Eq. (7.62) introduit une relation entre les composantes transverses de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Ceci élimine 2 degrés de liberté. En conclusion, le couple  $(\vec{E}, \vec{B})$  possède 3 degrés de liberté.

Le même décompte peut être fait à l'aide du quadripotiel. A priori, celui-ci correspond à 4 degrés de liberté. Mais l'invariance de jauge fait intervenir une fonction  $\alpha$  arbitraire, de sorte qu'il reste, une fois la jauge fixée, 3 degrés de liberté, en accord avec le décompte ci-dessus en termes du couple  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

En absence de sources, l'équation de Maxwell-Gauss conduit à  $\vec{E}_{\parallel} = 0$ , ce qui élimine un degré de liberté supplémentaire. L'équation de Maxwell-Ampère donne une relation supplémentaire entre les composantes transverses de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , qui permet d'obtenir une équation d'onde pour chacune des composantes, sans changer le nombre de degrés de liberté. Il reste donc deux degrés de liberté dans le cas libre, correspondant aux deux polarisations transverses bien connues.

### Méthode de quantification utilisée

La première difficulté, concernant le fait que  $\Pi_{A^0} = 0$ , sera réglée en éliminant la variable redondante  $A^0 = V$ . Cette élimination est rendue plus simple

## 7. Théorie quantique du rayonnement

en utilisant la jauge de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . La covariance des équations n'est alors plus manifeste.

*Remarque :*

De façon générale, lorsqu'une vitesse  $\dot{x}_0$  (c'est le cas ici de  $\dot{A}^0(\vec{r}, t)$  en tout point  $\vec{r}$ ) n'intervient pas dans un lagrangien  $L(x_0, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ , l'équation d'Euler-Lagrange relative à  $x_0$

$$\frac{\delta L}{\delta x_0}(x_0, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) = 0 \quad (7.63)$$

permet de considérer  $x_0$  comme une fonction implicite

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$$

des autres variables et vitesses. Le système peut alors être décrit par les  $2N$  variables et vitesses  $x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N$  et le lagrangien

$$L' = L(f(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N), x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N).$$

Si le principe de moindre action est satisfait quand le système est décrit par  $L$  avec la variable  $x_0$ , il reste satisfait quand le système est décrit par  $L'$ . En effet,

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, N, \quad \frac{d}{dt} \frac{\delta L'}{\delta \dot{x}_i} = \frac{\delta L'}{\delta x_i} \quad \text{s'écrit} \\ \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_0} \right] = \frac{\delta L}{\delta x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\delta L}{\delta x_0} \end{aligned} \quad (7.64)$$

qui conduit, puisque chacun des seconds termes des deux membres de l'équation précédente est nul, à

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} = \frac{\delta L}{\delta x_i}. \quad (7.65)$$

La seconde difficulté, concernant le fait que les  $\Pi_{A^i}$  sont reliés entre eux, sera réglée en remplaçant les variables liées  $A^i$  par des variables indépendantes, appelées variables normales.

### Autre méthode de quantification

On peut quantifier le système des particules et du champ électromagnétique en gardant la covariance des équations. On rajoute pour cela au lagrangien une densité de la forme

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (7.66)$$



qui contient la dérivée  $\dot{A}^0$ , ce qui permet cette fois une quantification canonique. La condition de Lorenz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , i.e.  $\mathcal{L}_{\text{jauge}} = 0$  correspond à la limite particulière  $\alpha \rightarrow \infty$ . Dans cette limite, on retrouve le système initial.

On peut également utiliser une jauge non covariante, en ajoutant au lagrangien un terme de la forme

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{\alpha} (n_\mu A^\mu)^2 \quad (7.67)$$

### 7.2.3. Elimination de $V$ et utilisation de la jauge de Coulomb

Décomposons  $\vec{E}$  dans ses composantes longitudinales et transverses

$$\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp \quad \text{où} \quad \vec{E}_\parallel = -\vec{\nabla}V, \quad \vec{E}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (7.68)$$

En jauge de Coulomb,  $V$  vérifie l'équation de Poisson (3.86). Sa solution est le potentiel coulombien (3.87) de la répartition instantanée de charge

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_a \frac{1}{4\pi} \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{x}_a(t)|}. \quad (7.69)$$

Examinons à présent chacune des contributions au lagrangien (7.49). La contribution de  $\vec{E}^2$  s'écrit

$$\frac{1}{2} \int \vec{E}^2 d^3x = \frac{1}{2} \int \vec{E}_\perp^2 d^3x + \int \vec{E}_\perp \cdot \vec{E}_\parallel d^3x + \frac{1}{2} \int \vec{E}_\parallel^2 d^3x. \quad (7.70)$$

La deuxième intégrale du membre de droite est nulle. En effet,

$$\int (\partial_i V)(\partial_0 A^i) d^3x = - \int V \partial_0 \partial_i A^i d^3x = 0 \quad (7.71)$$

qui donne une contribution nulle dans la jauge de Coulomb.

La troisième s'écrit :

$$-\frac{1}{2} \int E_\parallel^i \partial_i V d^3x = \frac{1}{2} \int V \partial_i E_\parallel^i d^3x = \frac{1}{2} \int V \partial_i E^i d^3x = \frac{1}{2} \int V \rho d^3x, \quad (7.72)$$

où l'on a utilisé le fait que  $\partial_i E_\parallel^i = 0$  pour la deuxième égalité. Ajoutons la contribution  $-\int V \rho d^3x$  du terme d'interaction du lagrangien. On a alors

$$-\frac{1}{2} \int V \rho d^3x = - \sum_{a,b} \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3x' \frac{\rho_a(t, \vec{r}) \rho_b(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \sum_a W_{\text{Coul}}^a - U_{\text{Coul}} \quad (7.73)$$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

où

$$W_{\text{Coul}}^a = \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3x' \frac{\rho_a(\vec{r}, t) \rho_a(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.74)$$

est l'énergie coulombienne propre de la particule  $a$ , qui est infinie pour une répartition de charge ponctuelle, et

$$U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{a < b} \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3x' \frac{\rho_a(t, \vec{r}) \rho_b(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{a < b} \frac{1}{4\pi} \frac{q_a q_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \quad (7.75)$$

est l'énergie coulombienne d'interaction entre les particules. En négligeant l'énergie propre des particules, le lagrangien s'écrit donc, en remplaçant  $\vec{j}$  par son expression (7.47),

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - U_{\text{Coul}} + \sum_{a=1}^N q_a \dot{\vec{x}}_a \cdot \vec{A}(\vec{x}_a, t) + \frac{1}{2} \int \left[ (\dot{\vec{A}})^2 - (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 \right] d^3x. \quad (7.76)$$

### 7.2.4. Conditions aux limites périodiques

Il est pratique de pouvoir énumérer les degrés de liberté du champ par des indices discrets plutôt que continus. Cela peut se faire en plaçant le système dans une boîte cubique  $\mathcal{B}$  de côté  $\ell$  ( $|x^i| \leq \frac{\ell}{2}$ ), et en supposant que les champs et leurs dérivées vérifient des conditions aux limites périodiques

$$f(t, x^1, x^2, x^3) = f(t, x^1 + \ell, x^2, x^3) = f(t, x^1, x^2 + \ell, x^3) = f(t, x^1, x^2, x^3 + \ell). \quad (7.77)$$

On peut alors développer les champs en séries de Fourier

$$f(t, \vec{r}) = \sum_{n \in D} f_n(t) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \quad (7.78)$$

où  $D = \{\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{Z}^3\}$ . Dans la suite on notera  $n$  le vecteur  $\vec{n}$  pour alléger les notations. On pose  $\vec{k}_n = \frac{2\pi\vec{n}}{\ell}$ .

Rappel sur les séries de Fourier :

◇ Orthogonalité :

$$\int_{\mathcal{B}} e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} d^3x = \ell^3 \delta_{mn} = \ell^3 \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y} \delta_{m_z n_z}. \quad (7.79)$$

## 7.2. Vers la quantification du champ électromagnétique

◇ Coefficients de Fourier, transformation inverse de (7.78) :

$$f_n = \frac{1}{\ell^3} \int_{\mathcal{B}} f(t, \vec{r}) e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} d^3x. \quad (7.80)$$

◇ Distribution  $\delta^{(3)}$  :

par application immédiate de (7.80) on obtient les coefficient de Fourier de  $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ , et donc

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \sum_n \frac{1}{\ell^3} e^{i\vec{k}_n \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}. \quad (7.81)$$

◇ Identité de Parseval-Plancherel :

$$\int_{\mathcal{B}} f^*(t, \vec{r}) g(t, \vec{r}) d^3x = \sum_{mn} \int f_m^* g_n e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} d^3x = \sum_n \ell^3 f_n^* g_n. \quad (7.82)$$

et en particulier

$$\int |f(t, \vec{r})|^2 d^3x = \sum_n \ell^3 |f_n|^2. \quad (7.83)$$

◇ Fonction réelle :

$$f(t, \vec{r}) \Leftrightarrow \forall n \in D, f_n^* = f_{-n}. \quad (7.84)$$

◇ Passage au volume infini :

L'espace entier s'obtient en faisant la limite  $\ell \rightarrow \infty$ . Les sommes sur  $n$  deviennent alors des intégrales sur  $\vec{k}$ , avec les normalisations suivantes :

$$\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^3 f_n(t) \longrightarrow \tilde{f}(t, \vec{k}), \quad (7.85)$$

$$\sum_n \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^3 \longrightarrow \int d^3k, \quad (7.86)$$

$$\delta_{nn'} \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (7.87)$$

### 7.2.5. Le champ électromagnétique libre comme une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants

#### Décomposition de Fourier spatiale ; bases transverses

Considérons la décomposition de Fourier du potentiel vecteur

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \sum_{n \in D} \vec{A}_n(t) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (7.88)$$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

qui par hypothèse vérifie la condition de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{n \in D} i \vec{k}_n \cdot \vec{A}_n e^{i \vec{k}_n \cdot \vec{r}} = 0. \quad (7.89)$$

Pour chaque  $n$ , la composante  $\vec{A}_n$  est donc perpendiculaire à  $\vec{k}_n$ . Par ailleurs, ce potentiel étant réel, on a également, d'après la relation (7.84),  $\vec{A}_n^* = \vec{A}_{-n}$ . Pour éviter d'éventuelles singularités liées à la propagation de mode de fréquence nulle, nous supposons de plus que  $\vec{A}_n = 0$  pour  $n = (0, 0, 0)$ . Une telle restriction disparaît dans la limite  $\ell \rightarrow \infty$  lorsque les  $\vec{k}_n$  peuvent devenir infiniment petits. Soit  $D'$  une moitié de  $D^* = D - \{(0, 0, 0)\}$ , c'est-à-dire un sous-ensemble de  $D^*$  tel que pour tout  $n \in D^*$  alors exactement une seule des valeurs  $n$  ou  $-n$  se trouve dans  $D'$ . Par exemple,  $D' = \mathbb{N}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ .

Pour chaque  $n \in D'$ , introduisons une *base transverse* formée de deux vecteurs complexes<sup>1</sup>  $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). On a donc

$$\forall n \in D', \quad \hat{k}_n = \frac{\vec{k}_n}{k_n},$$

$$\text{et } \forall \alpha, \beta = 1, 2, \quad \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{n\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \cdot \hat{k}_n = 0. \quad (7.90)$$

On peut ainsi construire un projecteur sur l'espace transverse, dont les éléments de matrice sont donnés par

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{n\alpha}^{i*} \varepsilon_{n\alpha}^j = \delta^{ij} - \frac{k_n^i k_n^j}{k_n^2}, \quad (7.91)$$

comme on le vérifie facilement en le faisant agir d'une part sur  $\vec{k}$ , et d'autre part sur  $\vec{\varepsilon}_{n1}$  et  $\vec{\varepsilon}_{n2}$ .

On peut donc maintenant décomposer chaque  $\vec{A}_n$  sur la base des  $\varepsilon_{n\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ), sous la forme

$$\vec{A}_n = \sum_{\alpha} A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}. \quad (7.92)$$

Comme  $\vec{A}_{-n} = \vec{A}_n^*$ , on a

$$\vec{A}_{-n} = \vec{A}_n^* = \sum_{\alpha} A_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* \quad (7.93)$$

on aura donc, puisque  $\vec{k}_{-n} = -\vec{k}_n$ ,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum'_{n\alpha} \left( A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i \vec{k}_n \cdot \vec{r}} + A_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i \vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right) \quad (7.94)$$

---

1. Ce qui permet de décrire à la fois des photons polarisés linéairement ou elliptiquement.

## 7.2. Vers la quantification du champ électromagnétique

où la somme porte sur  $\alpha = 1, 2$  et  $n \in D'$ , que l'on indique par le symbole  $\sum'$ . Les variables complexes  $A_{n\alpha}(t)$  ( $n \in D', \alpha = 1, 2$ ) sont indépendantes les unes des autres.

De façon à ramener la somme précédente à une somme sur  $D$ , on peut sans perte de généralité définir les vecteurs transverses de  $\vec{k}_{-n}$  ( $n \in D'$ ) par

$$\vec{\varepsilon}_{-n\alpha} = \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* \quad (7.95)$$

et poser  $A_{-n\alpha} = A_{n\alpha}^*$ . Le développement (7.94) devient alors

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{n\alpha} A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (7.96)$$

et le champ électrique transverse peut s'écrire

$$\vec{E}_\perp = -\dot{\vec{A}} = -\sum'_{n\alpha} \left( \dot{A}_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + \dot{A}_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right) = -\sum_{n\alpha} \dot{A}_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (7.97)$$

### Expression du lagrangien en mode normaux

Nous allons maintenant exprimer le lagrangien (7.76) dans ces variables  $A_{n\alpha}$ . Considérons tout d'abord les deux termes faisant uniquement intervenir le champ. On a

$$\int \dot{\vec{A}}^2 d^3x = \ell^3 \sum_n \left| \sum_\alpha \dot{A}_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \right|^2 = \ell^3 \sum_{n\alpha} |\dot{A}_{n\alpha}|^2 = 2\ell^3 \sum'_{n\alpha} |\dot{A}_{n\alpha}|^2 \quad (7.98)$$

où l'on a utilisé pour la deuxième égalité l'orthonormalité, à  $n$  fixé, des  $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ , et le fait que  $A_{-n\alpha} = A_{n\alpha}^*$  pour la dernière. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 d^3x &= \ell^3 \sum_n \left| \sum_\alpha A_{n\alpha} i\vec{k}_n \wedge \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \right|^2 \\ &= \ell^3 \sum_{n\alpha} k_n^2 |A_{n\alpha}|^2 = 2\ell^3 \sum'_{n\alpha} \omega_n^2 |A_{n\alpha}|^2 \end{aligned} \quad (7.99)$$

où  $\omega_n = k_n$  ( $c = 1$ ).

Finalement, le lagrangien (7.76) s'écrit maintenant en fonction des variables discrètes indépendantes réelles  $\vec{x}_a, \vec{\dot{x}}_a$  ( $a = 1, \dots, N$ ) et complexes  $A_{n\alpha}, \dot{A}_{n\alpha}$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

( $n \in D'$ ,  $\alpha = 1$  ou  $2$ )

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) + \sum_a q_a \dot{\vec{x}}_a \cdot \vec{A}(t, \vec{x}_a) + L_{\text{champ}}$$

avec  $\vec{A}(t, \vec{x}_a) = \sum'_{n\alpha} \left( A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}_a} + A_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}_a} \right)$

et  $L_{\text{champ}} = \ell^3 \sum'_{n\alpha} \left( \left| \dot{A}_{n\alpha} \right|^2 - \omega_n^2 |A_{n\alpha}|^2 \right).$  (7.100)

Il est maintenant facile de montrer que la partie du lagrangien décrivant le champ est une collection d'oscillateurs harmoniques. Pour cela, remplaçons les variables complexes  $A_{n\alpha}$  par les variables réelles  $X_{nas}$  ( $s = 1, 2$ ) définies par

$$A_{n\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2\ell^3}} (X_{na1} + iX_{na2}). \quad (7.101)$$

On a alors

$$L_{\text{champ}} = \sum'_{nas} \frac{1}{2} \left( \dot{X}_{nas}^2 - \omega_n^2 X_{nas}^2 \right). \quad (7.102)$$

Dans ces variables  $X_{nas}$ , le champ libre apparaît comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants qui évoluent suivant les équations du mouvement

$$\ddot{X}_{nas} + \omega_n^2 X_{nas} = 0. \quad (7.103)$$

Posons

$$\vec{f}_{na1}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{2\ell^3}} \left( \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right), \quad (7.104)$$

$$\vec{f}_{na2}(\vec{r}) = i \sqrt{\frac{1}{2\ell^3}} \left( \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right), \quad (7.105)$$

qui définissent une *base réelle* des champs de vecteur transverse. Ces fonctions sont normalisées par ( $n \in D'$ )

$$\int \vec{f}_{nas}(\vec{r}) \cdot \vec{f}_{n'\alpha's'}(\vec{r}) d^3x = \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'}. \quad (7.106)$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et le champ électrique transverse  $\vec{E}_\perp = -\dot{\vec{A}}$  peuvent alors s'écrire, en partant des équations (7.94), (7.97) et (7.101),

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum'_{nas} X_{nas} \vec{f}_{nas}(\vec{r}), \quad (7.107)$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = - \sum'_{nas} \dot{X}_{nas} \vec{f}_{nas}(\vec{r}). \quad (7.108)$$

### 7.3. Quantification du champ électromagnétique

A noter que si  $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$  est réel ( $\vec{\varepsilon}_{-n\alpha} = \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* = \vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ ), les fonctions  $f_{n\alpha s}$  se simplifient en

$$\vec{f}_{n\alpha 1}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \cos \vec{k}_n \cdot \vec{r}, \quad \vec{f}_{n\alpha 2}(\vec{r}) = -\sqrt{\frac{2}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \sin \vec{k}_n \cdot \vec{r}. \quad (7.109)$$

#### Hamiltonien

Le moment canonique conjugué de  $X_{n\alpha s}$  est

$$\Pi_{n\alpha s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_{n\alpha s}} = \dot{X}_{n\alpha s} \quad (7.110)$$

et celui de  $x_a^i$  est

$$p_a^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i} = m_a \dot{x}_a^i + q_a A^i(\vec{x}_a, t) \quad (7.111)$$

Par transformation de Legendre du lagrangien, on obtient alors immédiatement l'expression de l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \sum_a \vec{p}_a \cdot \dot{\vec{x}}_a + \sum'_{n\alpha s} \Pi_{n\alpha s} \dot{X}_{n\alpha s} - L \\ mu &= \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 + U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) + \sum'_{n\alpha s} \frac{1}{2} \left( \dot{X}_{n\alpha s}^2 + \omega_n^2 X_{n\alpha s}^2 \right), \end{aligned} \quad (7.112)$$

qui s'écrit, dans les variables conjuguées  $\vec{x}_a$ ,  $\vec{p}_a$  et  $X_{n\alpha s}$ ,  $\Pi_{n\alpha s}$

$$H = \sum_a \frac{1}{2m_a} \left( \vec{p}_a - q_a \vec{A}(\vec{x}_a, t) \right)^2 + U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) + H_{\text{champ}} \quad (7.113)$$

avec

$$H_{\text{champ}} = \sum'_{n\alpha s} \frac{1}{2} \left( \Pi_{n\alpha s}^2 + \omega_n^2 X_{n\alpha s}^2 \right). \quad (7.114)$$

## 7.3. Quantification du champ électromagnétique

### 7.3.1. Quantification canonique

Plaçons-nous dans le point de vue de Schrödinger. La quantification canonique consiste à remplacer les variables conjuguées, qui sont réelles, par des opérateurs hermitiques indépendants du temps. Ils commutent entre-eux sauf pour

$$[x_a^i, p_a^i] = i\hbar \quad (7.115)$$

$$[X_{n\alpha s}, \Pi_{n\alpha s}] = i\hbar. \quad (7.116)$$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

En pratique, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique, il est plus pratique d'utiliser les opérateurs de création et d'annihilation associés à chacun des oscillateurs harmoniques, définis par

$$a_{n\alpha s} = \frac{\omega_n X_{n\alpha s} + i\Pi_{n\alpha s}}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} \quad \text{et} \quad a_{n\alpha s}^\dagger = \frac{\omega_n X_{n\alpha s} - i\Pi_{n\alpha s}}{\sqrt{2\hbar\omega_n}}. \quad (7.117)$$

Ils sont conjugués hermitiques l'un de l'autre, et vérifient les relations de commutation

$$\left[ a_{n\alpha s}, a_{n'\alpha' s'}^\dagger \right] = \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'}, \quad [a_{n\alpha s}, a_{n'\alpha' s'}] = [a_{n\alpha s}^\dagger, a_{n'\alpha' s'}^\dagger] = 0. \quad (7.118)$$

Inversement, comme pour l'oscillateur harmonique, on a

$$X_{n\alpha s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} (a_{n\alpha s}^\dagger + a_{n\alpha s}), \quad \Pi_{n\alpha s} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}} (a_{n\alpha s}^\dagger - a_{n\alpha s}) \quad (7.119)$$

de sorte que l'hamiltonien du champ libre s'écrit

$$H_{\text{champ}} = \sum'_{n\alpha s} \hbar\omega_n \left( a_{n\alpha s}^\dagger a_{n\alpha s} + \frac{1}{2} \right). \quad (7.120)$$

Le potentiel vecteur (7.107) devient l'opérateur indépendant du temps

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum'_{n\alpha s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} \left( a_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s} + a_{n\alpha s}^\dagger \vec{f}_{n\alpha s} \right). \quad (7.121)$$

D'après l'Eq. (7.110), la vitesse généralisée  $\dot{X}_{n\alpha s}$  est remplacée par l'opérateur  $\Pi_{n\alpha s}$ , de sorte que le champ électrique transverse (7.108) est maintenant l'opérateur

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \sum'_{n\alpha s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}} \left( i a_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s} - i a_{n\alpha s}^\dagger \vec{f}_{n\alpha s} \right). \quad (7.122)$$

### 7.3.2. Modes normaux

Afin de faciliter l'interprétation physique des expressions précédentes, il est utile de revenir à une base de fonctions exponentielles, dans l'esprit du développement (7.96). Ceci peut se faire par changement de base unitaire, en partant de la base (7.104, 7.105), et en suivant l'approche discutée dans la partie 7.1.4. Posons,  $\forall n \in D'$ ,

$$\begin{aligned} \vec{f}_{n\alpha}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \vec{f}_{n\alpha 1} - i\vec{f}_{n\alpha 2} \right) = \sqrt{\frac{1}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \\ \vec{f}_{-n\alpha}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \vec{f}_{n\alpha 1} + i\vec{f}_{n\alpha 2} \right) = \sqrt{\frac{1}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{-n\alpha} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \end{aligned} \quad (7.123)$$



### 7.3. Quantification du champ électromagnétique

changement de base qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha} & \vec{f}_{-n\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha 1} & \vec{f}_{n\alpha 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha 1} & \vec{f}_{n\alpha 2} \end{pmatrix} U^\dagger \quad (7.124)$$

où  $U$  est la matrice unitaire

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (7.125)$$

Suivant 7.1.4, on pose alors,  $\forall n \in D'$

$$a_{n\alpha} = \frac{a_{n\alpha 1} + ia_{n\alpha 2}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad a_{-n\alpha} = \frac{a_{n\alpha 1} - ia_{n\alpha 2}}{\sqrt{2}}. \quad (7.126)$$

Ces opérateurs annihilation  $a_{n\alpha}$  et création  $a_{n\alpha}^\dagger$ , avec maintenant  $n \in D^*$ , sont conjugués hermitiques, et vérifient les relations de commutation

$$\left[ a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'}^\dagger \right] = \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad \left[ a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'} \right] = \left[ a_{n\alpha}^\dagger, a_{n'\alpha'}^\dagger \right] = 0. \quad (7.127)$$

Par ailleurs, voir (7.43), pour chaque oscillateur, l'opérateur  $N$  garde la même forme fonctionnelle et l'on a donc

$$\sum_s a_{n\alpha s}^\dagger a_{n\alpha s} = a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} + a_{-n\alpha}^\dagger a_{-n\alpha}$$

de sorte que l'hamiltonien du champ libre (7.120) s'écrit sous la forme très simple

$$H_{\text{champ}} = \sum_{n\alpha} \hbar\omega_n \left( a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (7.128)$$

Enfin, l'unitarité de  $U$  conduit à

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha} & \vec{f}_{-n\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n\alpha} \\ a_{-n\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha 1} & \vec{f}_{n\alpha 2} \end{pmatrix} U^\dagger U \begin{pmatrix} a_{n\alpha 1} \\ a_{n\alpha 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha 1} & \vec{f}_{n\alpha 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n\alpha 1} \\ a_{n\alpha 2} \end{pmatrix} \quad (7.129)$$

soit

$$\sum_s a_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s} = a_{n\alpha} \vec{f}_{n\alpha} + a_{-n\alpha} \vec{f}_{-n\alpha}, \quad (7.130)$$

$$\sum_s a_{n\alpha s}^\dagger \vec{f}_{n\alpha s} = a_{n\alpha}^\dagger \vec{f}_{n\alpha}^* + a_{-n\alpha}^\dagger \vec{f}_{-n\alpha}^*. \quad (7.131)$$

où l'Eq. (7.131) s'obtient de l'Eq. (7.130) par conjugaison hermitique, en utilisant le fait que la base des  $\vec{f}_{n\alpha s}$  définie en (7.104,7.105) est réelle.

## 7. Théorie quantique du rayonnement

Les expressions des champs  $\vec{A}$  (7.121) et  $\vec{E}_\perp$  (7.122) gardent ainsi une forme fonctionnelle très voisine (noter cependant le complexe conjugué sur chacun des seconds termes, la base n'étant plus réelle), et deviennent

$$\vec{A} = \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} \left( a_{n\alpha} \vec{f}_{n\alpha} + a_{n\alpha}^\dagger \vec{f}_{n\alpha}^* \right), \quad (7.132)$$

$$\vec{E}_\perp = \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}} \left( i a_{n\alpha} \vec{f}_{n\alpha} - i a_{n\alpha}^\dagger \vec{f}_{n\alpha}^* \right), \quad (7.133)$$

soit explicitement

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\ell^3\omega_n}} \left[ a_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + a_{n\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right]} \quad (7.134)$$

et

$$\boxed{\vec{E}_\perp(\vec{r}) = i \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\ell^3}} \left[ a_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - a_{n\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right]}. \quad (7.135)$$

Il reste possible, pour un  $n$  donné, de changer la base transverse des polarisations en effectuant simultanément une nouvelle transformation unitaire  $V$  de cette base et des opérateurs, sous la forme

$$\vec{\varepsilon}'_{n\alpha} = V_{\alpha\beta}^* \vec{\varepsilon}_{n\beta}, \quad a'_{n\alpha} = V_{\alpha\beta} a_{n\beta}. \quad (7.136)$$

On a alors, en suivant la même logique que celle conduisant à l'Eq. (7.130),

$$\vec{a}_n = a'_{n\alpha} \vec{\varepsilon}'_{n\alpha} = a_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}. \quad (7.137)$$

Cette invariance de  $\vec{a}_n$  sous transformation unitaire implique donc que la forme des équations (7.134) et (7.135) est inchangée. Bien sûr, la transformation étant unitaire, les relations de commutation (7.127) et l'expression de l'hamiltonien du champ libre (7.128) restent également identiques.

En conclusion, la condition  $\vec{\varepsilon}'_{-n\alpha} = \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^*$ , cf Eq. (7.95), qui simplifiait les calculs, peut donc être levée.

Les expressions (7.134) et (7.135) sont des *développements en modes normaux*. Par transformation unitaire de la base, la seule contrainte étant de combiner entre-elles des fonctions de base correspondant au même  $\omega_n$ , afin de garder l'écriture (7.128) de l'hamiltonien comme une collection d'oscillateurs harmoniques ayant chacun leur propre fréquence d'oscillation, on obtiendra différents développements en modes normaux. Un exemple est fourni par les développements (7.121) et (7.122) que nous avons obtenu comme intermédiaire de calcul.

### 7.3.3. Opérateurs du point de vue de Heisenberg

En représentation de Heisenberg, pour le champ libre (pour lequel la forme simple de l'hamiltonien permet de déterminer leur dépendance temporelle), le résultat (7.32) établi plus haut montre que les opérateurs création et annihilation ont la forme (avec  $t_0 = 0$ )  $a_{n\alpha}^\dagger(t) = a_{n\alpha}^\dagger e^{i\omega_n t}$  et  $a_{n\alpha}(t) = a_{n\alpha} e^{-i\omega_n t}$ . L'opérateur du champ  $\vec{A}_H(\vec{r}, t)$  dans la représentation de Heisenberg s'écrit

$$\vec{A}_H(\vec{r}, t) = \sqrt{\mathcal{N}} \sum_{n\alpha} \left[ a_{n\alpha} \vec{\phi}_{n\alpha}^-(\vec{r}, t) + a_{n\alpha}^\dagger \vec{\phi}_{n\alpha}^+(\vec{r}, t) \right] \quad (7.138)$$

où  $\mathcal{N} = \hbar$  et

$$\vec{\phi}_{n\alpha}^-(\vec{r}, t) = [\vec{\phi}_{n\alpha}^+(\vec{r}, t)]^* = \sqrt{\frac{1}{2\ell^3\omega_n}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r} - i\omega_n t}. \quad (7.139)$$

L'opérateur  $\vec{E}_{\perp H}(\vec{r}, t)$  s'obtient, toujours dans le cas du champ libre, par

$$\vec{E}_{\perp H}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t} = i\sqrt{\mathcal{N}} \sum_{n\alpha} \omega_n \left[ a_{n\alpha} \vec{\phi}_{n\alpha}^-(\vec{r}, t) - a_{n\alpha}^\dagger \vec{\phi}_{n\alpha}^+(\vec{r}, t) \right]. \quad (7.140)$$

### 7.3.4. Résumé

Avant d'étudier la structure des opérateurs décrivant le champ électromagnétique quantifié, résumons les opérateurs que nous avons construits.

Nous avons défini les opérateurs :

- ◇  $\forall a \in 1, \dots, N$ ,  $\vec{x}_a$  et  $\vec{p}_a$  pour la matière
- ◇  $\forall n \in D^*$ ,  $\vec{a}_n = \sum_{\alpha} a_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}$  et son conjugué hermitique  $\vec{a}_n^\dagger = \sum_{\alpha} a_{n\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^*$  pour le champ électromagnétique.

Ces différents opérateurs vérifient les relations de commutation :

$$\left[ a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'}^\dagger \right] = \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (7.141)$$

$$\left[ a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'} \right] = \left[ a_{n\alpha}^\dagger, a_{n'\alpha'}^\dagger \right] = 0, \quad (7.142)$$

et

$$\left[ x_a^i, p_b^j \right] = i\hbar \delta_{ab} \delta_{ij}, \quad (7.143)$$

$$\left[ x_a^i, x_b^j \right] = \left[ p_a^i, p_b^j \right] = 0. \quad (7.144)$$

## 7. Théorie quantique du rayonnement

Les opérateurs décrivant la matière d'une part, le champ électromagnétique d'autre part commutent entre eux :

$$[x_a^i, a_{n\alpha}] = [x_a^i, a_{n\alpha}^\dagger] = [p_a^i, a_{n\alpha}] = [p_a^i, a_{n\alpha}^\dagger] = 0. \quad (7.145)$$

Il sera utile dans la suite, dans la perspective d'une description perturbative d'un système en interaction, de décomposer l'hamiltonien du système champ + particules en trois parties

$$H = H_{\text{part}} + H_{\text{int}} + H_{\text{champ}} \quad (7.146)$$

$$H_{\text{part}} = \sum_a \frac{1}{2m_a} \vec{p}_a^2 + U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad (7.147)$$

$$H_{\text{int}} = \sum_a \left[ -\frac{q_a}{m_a} \vec{A}(\vec{x}_a) \cdot \vec{p}_a + \frac{q_a^2}{2m_a} \vec{A}^2(\vec{x}_a) \right] \quad (7.148)$$

$$H_{\text{champ}} = \sum_{n\alpha} \hbar\omega_n \left( a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (7.149)$$

A notera que pour obtenir l'expression de  $H_{\text{int}}$  on a utilisé le fait que  $\vec{p}_a \cdot \vec{A}(\vec{x}_a) = \vec{A}(\vec{x}_a) \cdot \vec{p}_a$  en jauge de Coulomb. En effet le commutateur  $[\vec{x}_a, \vec{p}_a]$  est proportionnel à  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}_a) = 0$ .

On remarquera que :

- ◇ La partie  $H_{\text{part}}$  ne dépend que des opérateurs des particules  $\vec{x}_a$  et  $\vec{p}_a$ .
- ◇ La partie  $H_{\text{champ}}$  ne dépend que des opérateurs du champ  $\vec{a}_n$  et  $\vec{a}_n^\dagger$ .
- ◇ La partie  $H_{\text{int}}$  dépend à la fois des opérateurs des particules et du champ.

Les opérateurs du champ sont :

- ◇ le champ  $\vec{A}$

$$\vec{A} = \sum_n \sqrt{\frac{\hbar}{2\ell^3\omega_n}} \left[ \vec{a}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + \vec{a}_n^\dagger e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right], \quad (7.150)$$

avec par ailleurs  $V$  donné par l'équation (7.69), ses composantes de Fourier  $V_n$ , avec

$$V = \sum_n \phi_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (7.151)$$

ne dépendant pas des  $\vec{a}_n$ .

### 7.3. Quantification du champ électromagnétique

◇ Le champ électrique

$$\vec{E}_\perp = i \sum_n \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\ell^3}} \left[ \vec{a}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - \vec{a}_n^\dagger e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right], \quad \vec{E}_\parallel = -i \sum_n \phi_n \vec{k}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \quad (7.152)$$

◇ Le champ magnétique

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = i \sum_n \sqrt{\frac{\hbar}{2\ell^3\omega_n}} \left[ \vec{k}_n \wedge \vec{a}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - \vec{k}_n \wedge \vec{a}_n^\dagger e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right]. \quad (7.153)$$



# Appendices





# A. Quelques éléments de théorie des groupes

## A.1. Groupe

### A.1.1. Définitions

**Définition A.1 :** *Groupe*

Un groupe est un couple  $(G, \cdot)$  constitué d'un ensemble  $G$  et d'une opération sur cet ensemble, qui à deux éléments  $a$  et  $b$  de  $G$  associe un élément  $a \cdot b$ . Cette loi doit satisfaire à quatre axiomes :

**Loi de composition interne :**  $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G$

**Associativité :**  $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

**Existence d'un élément neutre :**  $\exists e \in G / \forall a \in G, e \cdot a = a \cdot e = a$ .

On dit que  $e$  est l'élément neutre du groupe.

**Existence d'un symétrique :**  $\forall a \in G, \exists \text{sym}(a)$  tel que  $a \cdot \text{sym}(a) = \text{sym}(a) \cdot a = e$ .

Selon le contexte, la loi  $\cdot$  sera notée différemment :

- ◇ lorsque la loi est notée additivement, on notera  $+$  cette loi, et le symétrique de  $a$  sera alors appelé opposé, et noté  $-$ . L'élément neutre sera alors noté  $0$ .

Exemple : groupe  $(\mathbb{Z}, +)$ .

En pratique, ceci est utilisé uniquement pour les groupes abéliens (voir ci-dessous).

- ◇ lorsque la loi est notée multiplicativement, on notera  $\times$  cette loi, et le symétrique de  $a$  sera alors appelé inverse, et noté  $a^{-1}$ . L'élément neutre sera alors noté  $1$ .

## A. Quelques éléments de théorie des groupes

Exemple : pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité, muni de la loi  $\times$ , est un groupe multiplicatif.

◇ on utilisera également les notations  $\circ$  et  $*$ .

**Définition A.2 :** *Groupe abélien et non-abélien*

Si l'opération  $\cdot$  est commutative, on dira que le groupe est *abélien*.

Dans le cas contraire, il est dit non-abélien.

**Définition A.3 :** *Ordre d'un groupe*

L'ordre d'un groupe est le cardinal de  $G$ .

◇ Si ce cardinal est fini, on dira alors que  $G$  est un groupe fini(!) et on notera  $|G|$  son ordre.

◇ Dans le cas d'un groupe d'ordre infini, le groupe pourra être *discret* (au sens topologique, ou continu).

### A.1.2. Exemples de groupes

◇ Le groupe trivial  $G = (\{0\}, +)$ , noté aussi 0, pour un groupe additif (ou  $G = (\{1\}, \times)$ , noté aussi 1, pour un groupe multiplicatif).

◇  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe abélien discret.

◇  $U(1) = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$ , le groupe des phases, est un groupe abélien.

◇ Si  $K$  est un corps (exemples :  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ),  $(K, +)$  et  $(K^*, \times)$  sont des groupes abéliens.

◇ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble des entiers modulo  $n$  muni de l'addition  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  est un groupe abélien, d'ordre  $n$ .

◇  $G = (\mathcal{S}(E), \circ)$  :

Sur un ensemble  $E$ , l'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  des bijections de  $E$  dans  $E$ , muni de la loi de composition  $\circ$  des applications est un groupe.

◇ *Groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  :*

Dans le cas particulier où  $E = \{1, \dots, n\}$ , on notera  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble  $\mathcal{S}(E)$ , et on l'appellera le groupe symétrique à  $n$  éléments. Il est d'ordre  $n!$ , et non abélien pour  $n \geq 3$ , et il est constitué des permutations des  $n$  éléments  $\{1, \dots, n\}$ .

◇ *Groupe linéaire*  $GL_n(K)$  :

L'ensemble des matrices inversibles  $n \times n$  à coefficients dans un corps  $K$ , muni du produit des matrices, est un groupe (non abélien pour  $n \geq 2$ ).

◇ *Groupe spécial linéaire*  $SL_n(K)$  :

L'ensemble des matrices  $n \times n$  à coefficients dans un corps  $K$ , muni du produit des matrices, et de déterminant 1 (donc inversibles), est un groupe (non-abélien pour  $n \geq 2$ ).

◇ *Groupe orthogonal*  $O(n)$  :

L'ensemble  $O(n)$  des matrices orthogonales  $n \times n$  est l'ensemble des matrices réelles vérifiant  $O \cdot O^t = O^t \cdot O = \mathbb{1}$ , qui laissent invariant la forme bilinéaire (le produit scalaire)  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , i.e.  $(O\vec{x}) \cdot (O\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ .

Muni du produit des matrices, c'est un groupe non-abélien pour  $n \geq 2$ . La relation de définition de  $O(n)$  impose que  $\det O = \pm 1$ .

◇ *Groupe spécial orthogonal*  $SO(n)$  :

Il est constitué du sous-ensemble des matrices de  $O(n)$  de déterminant +1.

◇ *Groupe unitaire*  $U(n)$  :

L'ensemble  $U(n)$  des matrices unitaires  $n \times n$  est constitué des matrices complexes vérifiant  $U U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$ , ou de façon équivalente qui laissent invariante la forme sesquilinéaire  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$  (cette forme est sesquilinéaire à gauche : linéaire par rapport à  $y$ , antilinéaire par rapport à  $x$ , cf bra-ket en physique quantique).

Muni du produit des matrices, c'est un groupe non-abélien pour  $n \geq 2$ . La relation de définition de  $U(n)$  impose que  $\det U = \pm 1$ .

◇ *Groupe spécial unitaire*  $(SU(n), \cdot)$  :

Matrices de  $U(n)$  de déterminant +1.

◇ *Groupe symplectique*  $Sp(2n, K)$  :

Soit  $K$  un corps (typiquement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

L'ensemble  $Sp(2n, K)$  des matrices symplectiques  $2n \times 2n$  est constitué des matrices dans  $K$  laissant invariante la forme antisymétrique  $x^t g y$  où

## A. Quelques éléments de théorie des groupes

$g$  est la matrice antisymétrique

$$g = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

*i.e.* satisfaisant la condition

$$S^t g S = g.$$

## A.2. Morphismes de groupe, sous-groupe

### A.2.1. Application, injections, surjections

**Définition A.4 :** *Fonction (ou application)*

Une fonction  $f : E \rightarrow F$  applique les éléments de  $E$  vers les éléments de  $F$  : chaque élément de  $E$  possède une image unique dans  $F$

**Définition A.5 :** *Image d'une fonction*

L'image d'une fonction  $f : E \rightarrow F$  est l'ensemble des images des éléments de  $E$ , notés  $f(E)$ , ou  $\text{Im } f$  :

$$f(E) = \{f(x)/x \in E\}.$$

**Définition A.6 :** *Image directe d'un sous-ensemble*

Plus généralement, étant donnée une application  $f : E \rightarrow F$ , l'image (ou image directe)  $f(A)$  d'un sous-ensemble  $A \subset E$  est l'ensemble des images des éléments de  $A$  :

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}.$$

**Définition A.7 :** *Image réciproque d'un sous-ensemble*

Étant donnée une application  $f : E \rightarrow F$ , l'image réciproque  $f^{-1}(B)$  d'un sous-ensemble  $B \subset F$  est l'ensemble des antécédents des éléments de  $B$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}.$$

**Définition A.8 :** *Application injective (ou injection)*

Une application  $f : E \rightarrow F$  est injective, si chaque élément de  $F$  possède au plus un antécédent dans  $E$  :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x',$$

ou de façon équivalente, si toute paire d'éléments distincts de  $E$  a pour image par  $f$  une paire d'éléments distincts dans  $F$  :

$$\forall x, x' \in E, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

**Définition A.9 :** *Application surjective (ou surjection)*

La fonction  $f : E \rightarrow F$  est surjective, si tout élément de  $F$  possède au moins un antécédent dans  $E$  par  $f$ . Autrement dit, That is, l'image  $F(E)$  est égale à  $F$  :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x).$$

**Définition A.10 :** *Application bijective (ou bijection)*

La fonction  $f : E \rightarrow F$  est bijective si tout élément de  $F$  possède exactement un antécédent dans  $E$ . Autrement dit, la fonction est à la fois injective et surjective :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E / y = f(x).$$

**Définition A.11 :** *Bijection inverse*

A toute bijection  $f : E \rightarrow F$ , on peut associer l'application inverse (qui est aussi une bijection), notée  $f^{-1}$ , qui applique tout élément  $y \in F$  vers son unique antécédent  $x \in E$ , i.e.

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

On prendra garde au fait que conventionnellement, la même notation  $f^{-1}$  est utilisée à la fois pour la bijection inverse et pour l'image réciproque d'un ensemble (dans ce second cas même si l'application n'est pas bijective).

## A.2.2. Morphisme

**Définition A.12 :** *Morphisme de groupe*

Soient  $G$  et  $G'$  deux groupes. Un morphisme (ou homomorphisme) entre ces deux groupes est une application  $f : G \rightarrow G'$  qui satisfait

$$\forall g_1, g_2 \in G, f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2). \tag{A.1}$$

## A. Quelques éléments de théorie des groupes

En d'autres termes, l'application  $f$  préserve les lois de groupe sur  $G$  et  $G'$ .

**Définition A.13 :** *Isomorphisme de groupe*

Si en outre  $f$  est bijective, alors  $f^{-1}$  est aussi un morphisme de groupe. On dit alors que  $f$  est un isomorphisme. En d'autres termes, l'image du symétrique de  $g \in G$  est le symétrique dans  $G'$  de  $f(g)$ .

On dira alors que  $G$  et  $G'$  sont *isomorphes*, et l'on notera  $G \simeq G'$  ou encore  $G \cong G'$ .

**Définition A.14 :** *Automorphisme de groupe*

Si  $G = G'$ , alors un isomorphisme de groupe  $f$  est appelé un automorphisme.

**Proposition A.15 :**  $\text{Aut}(G)$

L'ensemble des automorphismes d'un groupe  $G$ , muni de la loi de composition  $\circ$  des applications, est un groupe noté  $\text{Aut}(G)$ .

**Définition A.16 :** *Noyau d'un morphisme*

Le noyau d'un morphisme  $f$  est

$$\text{Ker}(f) = \{g \in G / f(g) = e\}. \quad (\text{A.2})$$

**Définition A.17 :** *Image d'un morphisme*

L'image d'un morphisme  $f$  est

$$\text{Im } f = \{f(g) / g \in G\}. \quad (\text{A.3})$$

**Définition A.18 :** *Morphisme injectif, morphisme surjectif*

- ◇ Un morphisme  $f$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker } f = e$ .
- ◇ Un morphisme  $f$  est surjectif si et seulement si  $\text{Im } f = G'$ .
- ◇ Un morphisme est un isomorphisme si et seulement s'il est injectif et surjectif.

### A.2.3. Sous-groupe

**Définition A.19 :** *Sous-groupe*

Soit  $H$  un sous-ensemble de  $G$ . Un *sous-groupe*  $(H, \cdot)$  d'un groupe  $(G, \cdot)$  est un groupe dont la loi  $\cdot$  s'obtient par restriction de la loi  $\cdot$  sur  $H \times H$ .

**Proposition A.20 :** Pour que  $H \subset G$  soit un sous-groupe, il faut et il suffit que  $\forall a, b \in H, a \cdot b^{-1} \in H$ .

*Remarque :*

On notera que le critère A.20 permet de se dispenser de vérifier l'associativité, automatique par inclusion de  $H$  dans  $G$ .

*Exemples :*

- ◇ De façon évidente,  $G$  et  $\{e\}$  sont des sous-groupes de  $G$ .
- ◇ L'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$ .
- ◇ La réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.
- ◇ Les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Propositions A.21 :**

- ◇ L'image et le noyau d'un morphisme  $f : G \rightarrow G'$  sont des sous-groupes de  $G'$  et  $G$  respectivement.

Plus généralement :

- ◇ L'image réciproque par  $f$  de tout sous-groupe de  $G'$  est un sous-groupe de  $G$ .
- ◇ L'image par  $f$  de tout sous-groupe de  $G$  est un sous-groupe de  $G'$ .

*Exemple :*

Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Alors  $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$  est un morphisme.

Si  $E$  est  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , alors  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}, \cdot) \cong (\mathrm{GL}(E), \circ)$ , groupe des applications linéaires bijectives de  $E$  dans  $E$ .

Le noyau de  $\det$  est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ , appelé le groupe spécial linéaire, et noté  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$  (c'est donc l'ensemble des matrices de déterminant 1 à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ).





# B. Quelques éléments sur la théorie des représentations des groupes

## B.1. Représentation d'un groupe

**Définition B.1 :** *Représentation d'un groupe*

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n$ .

De façon formelle, une représentation linéaire d'un groupe  $G$  dans  $E$  est un homomorphisme  $D$  de  $G$  dans un sous-groupe  $\mathcal{G}$  du groupe  $GL(n)$  des opérateurs linéaires et inversibles de  $E$ . Ceci s'écrit simplement :

$$\boxed{\forall g_1, g_2 \in G, D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2).} \quad (\text{B.1})$$

En particulier  $D(e) = \mathbb{1}$  et  $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$ , où  $e$  et  $\mathbb{1}$  sont les éléments neutres de  $G$  et de  $GL(n)$ .

$E$  est appelé espace de représentation, et  $n = \dim V$  est la dimension de la représentation.  $D(g)$  s'écrit donc comme une matrice  $n \times n$ .

*Remarque :*

Il ne faut surtout pas confondre cette dimension avec celle du groupe. De façon générale, un groupe donné possède plusieurs représentations, de dimensions différentes.

**Définition B.2 :** *Représentation triviale*

La représentation de  $G$  qui à tout  $g \in G$  associe  $\mathbb{1}$  est appelée représentation triviale, ou représentation identité.

**Définition B.3 :** *Matrice représentative*

Dans le cas où  $E$  est de dimension finie, soit  $e_i, i \in \{1, \dots, n\}$  une base de  $E$ .

A tout  $g \in G$  on associe la matrice  $\mathcal{D}(g)$  représentative de  $D(g)$  définie, de façon usuelle en algèbre linéaire, par (en utilisant la convention d'Einstein de

## B. Quelques éléments sur la théorie des représentations des groupes

sommation sur les indices répétés)

$$D(g)e_j = e_i \mathcal{D}_{ij}(g), \quad (\text{B.2})$$

ce qui signifie que l'on lit sur la matrice, dans la colonne  $j$ , les coefficients dans la base  $e_i$  de l'image du vecteur  $e_j$ .

On vérifie facilement le fait que  $D$  est une représentation si et seulement si la relation matricielle suivante est satisfaite :

$$\mathcal{D}_{ij}(g \cdot g') = \mathcal{D}_{ik}(g) \mathcal{D}_{kj}(g'). \quad (\text{B.3})$$

Exemple de représentation :

*Groupe  $SO(2)$  des rotations du plan*

Vérifier que les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

forment une représentation de dimension 2 du groupe des rotations du plan. Quelle est l'interprétation géométrique de ces matrices ?

**Définition B.4 :** *Représentations équivalentes*

Deux représentations  $D$  et  $D'$  dans les espaces  $E$  et  $E'$  sont dites équivalentes si et seulement si il existe un opérateur  $S$  inversible t.q.

$$\forall g \in G, D'(g) = S^{-1} D(g) S. \quad (\text{B.5})$$

$S$  est appelé opérateur d'entrelacement.

Dans le cas où  $E$  et  $E'$  sont de dimension finie, on peut identifier  $E$  et  $E'$ , et la relation (B.5) traduit simplement un changement de base au niveau des matrices représentatives. Cela justifie par avance le fait de ne pas distinguer des représentations équivalentes.

### B.1.1. Représentations réductibles et irréductibles

**Définition B.5 :** *Somme directe de deux représentations*

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux représentations d'un même groupe  $G$ , respectivement dans les espaces  $E_1$  et  $E_2$ . On peut alors construire une représentation qui agit sur l'espace somme directe  $E = E_1 \oplus E_2$ . On note cette représentation  $D_1 \oplus D_2$ .

Par construction, chacun des deux sous-espace  $E_1$  et  $E_2$  de  $E$  sont laissés invariants par cette représentation  $D = D_1 \oplus D_2$ .

Dans le cas où  $E_1$  et  $E_2$  sont de dimensions finies  $p_1$  et  $p_2$ , on peut alors considérer les matrices représentatives  $\mathcal{D}_1(g)$  et  $\mathcal{D}_2(g)$  de  $D_1(g)$  et  $D_2(g)$ , dans des bases données de  $E_1$  et  $E_2$ . La matrice représentative de la somme directe de ces représentations, dans la base correspondante de  $E_1 \oplus E_2$ , est donnée par

$$\mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1(g) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_2(g) \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

de dimension  $(p_1 + p_2) \times (p_1 + p_2)$ .

Nous allons à présent, partant d'une représentation donnée, examiner la situation inverse.

**Définition B.6 :** *Réductibilité, irréductibilité et complète réductibilité*

*Cas général :*

- ◇ Une représentation d'un groupe  $G$  est dite réductible si elle laisse invariant un sous-espace  $E_1$  de  $E$ .
- ◇ Dans le cas contraire elle est dite irréductible, ce qui est équivalent au fait qu'il n'existe pas de sous-espace invariant par  $D(g)$ ,  $\forall g \in G$ , autre que  $\emptyset$  et  $E$ .
- ◇ Une représentation sur  $E$  est complètement réductible si elle peut s'écrire comme la somme directe de représentations irréductibles :  $E$  peut s'écrire comme somme directe de sous-espace laissés invariants par la représentation et sur lesquels la représentation est irréductible.

*Cas d'une représentation de dimension finie :*

Si  $E$  est de dimension finie :

- ◇ Une représentation est réductible si elle est équivalente (par un changement de base d'après ce qui a été dit plus haut) à une représentation  $D$  de  $G$  dont la matrice représentative peut s'écrire,  $\forall g \in G$ , sous la forme

$$D(g) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

## B. Quelques éléments sur la théorie des représentations des groupes

où  $A$  est une matrice  $n_A \times n_A$ , cette écriture de  $\mathcal{D}$  étant équivalente au fait qu'il existe un sous-espace de  $E$  de dimension  $n_A$  invariant sous  $\mathcal{D}(g)$ ,  $\forall g \in G$ .

- ◇ Une représentation est dite complètement réductible si elle est équivalente à une représentation de la forme

$$\mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11}(g) & 0 & & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{22}(g) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{D}_{nn}(g) \end{pmatrix}, \forall g \in G,$$

où  $\mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{22}, \dots, \mathcal{D}_{nn}$  sont irréductibles.

*Remarques :*

- ◇ On prendra bien garde au fait que les structures en blocs ci-dessus doivent être valables dans une base donnée une fois pour toute,  $g$  étant arbitraire (ce qui est bien sûr beaucoup plus restrictif que demander, pour chaque choix de  $g$ , l'existence d'une base telle que  $D(g)$  possède une telle structure en blocs...).
- ◇ Le corps du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  joue un rôle essentiel dans la discussion de l'irréductibilité ci-dessus. En particulier, une représentation peut être réductible sur  $\mathbb{C}$  sans l'être sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi la représentation (B.4) est irréductible sur  $\mathbb{R}$  mais est réductible sur  $\mathbb{C}$  : par changement de base on peut la mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Plus généralement, pour  $M \in SO(N)$ , on peut écrire  $M = \exp A$  où  $A$  est une matrice antisymétrique (la composante connexe de l'identité d'un groupe compact s'obtient exponentiation de son algèbre de Lie). Or  $iA$  est hermitienne, donc est diagonalisable à valeur réelles (notons  $\Lambda$  cette matrice diagonale réelle), et donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  à valeur imaginaire pure. On a donc  $M = \exp[P i \Lambda P^{-1}] = P \exp(i\Lambda) P^{-1}$ .

**Définition B.7 :** *Représentation conjuguée*

Soit  $D$  une représentation d'un groupe  $G$  et  $\mathcal{D}$  sa matrice représentative dans une certaine base. Les matrices  $\mathcal{D}^*$  complexes conjuguées de  $\mathcal{D}$  forment une

autre représentation  $D^*$  appelée conjuguée.

En effet,  $\mathcal{D}_{ij}(gg') = \mathcal{D}_{ik}(g)\mathcal{D}_{kj}(g')$  conduit immédiatement à

$$\mathcal{D}_{ij}^*(gg') = \mathcal{D}_{ik}^*(g)\mathcal{D}_{kj}^*(g'). \quad (\text{B.8})$$

**Définition B.8 :** *Représentation réelle*

Une représentation  $D$  est dite réelle s'il existe une base dans laquelle  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ .

**Définition B.9 :** *Représentation pseudo-réelle*

Une représentation  $D$  est appelée pseudo-réelle si  $D$  et  $D^*$  sont équivalentes sans qu'il existe une base dans laquelle  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ .

Un exemple de représentation pseudo-réelle est fourni par la représentation de spin 1/2 de  $SU(2)$  : la représentation fondamentale de spin 1/2 et sa complexe conjuguée sont équivalentes (en utilisant la matrice  $i\sigma_2$  comme matrice d'entrelacement). En revanche il n'est pas possible de rendre la matrice représentative réelle, car on aurait alors construit une représentation de  $SO(2)$  (hermitique conjugué et transposition se confondant alors...), ce qui est bien sûr impossible puisque  $SU(2)$  est non-abélien alors que  $SO(2)$  est abélien !

**Définition B.10 :** *Représentations unitaires*

Si l'espace  $E$  est muni d'un produit scalaire  $\phi(x, y) = \langle x|y \rangle$ , forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}$  ou sesquilinéaire sur  $\mathbb{C}$ , définissant une norme définie positive (i.e.  $x \neq 0 \Rightarrow \langle x|x \rangle > 0$ ), on peut toujours choisir une base orthonormale, ce qui signifie que la matrice de  $\phi$  se réduit à  $\mathbb{1}$ . Les opérateurs sont alors dits unitaires s'ils vérifient  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ .

Considérons à présent une représentation  $D$ . Elle est dite unitaire si  $\forall g \in G$ , les matrices  $\mathcal{D}(g)$  sont unitaires. Ceci se traduit par

$$\forall g \in G, \forall x, y \in E, \quad \langle x|y \rangle = \langle D(g)x|D(g)y \rangle \quad (\text{B.9})$$

ou de façon équivalente

$$\mathcal{D}(g)^\dagger \mathcal{D}(g) = \mathbb{1}. \quad (\text{B.10})$$

On aura alors

$$\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{D}^{-1}(g) = \mathcal{D}^\dagger(g). \quad (\text{B.11})$$

## B. Quelques éléments sur la théorie des représentations des groupes

On a alors les résultats importants suivants, en vue des applications physiques.

### **Théorème B.11 :**

Toute représentation d'un groupe fini sur un espace muni d'un produit scalaire est équivalente à une représentation unitaire.

Dans le cas où le groupe est un groupe de Lie non pas compact (voir appendice C), on a en revanche le

### **Théorème B.12 :** *Représentation d'un groupe de Lie non compact*

Si  $G$  est un groupe de Lie simple non compact, alors  $G$  ne possède pas de représentation unitaire de dimension finie en dehors de la représentation triviale  $D(A) = 1, \forall A \in G$ .

### **Conditions suffisantes de complète réductibilité**

Plusieurs cas pratiques peuvent se présenter dans lesquelles réductibilité implique complète réductibilité, que nous énonçons ci-dessous sans démonstration.

### **Théorème B.13 :**

Toute représentation réductible d'un groupe fini est complètement réductible.

### **Théorème B.14 :**

Si  $G$  est un groupe de Lie *compact* (voir appendice C), alors toute représentation réductible est complètement réductible. La propriété est également vraie pour toute représentation réductible d'un groupe de Lie connexe, non compact et semi-simple, de même que pour toute représentation réductible *unitaire* d'un groupe quelconque.

## **B.1.2. Lemme de Schur**

### **Lemme B.15 :**

Soient deux représentations irréductibles  $D$  et  $D'$ . S'il existe un opérateur  $V$  tel que  $\forall g \in G, VD(g) = D'(g)V$ , alors soit  $V$  est un isomorphisme (et alors  $V^{-1}D'V = D$  i.e.  $D$  et  $D'$  sont équivalentes), soit  $V = 0$ .

### **Corollaire B.16 :**

Soit une représentation irréductible sur  $\mathbb{C}$ , de dimension finie. Si  $M$  commute

avec toutes les matrices de cette représentation, alors  $M = \lambda \mathbf{1}$  ( $M$  est une homothétie).

*Preuve :*

- ◇ Commençons par démontrer le corollaire. Par hypothèse,  $\forall g \in G, D(g)M = MD(g)$ .

Soit  $E_\lambda$  le sous-espace propre de  $M$  pour la valeur propre  $\lambda$  (qui existe car le corps est  $\mathbb{C}$ , qui est algébriquement clos, ce qui signifie que tout polynôme de degré supérieur ou égal à un possède au moins une racine).  $\forall v \in E_\lambda, MD(g)v = D(g)Mv = \lambda D(g)v$ , donc  $E_\lambda$  est stable par  $D(g)$ ,  $\forall g$ .

Donc si  $E_\lambda \neq E$ ,  $D(g)$  est de la forme

$$D(g) = \left( \begin{array}{c|c} & \\ \hline -- & -- \\ 0 & \end{array} \right), \quad (\text{B.12})$$

avec un bloc nul. La représentation est alors réductible, ce qui est absurde.

Donc  $E_\lambda = E$ , i.e.  $M = \lambda E$ .

- ◇ Démontrons maintenant le lemme lui-même. Il est clair que  $V = 0$  est solution. Supposons maintenant que  $V \neq 0$ .

- Noyau :  $VD(g) = D'(g)V \Rightarrow \forall x \in \text{Ker } V, VD(g)(x) = D'(g)V(x) = 0$ . Donc  $D(g)\text{Ker } V \subset \text{Ker } V$ . Ceci montre que  $\text{Ker } V$  est un sous-espace invariant de  $E$ . Comme  $D(g)$  est irréductible,  $\text{Ker } V = 0$  (sinon  $\text{Ker } V = E$ , et alors  $V = 0$ , ce qui est absurde).

- Image :  $\forall y \in \text{Im } V, \exists x$  t.q.  $y = V(x)$  donc  $D'(g)(y) = D'(g)V(x) = VD(g)(x)$ .

Ainsi  $D'(g)(y) = V(y')$  avec  $y' = D(g)(x)$ , i.e.  $D'(g)\text{Im } V \subset \text{Im } V$ . Ceci montre que  $\text{Im } V$  est un sous-espace invariant par  $D'(g)$  (pour tout  $g$ ). Comme  $V \neq 0$ ,  $\text{Im } V \neq 0$ . L'irréductibilité de  $D'$  implique que  $\text{Im } V = E$ .

Donc  $V$  est bijective.

### Réciproque B.17 :

Soit une représentation  $D$  de dimension finie, unitaire (ou plus généralement satisfaisant aux conditions du théorème de complète irréductibilité).

## B. Quelques éléments sur la théorie des représentations des groupes

Si  $\forall M, \forall g \in G, [D(g), M] = 0 \Rightarrow M = \lambda I$ , alors  $D$  est irréductible.

On a ainsi un critère puissant pour prouver l'irréductibilité d'une représentation.

*Preuve :*

Si la représentation est réductible, elle l'est complètement par hypothèse, et  $\exists H \subset E$  invariant par  $D(g), \forall g \in G$  tel que

$$\forall g, D(g) = \left( \begin{array}{c|c} \text{---} & 0 \\ \hline 0 & \text{---} \end{array} \right).$$

Les matrices qui commutent avec les  $D(g)$  sont de la forme  $\left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 I & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I \end{array} \right)$  qui diffère de  $\lambda I$  en général. Donc la représentation ne peut pas être réductible.

---

*Autre preuve du corollaire :* sur  $\mathbb{C}$ ,  $M$  a au moins une valeur propre  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$  car  $M$  est inversible d'après le lemme de Schur).

$$MD = DM \text{ donc } (M - \lambda \mathbb{1}) D = D (M - \lambda \mathbb{1}).$$

Mais comme  $M - \lambda \mathbb{1}$  est singulier,  $M = \lambda \mathbb{1}$  d'après le lemme de Schur.

### Corollaire B.18 :

Une représentation irréductible sur  $\mathbb{C}$  d'un groupe abélien est nécessairement de dimension 1.

*Preuve :*

Soit  $g' \in G$ . Alors  $[D(g'), D(g)] = 0, \forall g \in G$ . Donc  $D(g') = \lambda(g') \mathbb{1}$ . La représentation se décompose donc en  $\dim D$  copies de la représentation de dimension 1 :  $g \mapsto \lambda(g)$ .

*Remarque :* Il est essentiel que le corps soit  $\mathbb{C}$  (algébriquement clos) et non  $\mathbb{R}$ .

Contre-exemple : la représentation sur  $\mathbb{R}$  de  $SO(2)$  par  $D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  est irréductible (pourtant  $\forall \alpha, [D(\alpha), D(\theta)] = 0$ ).



## B.2. Produit tensoriel de représentations

Plusieurs méthodes existent pour fabriquer des représentations irréductibles de dimensions élevées à partir de représentations irréductibles déjà connues de basses dimensions, qui jouent en quelque sorte le rôle de briques de base. La plus immédiate consiste à faire le produit tensoriel de telles représentations, et à décomposer le résultat en représentations irréductibles.

Par ailleurs, d'un point de vue physique, cette situation est particulièrement importante puisqu'on la rencontre par exemple en mécanique quantique, où l'on est notamment amené à examiner comment le moment cinétique total d'un système possédant un moment cinétique orbital et un moment cinétique de spin est quantifié.

### B.2.1. Produit tensoriel de représentations

**Proposition B.19 :** *Produit tensoriel*

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, de dimensions arbitraires (finies ou infinies). L'espace vectoriel produit tensoriel  $E \otimes F$  est par définition l'espace engendré par les vecteurs de base constitués des produits tensoriels deux à deux des vecteurs de base de  $E$  et  $F$ . Si  $(e_i)_{i \in I}$  et  $(f_j)_{j \in J}$  sont des bases respectives de  $E$  et  $F$ , alors  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est une base de  $E \otimes F$ . En particulier, si  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies,

$$\dim(E \otimes F) = \dim(E) \times \dim(F). \quad (\text{B.13})$$

**Définition B.20 :** *Produit tensoriel de deux représentations*

Considérons deux représentations  $D_1$  et  $D_2$  d'un groupe<sup>1</sup>  $G$ , agissant respectivement sur les espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$ . L'espace  $E = E_1 \otimes E_2$  porte alors une représentation produit tensoriel de  $D_1$  et  $D_2$ , notée  $D = D_1 \otimes D_2$  qui agit de la façon suivante sur  $E_1 \otimes E_2$  :

$$\begin{aligned} \forall g \in G, \forall v_1 \in E_1, \forall v_2 \in E_2, \\ D(g)(v_1 \otimes v_2) = (D_1 \otimes D_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = D_1(g)v_1 \otimes D_2(g)v_2. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Dans le cas où  $E_1$  et  $E_2$  sont de dimensions finies, et où  $D_1$  et  $D_2$  ont pour matrices représentatives  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ ,  $D$  a pour matrice représentative  $\mathcal{D}$ , caractérisées par les éléments de matrice

$$\mathcal{D}_{n_1 n_2; n'_1 n'_2} = \langle n_1 n_2 | D(g) | n'_1 n'_2 \rangle = \langle n_1 | D_1(g) | n'_1 \rangle \langle n_2 | D_2(g) | n'_2 \rangle = \mathcal{D}_{n_1 n'_1} \mathcal{D}_{n_2 n'_2} \quad (\text{B.15})$$

---

1. On pourrait plus généralement considérer le produit tensoriel de deux représentations  $D_1$  et  $D_2$  respectivement de deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  agissant sur  $E_1$  et  $E_2$ .

On montre que

$$\dim E = \dim(E_1 \otimes E_2) = \dim E_1 \times \dim E_2. \quad (\text{B.16})$$

### B.2.2. Décomposition et coefficients de Clebsch-Gordan

En général, le produit direct de deux représentations  $D_1$  et  $D_2$  n'est pas irréductible. Dans le cas où elle est complètement réductible, on écrira ce produit sous la forme d'une somme de représentation irréductible, appelée décomposition de Clebsch-Gordan, sous la forme

$$D_1 \otimes D_2 = \oplus_j D_j \quad (\text{B.17})$$

où les  $D_j$  sont des représentations irréductibles, décomposition dans laquelle des représentations équivalentes peuvent apparaître plusieurs fois. Si les différentes représentations irréductibles inéquivalentes sont indexées par un indice  $\rho$ , on peut réécrire cette décomposition en faisant apparaître la multiplicité de chacune de ces représentations inéquivalentes  $D^{(\rho)}$ , sous la forme

$$D_1 \otimes D_2 = \oplus_{\rho} m_{\rho} D^{(\rho)} \quad (\text{B.18})$$

On tire immédiatement des relations (B.17) et (B.18) le fait que

$$\dim D_1 \dim D_2 = \sum_j \dim D_j = \sum_{\rho} m_{\rho} \dim D^{(\rho)}. \quad (\text{B.19})$$

**Exemples :**

1)  $SO(3)$  :

Représentons ce groupe par son action sur l'espace euclidien à 3 dimensions, et considérons le produit tensoriel de deux copies de cet espace euclidien à 3 dimensions. Partant de deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , on peut former le tenseur à deux indices  $x_i x_j$ , qui peut se décomposer en la somme de 3 structures irréductibles :

- ◇ le produit scalaire  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ , invariant sous  $SO(3)$  (c'est la représentation triviale)
- ◇ un tenseur antisymétrique à deux indices :

$$A_{ij} = x_i y_j - x_j y_i \quad (\text{B.20})$$

correspondant à une représentation irréductible de dimension 3, de spin 1.

◇ un tenseur symétrique de trace nulle à deux indices :

$$S_{ij} = x_i y_j + x_j y_i - \frac{2}{3} \vec{x} \cdot \vec{y} \delta_{ij} \quad (\text{B.21})$$

correspondant à une représentation irréductible de dimension 5, de spin 2.

On vérifie explicitement que la dimension de la représentation produit tensoriel vérifie bien  $3 \times 3 = 9 = 1 + 3 + 5$ . En utilisant la dimension des représentations comme étiquette, on a la décomposition

$$D^{(3)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus D^{(3)} \oplus D^{(5)}. \quad (\text{B.22})$$

2)  $SO(n)$  :

La décomposition ci-dessus reste valable pour  $SO(n)$  : partant d'une matrice arbitraire  $M_{ij}$  agissant sur l'espace  $n \otimes n$ , on peut toujours écrire la décomposition

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \left( M_{ij} + M_{ji} - \frac{2}{n} \delta_{ij} \delta^{pq} M_{pq} \right) + \frac{1}{2} (M_{ij} - M_{ji}) + \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta^{pq} M_{pq} \quad (\text{B.23})$$

qui montre que

$$D^{(n)} \otimes D^{(n)} = D^{(1)} \oplus D^{(n(n-1)/2)} \oplus D^{(n(n+1)/2-1)}, \quad (\text{B.24})$$

puisque l'espace des tenseurs de rang 2 antisymétriques est de dimension  $n(n-1)/2$ , l'espace des tenseurs de rang 2 symétriques de trace nulle est de dimension  $n(n+1)/2-1$ , et la trace correspond à la représentation triviale. Ces trois tenseurs correspondent bien à des représentations irréductibles de  $SO(n)$  puisque les seules opérations algébriques possibles pouvant permettre de réduire le rang sont la symétrisation ou l'antisymétrisation, et la contraction sur deux indices (qui donne la trace du tenseur), opérations qui sont justement celles qui ont été mises en œuvre ici.

Nous allons à présent donner le cadre général permettant de formaliser la décomposition d'un produit tensoriel de vecteurs de base de deux représentations irréductibles en la somme de vecteurs de base de représentations irréductibles.

**Définition B.21 :** *Coefficients de Clebsch-Gordan*

Soit  $\Psi_{\alpha}^{(\rho)}$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, \dim D^{(\rho)}\}$  une base de vecteurs de la représentation  $D^{(\rho)}$ . On peut alors écrire le produit de deux vecteurs sous la forme générique

$$\Psi_{\alpha}^{(\rho)} \Psi_{\beta}^{(\sigma)} = \sum_{\tau, \gamma, i} C_{\rho, \alpha; \sigma, \beta | \tau, \gamma} \Psi_{\gamma}^{(\tau_i)}. \quad (\text{B.25})$$

## B. Quelques éléments sur la théorie des représentations des groupes

Les coefficients  $C_{\rho,\alpha;\sigma,\beta|\tau_i,\gamma}$  sont appelés coefficients de Clebsch-Gordan.

Précisons la signification des différents indices :

- ◇  $\rho$  et  $\sigma$  sont des étiquettes pour les deux représentations initiales,  $\tau$  est une étiquette pour la représentation finale.
- ◇ comme chaque représentation  $\tau$  peut apparaître  $m_\tau$  fois, il est nécessaire d'introduire un indice supplémentaire  $i$  variant de 1 à  $m_\tau$ .
- ◇  $\gamma$  est une étiquette pour le vecteur de la représentation finale  $\tau_i$

Il est d'usage d'utiliser des notations de mécanique quantique, et d'écrire cette décomposition sous la forme

$$|\rho, \alpha; \sigma, \beta\rangle = |\rho\alpha\rangle |\sigma\beta\rangle = \sum_{\tau,\gamma,i} \langle \tau_i\gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle |\tau_i\gamma\rangle . \quad (\text{B.26})$$

Alors que les coefficients  $m_\rho$  sont entiers, les coefficients de Clebsch-Gordan sont a priori des nombres complexes.

### Cas où les représentations sont unitaires

Dans le cas de représentations unitaires, en supposant que les bases sont orthonormées, les coefficients de Clebsch-Gordan sont simplement des coefficients de changement de base qui satisfont à deux relations d'orthonormalité et de complétude :

- l'orthonormalité, qui s'écrit ici

$$\langle \rho, \alpha'; \sigma, \beta' | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\beta,\beta'} \quad (\text{B.27})$$

et donc

$$\sum_{\tau,\gamma,i} \langle \tau_i\gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle \langle \tau_i\gamma | \rho, \alpha'; \sigma, \beta' \rangle^* = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\beta,\beta'} \quad (\text{B.28})$$

- la complétude, qui s'écrit

$$\sum_{\alpha,\beta} |\rho, \alpha; \sigma, \beta\rangle \langle \rho, \alpha; \sigma, \beta| = \mathbf{1} \quad (\text{B.29})$$

soit encore

$$\sum_{\alpha,\beta} \langle \tau_i\gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle \langle \tau'_j\gamma' | \rho, \alpha'; \sigma, \beta' \rangle^* = \delta_{\tau,\tau'} \delta_{\gamma,\gamma'} \delta_{i,j} . \quad (\text{B.30})$$

La relation (B.26) s'inverse alors en

$$|\tau_i \gamma\rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle^* |\rho, \alpha; \sigma, \beta\rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle \rho, \alpha; \sigma, \beta | \tau_i \gamma \rangle |\rho, \alpha; \sigma, \beta\rangle \quad (\text{B.31})$$

*Produit de matrices représentatives :*

En insérant  $D^{(\rho)} \otimes D^{(\sigma)}$  dans la relation (B.26) et sa conjuguée, on obtient finalement

$$D_{\alpha\alpha'}^{(\rho)} D_{\beta\beta'}^{(\sigma)} = \sum_{\tau, \gamma, \gamma', i} \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle^* \langle \tau'_i \gamma' | \rho, \alpha'; \sigma, \beta' \rangle \mathcal{D}_{\gamma\gamma'}^{(\tau_i)}. \quad (\text{B.32})$$

## B.3. Représentation régulière

Une représentation joue un rôle très important, aussi bien pour les groupes finis que pour les groupes de Lie, tel que le groupe des rotations ou le groupe de Lorentz.

**Définition B.22 :**

Soit  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{K}$ . L'action de  $G$  sur cet espace définit la représentation régulière (à gauche<sup>2</sup>) de la façon suivante :

$$\forall g \in G, D^{\text{reg}}(g) : E \rightarrow E \quad (\text{B.33})$$

$$f \mapsto D^{\text{reg}}(g)f = gf \quad (\text{B.34})$$

$$\text{où } gf \text{ est définie par } (gf)(x) = f(g^{-1}x). \quad (\text{B.35})$$

*Preuve :*

Le passage à l'inverse permet de s'assurer de la propriété de morphisme :

$$(g'(gf))(x) = (gf)(g'^{-1}x) = f(g^{-1}g'^{-1}x) = f((g'g)^{-1}x) = ((g'g)f)(x) \quad (\text{B.36})$$

et donc  $D^{\text{reg}}(g')D^{\text{reg}}(g) = D^{\text{reg}}(g'g)$ , *q.e.d.*

---

2. On définit de la même façon l'action à droite par  $(D_d^{\text{reg}}(g)f)(x) = f(xg)$ , qui est bien une représentation puisque  $(D_d^{\text{reg}}(g')(D_d^{\text{reg}}(g)f)(x) = (D_d^{\text{reg}}(g)f)(xg') = f(xg'g) = (D_d^{\text{reg}}(g'g)f)(x)$ , ce qui montre que  $D_d^{\text{reg}}(g'g) = D_d^{\text{reg}}(g')D_d^{\text{reg}}(g)$ .



# C. Groupes et algèbres de Lie

## Préliminaire

En mécanique quantique, les états physiques sont décrits par des rayons (qui sont par définition des vecteurs de l'espace de Hilbert *à une phase près*). Les opérations de symétrie, qui préservent par définition les probabilités de transition (mais pas forcément les amplitudes de probabilité), sont codées sur l'espace de Hilbert par des opérateurs unitaires ou anti-unitaires (c'est un célèbre théorème dû à Wigner). L'espace de Hilbert fournit alors un espace de représentation *à une phase près* du groupe de symétrie  $G$ , ce qui est très pénible à étudier mathématiquement. On étudie plutôt le groupe de recouvrement  $\tilde{G}$  du groupe de symétrie (en un sens à préciser mathématiquement) : c'est le groupe le plus simple qui possède la même algèbre de Lie que  $G$ , et qui est *simplement connexe* (tous les chemins sur le groupe peuvent se contracter en un point). On montre alors que les *représentations de  $\tilde{G}$*  induisent automatiquement les *représentations projectives de  $G$* . Le groupe  $\tilde{G}$  peut en principe posséder lui-même des représentations projectives, s'il possède ce que l'on appelle des charges centrales (des opérateurs qui commutent avec tous les éléments du groupe de symétrie). Une telle situation n'arrive pas dans le cas des algèbres de Lie semi-simples.

*Exemples :*

non simplement connexe	simplement connexe
$SO(3)$	$SU(2)$
spin entier = représentation	spin entier = représentation
spin demi-entier $\neq$ représentation	spin demi-entier = représentation

$SO(3, 1)$	$SL(2, \mathbb{C}) \leftrightarrow SU(2) \times SU(2)$
(groupe de Lorentz)	(forme réelle compacte)
	spineurs    spineurs
	$(\frac{1}{2}, 0)$ $(0, \frac{1}{2})$
	$\underbrace{\hspace{10em}}$ $\downarrow$ bispineurs

(indispensables si l'on rajoute la symétrie de parité  $P$ )

→ équations d'onde relativistes (ex. : éq. de Dirac)

## C.1. Généralités

### C.1.1. Groupe continu, groupe de Lie, algèbre de Lie

**Définition C.1 :** *Groupe continu*

$G$  est un groupe continu (ou groupe topologique) de dimension  $n$  si et seulement si

- ◇ il existe une correspondance bi-univoque entre  $G$  et un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  :  $g \in G \leftrightarrow \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . ex. : rotation de  $\mathbb{R}^3$  caractérisée par un angle et un vecteur unitaire
- ◇  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ , si  $g(\vec{\alpha}), g(\vec{\beta}) \in G$ ,  $g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta}) \in G$ . Il existe donc  $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n$  t.q.  $g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta}) = g(\vec{\gamma})$   $\vec{\gamma} = \phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ . Par hypothèse,  $\phi$  est une fonction *continue* de  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
- ◇  $g^{-1}(\vec{\alpha})$  peut s'écrire  $g(\vec{\alpha}')$  avec  $\vec{\alpha}' = f(\vec{\alpha})$  où par hypothèse  $f$  est fonction *continue* de  $\vec{\alpha}$

**Définition C.2 :** *Groupe de Lie*

$G$  est un groupe de Lie si et seulement si  $G$  est un groupe continu pour lequel  $\phi$  et  $f$  sont analytiques. Pour simplifier les notations, on notera  $\alpha$  le vecteur  $\vec{\alpha}$ .

Notons que les définitions qui viennent d'être données ne sont pas les plus générales. On s'est en fait limité ici aux groupes linéaires. Pour un mathématicien, un groupe se définit sur une *variété*. Pour donner une image géométrique simple de cette notion, imaginons que le groupe considéré soit de dimension 2, et que sa variété soit la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Cela signifie qu'un élément donné du groupe et son voisinage peuvent être repérés de façon continue et bijective (on dira qu'il y a *homéomorphisme*) par une sous partie de  $\mathbb{R}^2$ . Ce voisinage et la bijection correspondante jouent le rôle d'une *carte* permettant de se repérer au voisinage d'un point de la sphère. Bien entendu, au voisinage d'un autre point de la sphère, il faudra utiliser une autre carte. L'ensemble des cartes constitue un atlas (c'est le même vocabulaire qu'en géographie !). Pour un groupe de Lie, les changements de cartes associées à la variété constituée par le groupe sont



supposés analytiques. Dans de nombreux domaines de la physique, une telle définition est trop générale, et se limiter au cas où la variété est  $\mathbb{R}^n$  lui-même suffit (l'atlas est alors constitué d'une seule carte sur  $\mathbb{R}^n$  en entier, et on parle alors de groupe linéaire). Le lecteur attentif pourra cependant constater qu'une grande partie des résultats énoncés dans ce chapitre sont des résultats basés sur des propriétés *locales* des groupes de Lie, pour lesquelles le passage des groupes de Lie linéaires au cas général est uniquement un jeu d'écriture.

*Remarque :*

un choix usuel pour l'application de  $\mathbb{R}^n$  sur  $G$  est de choisir que  $g(0) = e$  où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ , que l'on notera également 1 en utilisant une notation multiplicative pour la loi de groupe.

### C.1.2. Générateurs

D'après la définition donnée ci-dessus d'un groupe de Lie, ayant fixé un élément de  $\mathbb{R}^n$  et l'élément correspondant du groupe, on peut effectuer un développement en série localement au voisinage de ce point de  $\mathbb{R}^n$  et donc de l'élément correspondant du groupe. A cause de la structure de groupe, il suffira de mettre en pratique cette idée au voisinage de l'identité. On pose donc

$$g(\vec{\alpha}) = 1 + i\alpha^a T_a + O(\alpha^2). \quad (\text{C.1})$$

Les  $T_a$  (au nombre de  $n$  puisque l'on peut différentier dans  $n$  directions possibles sur  $\mathbb{R}^n$ ) sont appelés *générateurs* du groupe. Avec cette définition incluant un facteur  $i$ , ils sont hermitiens si le groupe est unitaire, ce qui sera souvent le cas en physique.

### C.1.3. Application exponentielle

Pour un groupe de matrices  $G$ , l'application exponentielle est aisée à définir.

L'application exponentielle de l'algèbre de Lie  $M(n, \mathbb{R})$  du groupe de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$  vers son groupe de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$  peut se définir par le développement en série

$$\begin{aligned} \exp : M(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbf{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Plus généralement, si l'on considère un sous-groupe  $G$  de  $GL(n, \mathbb{R})$ , alors  $\exp$  est une application de l'algèbre de Lie de  $G$  vers  $G$ .

La question est maintenant d'étendre cette définition au cas où le groupe de Lie  $G$  n'est pas un groupe de matrices. D'autre part, une définition intrinsèque

permet de ne pas faire dépendre cette application de la représentation du groupe de Lie par un groupe de matrice. Une telle construction fait appel au concept de variété, que nous ne discuterons pas ici.

### C.1.4. Algèbre de Lie

Nous allons nous limiter ici aux groupes de matrices, ce qui permet d'utiliser la notion d'exponentielle de matrice, définie de façon naturelle par le développement en série comme discuté précédemment.

Notons  $\vec{e}^a = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  les vecteurs de base de  $\mathbb{R}^n$ , où le coefficient non nul est en  $a$ -ième position. On peut alors considérer l'exponentielle d'un générateur le long d'une direction (en gardant un paramètre libre de façon à pouvoir différentier par rapport à ce paramètre), et donc définir, pour tout vecteur  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$  (de composantes  $\alpha^a$ ),

$$g(\sqrt{t} \vec{\alpha}) = \exp(i\sqrt{t} \alpha^a T_a). \quad (\text{C.3})$$

et donc en particulier

$$g(\sqrt{t} \vec{e}^a) = \exp(i\sqrt{t} T_a). \quad (\text{C.4})$$

Dans la limite où  $|t| \ll 1$ , considérons le produit

$$\begin{aligned} & g(\sqrt{t} \vec{e}^b) g(\sqrt{t} \vec{e}^a) g^{-1}(\sqrt{t} \vec{e}^b) g^{-1}(\sqrt{t} \vec{e}^a) = \\ & \left[ 1 + i\sqrt{t} T_b - \frac{t}{2} T_b^2 + o(t) \right] \left[ 1 + i\sqrt{t} T_a - \frac{t}{2} T_a^2 + o(t) \right] \\ & \times \left[ 1 - i\sqrt{t} T_b - \frac{t}{2} T_b^2 + o(t) \right] \left[ 1 - i\sqrt{t} T_a - \frac{t}{2} T_a^2 + o(t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

A l'ordre  $t$ , un calcul immédiat montre que le produit (C.5) est égal à  $1 + t(T_a T_b - T_b T_a)$ . Comme ce produit appartient lui-même au groupe  $G$ , il existe  $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n$  t.q.

$$g(\sqrt{t} \vec{e}^b) g(\sqrt{t} \vec{e}^a) g^{-1}(\sqrt{t} \vec{e}^b) g^{-1}(\sqrt{t} \vec{e}^a) = g(t\vec{\gamma}). \quad (\text{C.6})$$

En composant membre à membre, on obtient donc

$$1 + t(T_a T_b - T_b T_a) + o(t) = 1 + it \gamma^c T_c + o(t)$$

i.e.  $T_a T_b - T_b T_a = \gamma^c T_c$ . Le coefficient  $\gamma^c$  dépend de  $a$  et  $b$  : on le notera donc  $f_{ab}^c$ , d'où

$$\boxed{[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c} \quad (\text{C.7})$$

Les coefficients  $f_{ab}^c$  sont appelés *constantes de structure du groupe*.

**Définition C.3 :** *Algèbre de Lie*

L'ensemble des générateurs  $T_a$ , muni du commutateur  $[\cdot, \cdot]$  qui joue le rôle d'un produit, forme une  $\mathbb{R}$ -algèbre, appelée algèbre de Lie du groupe, et notée  $\mathfrak{g}$ .

**Identité de Jacobi**

On déduit immédiatement de la définition (C.7), en utilisant les propriétés d'antisymétrie du commutateur, que

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0 \tag{C.8}$$

*i.e.*, en terme des constantes de structure du groupe :

$$f_{bc}^e f_{ae}^d + f_{ca}^e f_{be}^d + f_{ab}^e f_{ce}^d = 0. \tag{C.9}$$

*Remarques :*

- ◇ D'après la définition (C.7),  $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$ .
- ◇ Contrairement à ce que le nom « constante de structure » pourrait sous-entendre, les  $f_{ab}^c$  ne sont pas des constantes : elles dépendent de la base  $T_1, \dots, T_n$  choisie pour l'algèbre  $\mathfrak{g}$ . En effet, soient  $X, Y \in \mathfrak{g}$  avec  $X = \alpha^a T_a$  et  $Y = \beta^b T_b$ . Les  $\alpha^a$  (resp.  $\beta^b$ ) doivent être compris comme les composantes de  $X$  dans la base  $T_a$  (resp.  $T_b$ ).

Posons  $Z = [X, Y]$ . Alors  $Z = [\alpha^a T_a, \beta^b T_b] = \alpha^a \beta^b i f_{ab}^c T_c = \gamma^c T_c$ , d'où  $\gamma^c = i f_{ab}^c \alpha^a \beta^b$ .

$\alpha^a$ : coordonnée = vecteur contravariant $T_a$ : vecteur de base = vecteur covariant	}	se transforment par changement de base (voir plus loin l'exemple du groupe de Lorentz pour la notion de calcul covariant)
------------------------------------------------------------------------------------------------	---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**C.1.5. Quelques définitions utiles**

Nous présentons ici quelques structures qui seront utiles dans la suite, en particulier pour comprendre l'importance de la compacité discutée plus loin.

**Définition C.4 :** *Algèbre de Lie réelle*

Une algèbre de Lie réelle  $\mathfrak{g}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n \geq 1$ ) muni d'un produit bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.  $[\cdot, \cdot]$  doit donc vérifier :

### C. Groupes et algèbres de Lie

1.  $[a, b] \in \mathfrak{g} \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}$
2.  $\forall (a, b, c) \in \mathfrak{g}^3, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad [\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c]$
3.  $[a, b] = -[b, a] \quad \forall (a, b) \in \mathfrak{g}^2$
4. identité de Jacobi :  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

On parle alors d'algèbre de Lie abstraite, puisqu'il n'est pas nécessaire de la construire à partir d'un groupe de Lie.

#### **Théorème C.5 :** *Théorème d'Ado*

Toute algèbre de Lie abstraite sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle est isomorphe à une algèbre de Lie de matrices carrée dont le crochet de Lie est défini par le crochet de Lie usuel  $[a, b] = ab - ba$ .

La théorie des algèbres de Lie abstraite ne fait donc pas apparaître de nouvelles structures.

#### **Définition C.6 :** *Algèbre de Lie complexe*

Une algèbre de Lie complexe  $\mathfrak{g}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n \geq 1$ ) muni d'un produit bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi. Cela signifie que dans le point 2. de la définition d'une algèbre de Lie réelle, il faut maintenant considérer  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ .

*Conséquence :* les constantes de structure peuvent maintenant être complexes.

Exemple de  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie :  $\text{SO}(3)$  et  $\text{SU}(2)$  ont pour algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  :

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$$

*Remarques :*

◇ autres notations, utilisées en particulier en mathématiques :

$$X_a = \left. \frac{\partial}{\partial t_a} X(0, \dots, t_a, \dots, 0) \right|_{t_a=0} = iT_a.$$

D'une part

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c$$

et d'autre part

$$[X_a, X_b] = [iT_a, iT_b] = C_{ab}^c X_c = C_{ab}^c iT_c \quad \text{donc } f_{ab}^c = -C_{ab}^c$$

donc

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c \xleftrightarrow{X_a=iT_a} [T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \text{ avec } f_{ab}^c = -C_{ab}^c.$$

Les  $T_a$  sont des générateurs hermitiens pour un groupe unitaire.

De manière équivalente, on peut définir une algèbre de Lie comme l'espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) engendré par les  $X_a$ .

- ◇ lexique : lorsque l'on ne précise pas le corps de l'algèbre de Lie considérée, il est sous-entendu que l'on considère la  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie.

**Définition C.7 :** *Extension complexe  $\mathfrak{g}^c$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$*

Elle est définie de la façon suivante :

- ◇  $\mathfrak{g}^c$  est l'extension complexe de l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$ , i.e. formée des éléments  $z = x + iy$  pour  $x, y \in \mathfrak{g}$
- ◇ Le crochet de lie dans  $\mathfrak{g}^c$  est

$$\begin{aligned} Z &= [Z_1, Z_2] = [X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] \\ &= [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i[X_1, Y_2] + i[Y_1, X_2] \\ &\equiv X + iY. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie *complexe*  $\mathfrak{g}$  de dimension  $n$ , de base  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , peut être considérée comme une algèbre de Lie *réelle* de dimension  $2n$ , de base  $\{X_1, iX_1, \dots, X_n, iX_n\}$ . On note cette algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^R$ .

**Définition C.8 :** *Forme réelle  $\mathfrak{g}^r$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^c$*

C'est une algèbre de lie dont l'extension complexe est  $\mathfrak{g}^c$  ( $\mathfrak{g}^r$  et  $\mathfrak{g}^c$  ont même dimension, l'une par rapport à  $\mathbb{R}$ , l'autre par rapport à  $\mathbb{C}$ ). Une algèbre de lie sur  $\mathbb{C}$  possède de nombreuses formes réelles !

On se servira un peu plus loin de cette liberté, en particulier pour la notion de compacité.

*Remarque :*

Dans le cas où l'on considère l'algèbre de Lie sur  $\mathbb{R}$ , le changement  $X_a \leftrightarrow iT_a$  consiste simplement à prendre deux formes réelles de la même algèbre de Lie sur  $\mathbb{C}$ . Ceci n'a aucun effet sur la structure (en particulier cela ne change pas la compacité : voir plus loin cette notion).

## C.2. Quelques résultats sur les groupes et algèbres de Lie

### C.2.1. Lien entre groupe de Lie et algèbre de Lie correspondante

Nous avons construit la notion d'algèbre de Lie comme un espace tangent au groupe. réciproquement, on peut se demander si l'on peut reconstruire tout ou partie du groupe connaissant son algèbre de Lie. Nous allons successivement examiner cette question localement puis globalement.

#### Sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie

**Définition C.9 :** *Sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie*

C'est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie  $G$  constitué des éléments  $T(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$  variant entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , t.q.  $\forall s, t, T(s)T(t) = T(s+t)$ .

**Proposition C.10 :**

Tout sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie est abélien.

*Preuve :*

Ceci découle immédiatement de la relation  $T(t)T(s) = T(s+t) = T(s)T(t)$ .

*Exemple :*  $SO(3)$

Considérons les matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Posons  $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $a_1^{2k+1} = (-1)^k a_1$  et  $a_1^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc  $A(t) = \exp t a_1$ .

Ce résultat est général, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème C.11 :**

Tout sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie  $G$  formé de matrices  $n \times n$  s'obtient par exponentiation de matrices  $n \times n$  :  $A(t) = \exp t \dot{A}(0)$ .

*Preuve :*

Soit  $B(t) = A(t) \exp[-t\dot{A}(0)]$

Alors  $\dot{B}(t) = \left( \dot{A}(t) - A(t)\dot{A}(0) \right) \exp[-t\dot{A}(0)]$ . Or

$$\dot{A}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A(t+s) - A(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} A(t) \frac{A(s) - A(0)}{s} = A(t)\dot{A}(0)$$

Ainsi  $\forall t, \dot{B}(t) = 0$ , et donc  $B(t) = B(0) = 1$ , d'où  $A(t) = \exp t\dot{A}(0)$ .

## Relation entre l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie $G$ et ses sous-groupes à un paramètre

### Théorème C.12 :

$\forall a \in \mathfrak{g}$ ,  $A(t) = \exp t a$  pour  $t \in ]-\infty, +\infty[$  forme un sous-groupe à un paramètre de  $G$ .

### Théorème C.13 : *Problème local*

Tout élément d'un groupe de Lie  $G$  dans un petit voisinage de l'identité appartient à un sous-groupe à un paramètre de  $G$ . Cela signifie que tout élément de  $G$  dans un voisinage de l'identité peut s'écrire comme l'exponentielle d'un élément de son algèbre de Lie. Cette correspondance est bi-univoque.

Les théorèmes suivants permettent d'étendre le résultat à l'ensemble du sous-groupe connexe de  $G$  (problème *global*).

## Composante connexe d'un groupe continu

### Définition C.14 : *Composante connexe d'un groupe continu $G$*

C'est l'ensemble des éléments du groupe qui peuvent être obtenus l'un de l'autre par variation continue de ses paramètres (i.e. par homéomorphisme).

### Théorème C.15 :

La composante connexe  $C$  de l'identité  $e$  d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$ .

*Preuve :*

Il suffit de considérer, pour un  $c$  quelconque dans  $C$ , l'homéomorphisme  $x \mapsto c^{-1}x$ . L'image de  $C$  par cet homéomorphisme est  $C$  puisqu'elle contient  $e$  et  $C$ . On a donc  $c^{-1}C = C$ , ce qui prouve le résultat d'après le critère (A.20).

**Théorème C.16 :**

La composante connexe  $C$  de l'identité  $e$  de  $G$  est un sous-groupe invariant de  $G$ , i.e.  $\forall A \in C, \forall X \in G, XAX^{-1} \in C$ . On l'appelle souvent le sous-groupe connexe de  $G$ .

*Preuve :*

Pour un  $x$  quelconque dans  $G$ ,  $x C^{-1} x$  est l'image par un homéomorphisme de  $C$  et contient  $e$ , donc est inclus dans  $C$ .

**Problème global**

**Théorème C.17 :**

Si  $G$  est un groupe de Lie compact, tout élément  $X$  de son sous-groupe connexe s'écrit sous la forme  $X = \exp a$  où  $a \in \mathfrak{g}$ . En particulier si  $G$  est compact et connexe, tout élément de  $G$  est l'exponentielle d'un élément de  $\mathfrak{g}$ .

*Remarque :*

La correspondance n'est pas forcément bi-univoque : on peut avoir  $e^a = e^b$  pour  $a \neq b$ .

*Exemple :*

Pour  $\text{SO}(3)$ ,  $\exp(\theta a_1) = \exp[(\theta + 2\pi n)a_1]$  pour  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

**Théorème C.18 :**

Tout élément du sous-groupe connexe d'un groupe de Lie  $G$  peut s'écrire comme le produit fini d'exponentielles de son algèbre de Lie réelle  $\mathfrak{g}$ .

*Remarque :*

Pour certains groupes non compacts, il peut néanmoins se produire que l'ensemble du sous-groupe connexe puisse s'obtenir par exponentiation de son algèbre de Lie. C'est par exemple le cas du Groupe de Lorentz restreint  $L_+^\uparrow$  : toute transformation de Lorentz de  $L_+^\uparrow$  peut s'écrire comme l'exponentielle d'une combinaison linéaire des générateurs des rotations et des boosts (multipliée par  $i$  avec nos conventions).

**C.2.2. Structure des algèbres de Lie et groupes de Lie ;  
caractérisation de Cartan**

Commençons par donner quelques définitions et propriétés concernant les structures des groupes et algèbres de Lie.



**Définition C.19 :** *Algèbre de Lie abélienne*

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est abélienne si et seulement si  $\forall a, b \in \mathfrak{g}, [a, b] = 0$ .

On en déduit facilement la proposition suivante :

**Proposition C.20 :**

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  d'un groupe abélien est abélienne.

**Définition C.21 :** *Sous-algèbre de Lie*

Une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{g}'$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est un sous-ensemble de  $\mathfrak{g}$ , de base  $e_1, \dots, e_k$ , muni du même crochet de Lie et formant lui-même une algèbre :  $C_{ij}^s = 0, i, j \leq k, s > k$ . La sous-algèbre  $\mathfrak{g}'$  est dite propre si au moins un élément de  $\mathfrak{g} \notin \mathfrak{g}'$ , i.e.  $\dim \mathfrak{g}' < \dim \mathfrak{g}$ .

Ceci implique alors facilement la proposition suivante :

**Proposition C.22 :**

Si  $G$  et  $G'$  sont deux groupes de Lie et  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  leurs algèbres de Lie correspondantes, et si  $G'$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $\mathfrak{g}'$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ .

**Définition C.23 :** *Sous-algèbre invariante d'une algèbre de Lie (ou idéal)*

Une sous-algèbre invariante  $\mathfrak{g}'$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre tel que  $\forall a \in \mathfrak{g}'$  et  $\forall b \in \mathfrak{g}, [a, b] \in \mathfrak{g}'$ , soit encore  $C_{ij}^s = 0, i \leq k, s > k, j$  quelconque.

**Théorème C.24 :**

Si  $G'$  est un sous-groupe invariant de  $G$ , alors  $\mathfrak{g}'$  est une sous-algèbre invariante de  $\mathfrak{g}$ .

*Preuve :*

Soient

- ◇  $b$  un vecteur tangent à la courbe analytique  $B(t)$  de  $G$
- ◇  $a'$  un vecteur tangent à la courbe analytique  $A(t)$  de  $G'$ .

Alors  $[a', b]$  est tangent à la courbe  $C(t) = A(\sqrt{t})B(\sqrt{t})A(\sqrt{t})^{-1}B(\sqrt{t})^{-1}$ . Comme  $G'$  est un sous-groupe invariant,  $B(\sqrt{t})A(\sqrt{t})^{-1}B(\sqrt{t})^{-1} \in G'$ , et donc

## C. Groupes et algèbres de Lie

$C(t)$  est une courbe analytique de  $G'$ . Ceci prouve que  $[a', b]$  est tangent à une courbe analytique de  $G'$ , et donc que  $[a', b] \in G'$ .

---

### **Théorème C.25 :**

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie réelle correspondant au groupe de Lie linéaire  $G$ . Alors chaque sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie d'exactly un sous-groupe de Lie connexe de  $G$ .

### **Définition C.26 :** *Algèbre de Lie simple*

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite simple si elle n'est pas abélienne et ne possède pas de sous-algèbre de Lie propre invariante.

### **Définition C.27 :** *Algèbre de Lie semi-simple*

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite semi-simple si elle ne possède pas de sous-algèbre de Lie abélienne invariante.

### **Définition C.28 :** *Sous-groupe discret d'un groupe de Lie*

Un sous-groupe  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  est dit discret si

a)  $H$  est un groupe fini

ou

b)  $H$  possède un nombre infini dénombrable d'éléments, tel qu'il existe un voisinage de l'identité de  $G$  qui ne contienne aucun élément de  $H$  (excepté  $e$  elle-même). De façon équivalente,  $H$  possède un nombre infini dénombrable d'éléments entourés chacun d'un voisinage sans éléments dans  $H$ .

### **Définition C.29 :** *Groupe de Lie simple*

Un groupe de Lie  $G$  est simple s'il ne possède pas de sous-groupe connexe de Lie propre invariant. Le groupe  $G$  peut donc posséder des sous-groupes discrets invariants.

*Exemple :*

Le groupe  $SU(N)$  est simple pour  $N > 1$ .

L'élément  $g = e \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$  appartient à  $SU(N)$ . Cet élément  $g$  engendre un sous-groupe discret cyclique invariant d'ordre  $N$ ,  $Z_N$ .

### **Définition C.30 :** *Groupe de Lie semi-simple*

Un groupe de Lie  $G$  est semi-simple s'il ne possède pas de sous-groupe de Lie abélien propre connexe et invariant.

Bien entendu, un groupe simple est semi-simple !

On notera que ces concepts de simplicité et semi-simplicité au niveau de l'algèbre sont construits de telle sorte qu'ils découlent de ceux au niveau du groupe :

**Proposition C.31 :**

L'algèbre de Lie d'un groupe simple est simple.

L'algèbre de Lie d'un groupe semi-simple est semi-simple.

*Exemples :*

- ◇ Le groupe de Poincaré n'est pas semi-simple, puisque le sous-groupe des translations est invariant

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\rho] &= 0 \\ [P_\rho, J_{\mu\nu}] &= i (g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu) \end{aligned}$$

- ◇  $SO(3)$  est simple
- ◇  $SO(4) = SO(3) \times SO(3)$  est semi-simple.

Nous allons maintenant présenter une caractérisation, due à Cartan, des algèbres de Lie semi-simples.

**Tenseur de Cartan-Killing**

**Définition C.32 :** *Tenseur de Cartan-Killing*

Le tenseur de Cartan-Killing  $g$  peut être défini de deux façons équivalentes :

- ◇ Par ses éléments de matrice, une base de l'algèbre de Lie étant fixée, suivant

$$g_{\rho\sigma} = C_{\rho\alpha}{}^\beta C_{\sigma\beta}{}^\alpha (= f_{\rho\alpha}{}^\beta f_{\sigma\beta}{}^\alpha). \tag{C.10}$$

- ◇ En introduisant l'opérateur *adjoint* (noté  $\text{ad}$ ), défini par<sup>1</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} X \quad \mapsto \quad \text{ad}X \\ \text{ad}X(Y) = [X, Y] \end{array} \right. , \tag{C.11}$$

ce tenseur de Cartan-Killing peut être défini par

$$g_{\rho\sigma} = \text{Tr}(\text{ad}X_\rho \text{ad}X_\sigma). \tag{C.12}$$

---

1. On notera également  $\text{ad}X Y = \text{ad}X(Y)$ .

## C. Groupes et algèbres de Lie

*Preuve :*

L'élément de matrice  $(\alpha, \beta)$  de  $\text{ad}X_\rho$  est donné par  $[X_\rho, X_\beta]_\alpha$  (c'est le coefficient  $\alpha$  de l'image du vecteur  $X_\beta$  par l'opérateur  $\text{ad}X_\rho$ ), qui vaut  $C_{\rho\beta}^\alpha$  et donc la trace de  $\text{ad}X_\rho \text{ad}X_\sigma$  est simplement

$$C_{\rho\beta}^\alpha C_{\sigma\beta'}^{\alpha'} \delta_\alpha^{\beta'} \delta_{\alpha'}^\beta = C_{\rho\beta}^\alpha C_{\sigma\alpha}^\beta \quad (\text{C.13})$$

qui est identique à  $C_{\rho\alpha}^\beta C_{\sigma\beta}^\alpha$ .

On vérifie immédiatement d'après les définitions équivalentes (C.10) et (C.12) que  $g$  est symétrique.

**Théorème C.33 :** (*Cartan*)

Une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si  $\det g \neq 0$ .

*Preuve :*

Nous allons seulement montrer que  $\det g \neq 0 \Rightarrow$  algèbre de Lie semi-simple. Montrons donc que si  $\mathfrak{H}$  est une sous-algèbre abélienne invariante de  $\mathfrak{g}$  alors  $\det g = 0$ . On indexe par un indice latin  $i, j, \dots \leq p$  les éléments de  $\mathfrak{H}$ . Considérons les éléments  $g_{\rho i}$ ,  $\forall i \leq p$ . Comme  $\mathfrak{H}$  est une sous-algèbre invariante,  $C_{i\beta}^\alpha = 0$  si  $\alpha > p$ , et donc

$$g_{\rho i} = C_{\rho\alpha}^\beta C_{i\beta}^\alpha = C_{\rho j}^\beta C_{i\beta}^j, \quad (\text{C.14})$$

ce qui conduit encore, en utilisant le même argument pour  $C_{\rho j}^\beta$ , à

$$g_{\rho i} = C_{\rho j}^k C_{ik}^j. \quad (\text{C.15})$$

Comme  $\mathfrak{H}$  est abélienne,  $C_{ik}^j = 0$ , ce qui montre que  $\forall \alpha, \forall i \leq p, g_{\alpha i} = 0$ . D'où  $\det g = 0$ .

Le tenseur  $g$  permet de définir un calcul covariant. Ainsi  $C_{\rho\sigma\tau} = g_{\alpha\tau} C_{\rho\sigma}^\alpha$ .

### Exercice 3.1

On considère les transformations  $E_2$  du plan euclidien dans lui-même

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b. \end{cases}$$

Introduisant le vecteur  $X = (x, y, 1)$ , on a  $X' = MX$  où  $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & a \\ \sin \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que les générateurs s'écrivent

$$X_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et qu'il vérifient

$$\begin{cases} [X_\theta, X_a] = X_b \\ [X_\theta, X_b] = -X_a \\ [X_a, X_b] = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et que  $E_2$  n'est pas semi-simple.

### C.2.3. Algèbre de Lie compacte

Afin de définir la notion d'algèbre de Lie compacte, quelques résultats préliminaires vont nous être utiles.

#### Proposition C.34 :

L'opérateur  $\text{ad}$  vérifie, pour tout  $X$  et  $Y$  de  $\mathfrak{g}$ ,

$$[\text{ad}X, \text{ad}Y] = \text{ad}[X, Y]. \quad (\text{C.16})$$

*Preuve :*

Il suffit pour cela de montrer que  $\forall Z \in \mathfrak{g}$ ,

$$[\text{ad}X, \text{ad}Y]Z = \text{ad}[X, Y]Z. \quad (\text{C.17})$$

D'une part,

$$\text{ad}[X, Y]Z = [[X, Y], Z], \quad (\text{C.18})$$

et d'autre part

$$[\text{ad}X, \text{ad}Y]Z = \text{ad}X \text{ad}Y Z - \text{ad}Y \text{ad}X Z = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \quad (\text{C.19})$$

En utilisant l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{C.20})$$

on a donc

$$[\text{ad } X, \text{ad } Y] Z = [[X, Y], Z], \quad (\text{C.21})$$

*q.e.d.*

Le tenseur de Cartan-Killing (C.10,C.12) permet de définir une forme bilinéaire symétrique, dite forme de Killing.

**Définition C.35 :** *Forme de Killing*

La forme de Killing est définie par son action sur les vecteurs de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  par

$$(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y). \quad (\text{C.22})$$

En décomposant  $X = x^\rho X_\rho$  et  $Y = y^\sigma X_\sigma$  dans une base  $X_\alpha$ , on peut bien sûr écrire

$$(X, Y) = x^\rho y^\sigma g_{\rho\sigma} = x^\rho y^\sigma C_{\rho\alpha}{}^\beta C_{\sigma\beta}{}^\alpha. \quad (\text{C.23})$$

**Proposition C.36 :** *Invariance de la forme de Killing*

La forme de Killing (C.22) est invariante sous l'action de  $\text{ad } Z$ , *i.e.*

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, (\text{ad } Z X, Y) + (X, \text{ad } Z Y) = 0, \quad (\text{C.24})$$

qui s'écrit encore

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, ([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0. \quad (\text{C.25})$$

*Preuve :*

On applique la relation  $[\text{ad } X, \text{ad } Y] Z = \text{ad } [X, Y] Z$  à chacun des deux termes de l'éq. (C.25) :

le premier s'écrit

$$\begin{aligned} ([Z, X], Y) &= \text{Tr}(\text{ad } [Z, X] \text{ ad } Y) = \text{Tr}([\text{ad } Z, \text{ad } X] \text{ ad } Y) \\ &= \text{Tr}(\text{ad } Z \text{ ad } X \text{ ad } Y) - \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Z \text{ ad } Y), \end{aligned}$$

et le second conduit à

$$(X, [Z, Y]) = \text{Tr}(\text{ad } X[\text{ad } Z, \text{ad } Y]) = \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Z \text{ ad } Y) - \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y \text{ ad } Z).$$

En combinant ces deux résultats on obtient

$$(\text{ad } Z X, Y) + (X, \text{ad } Z Y) = \text{Tr}(\text{ad } Z \text{ ad } X \text{ ad } Y) - \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y \text{ ad } Z) \quad (\text{C.26})$$

par cyclicité de la trace, *q.e.d.*

---

On notera que cette invariance est somme toute naturelle, puisqu'elle correspond à l'invariance du produit scalaire défini à l'aide de la forme de Killing sous l'action de  $\text{ad } Z$  qui est un générateur infinitésimal de la représentation de l'algèbre de Lie sur elle-même (voir plus loin la notion de représentation adjointe).

**Définition C.37 :** *Algèbre de Lie compacte*

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite compacte s'il existe sur  $\mathfrak{g}$  une forme quadratique  $(\cdot, \cdot)$  définie négative qui satisfait l'invariance (C.25).

La forme de Cartan-Killing satisfait la condition (C.25), comme nous venons de le montrer. On démontre que dans une algèbre de Lie simple, les formes bilinéaires invariantes au sens (C.25) sont toutes multiples de la forme de Killing. Il nous suffit donc d'étudier la forme de Killing pour connaître la nature compacte ou non de l'algèbre de Lie. Ceci nous amène au second théorème de Cartan.

**Théorème C.38 :** *(Cartan)*

Une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  est compacte si et seulement si sa forme de Killing est définie négative.

**Théorème C.39 :**

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  d'un groupe de Lie  $G$  compact (au sens topologique) est compacte.

On trouvera une preuve de ce théorème (qui utilise la mesure de Haar sur un groupe compact, voir plus loin)

Dans le cas des groupes de matrices auquel nous nous limitons ici, il suffit que la partie de  $\mathbb{R}^n$  qui est en bijection avec  $G$  soit un compact pour que  $G$  soit compact.

*Rappel :* sur  $\mathbb{R}^n$  un compact est un fermé borné.

### C. Groupes et algèbres de Lie

De façon générale, une forme quadratique définie sur une algèbre de Lie complexe est indéfinie. Donc (puisque c'est le cas en particulier pour la forme associée à  $g$ ), toute algèbre de Lie complexe est non compacte.

Une algèbre de Lie compacte est une forme réelle particulière  $L^r$  d'une algèbre de Lie complexe.

#### Théorème C.40 :

Pour une algèbre de Lie compacte semi-simple,  $C_{rs}^\ell$  peut être représenté par un tenseur d'ordre 3 covariant, complètement antisymétrique.

*Preuve :*

$$\begin{aligned} C_{rsl} &= C_{rs}^t g_{tl} \\ &= C_{rs}^t C_{tm}^n C_{ln}^m = -C_{sm}^t C_{tr}^n C_{ln}^m - C_{mr}^t C_{ts}^n C_{ln}^m \\ &= C_{sm}^t C_{rt}^n C_{ln}^m + C_{mr}^t C_{ts}^n C_{nl}^m. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est invariante sous les permutations circulaires, et antisymétrique en  $r, s$ . Donc  $C_{rsl}$  est complètement antisymétrique.

D'autre part, puisque  $L$  est compacte, il est toujours possible par changement de base d'écrire  $g_{tl} = -\delta_{tl}$  (en effet  $g$  est symétrique, réelle et définie négative), et donc  $C_{rsl} = -C_{rs}^\ell$ , (ou encore  $C_{rsl} = C_{rs}^\ell$  en changeant le signe des générateurs)).

---

#### Exercice 3.2

Montrer que  $C = g^{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma$  est un opérateur de Casimir, c'est-à-dire qu'il commute avec tous les éléments de l'algèbre de Lie

$$\begin{aligned} [C, X_\tau] &= g^{\rho\sigma} [X_\rho X_\sigma, X_\tau] = g^{\rho\sigma} X_\rho [X_\sigma, X_\tau] + g^{\rho\sigma} [X_\rho, X_\tau] X_\sigma \\ &= g^{\rho\sigma} X_\rho C_{\sigma\tau}^\lambda X_\lambda + g^{\rho\sigma} C_{\rho\tau}^\lambda X_\lambda X_\sigma = g^{\rho\sigma} C_{\sigma\tau}^\lambda X_\rho X_\lambda + g^{\sigma\rho} C_{\sigma\tau}^\lambda X_\lambda X_\rho \\ &= g^{\rho\sigma} C_{\sigma\tau}^\lambda (X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho) = g^{\rho\sigma} \underbrace{g^{\lambda\nu} C_{\nu\sigma\tau}}_{\text{antisymétrique en } \rho, \lambda} \underbrace{(X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho)}_{\text{symétrique en } \rho, \lambda} = 0 \end{aligned}$$

#### Exercice 3.3



Dans le cas particulier de la  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , vérifier qu'avec les normalisations usuelles telles que  $X_\mu = \sigma_\mu/2$  (où  $\sigma_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) sont les 3 matrices de Pauli),  $g_{\rho\sigma} = -2\delta_{\rho\sigma}$ .

Examinons le cas plus général d'une algèbre de Lie semi-simple réelle quelconque.

Rappelons que par une transformation réelle orthogonale on peut toujours diagonaliser la matrice réelle symétrique  $A$  (ici  $g$ ) qui définit la forme quadratique (ici la forme de Cartan-Killing), celle-ci ayant des valeurs propres non nulles par hypothèse de semi-simplicité.

En normalisant les vecteurs propres (ici les générateurs  $X_i$  qui forme la nouvelle base dans laquelle  $g$  est diagonale), on se ramène ensuite à une forme quadratique dont la matrice est uniquement constituée de coefficients diagonaux, valant 0 (en nombre  $n_0$ ),  $-1$  (en nombre  $n_-$ ) ou  $+1$  (en nombre  $n_+$ ). La signature de la forme quadratique est le triplet  $(n_0, n_-, n_+)$ , qui est un invariant (par changement de base) d'après le théorème d'inertie de Sylvester.

Dans le cas présent d'une algèbre de Lie semi-simple, la forme est non dégénérée, *i.e.*  $n_0 = 0$ . Si  $g$  possède des valeurs propres positives, le théorème de Sylvester interdit de pouvoir changer leur signe, et  $\mathfrak{g}$  est non-compacte. Cela sera possible à condition de multiplier chacun des générateurs de valeur propre  $+1$  par  $i$ , de façon à obtenir  $g$  sous la forme  $g_{t\ell} = -\delta_{t\ell}$ .

Une telle manipulation correspond à prendre une forme réelle particulière de l'extension complexe de la  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie initiale. Cela change la compacité de la  $\mathbb{R}$ -algèbre ainsi construite par rapport à la  $\mathbb{R}$ -algèbre initiale.

La compacité est donc un cadre puissant :

- ◇ Elle permet d'obtenir *toute* la composante connexe de l'identité d'un groupe à partir de l'exponentielle de son algèbre de Lie (dans le cas général on a seulement accès à un voisinage de l'identité).
- ◇ L'étude des représentations des groupes compacts est beaucoup plus simple.

En outre, tous les résultats classiques valables pour les groupes finis (application à la cristallographie par exemple) s'étendent sans difficulté aux groupes compacts. En effet, la somme sur les éléments d'un groupe fini peut être remplacée par une intégrale : pour tout groupe  $G$  compact, il existe une *mesure* de Haar unique t.q.

- ◇ La mesure est invariante à gauche et à droite, *i.e.*  $\forall f$  continue sur  $G$ ,  $\forall h \in G$ ,  $\int_G f(g)dg = \int_G f(hg)dg = \int_G f(gh)dg$

## C. Groupes et algèbres de Lie

- ◇ Le volume du groupe est fini. On peut normaliser la mesure de Haar de sorte que  $\int_G dg = 1$ .

On notera que les théories de jauge non abéliennes sont basées sur les groupes compacts.

### C.2.4. Classification

Le théorème suivant permet de ramener l'étude de la classification des algèbres de Lie à celle des algèbres simples.

#### Théorème C.41 :

Toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  peut s'écrire sous la forme  $\mathfrak{g} = \oplus$  générateurs abéliens  $\oplus$  sous-algèbres simples.

Les algèbres de Lie simples réelles et complexes sont complètement classifiées (Killing, Cartan). Cette classification dépasse le cadre de ce cours. Nous allons simplement donner la classification des  $\mathbb{C}$ -algèbres de Lie, ce qui nous permettra de caractériser les groupes de Lie classiques et leurs algèbres de Lie.

#### Transformations unitaires : $U(N)$ et $SU(N)$

Soient  $\xi$  et  $\eta \in \mathbb{C}^N$  qui se transforment sous l'action de matrices complexes  $N \times N$  suivant :

$$\forall U \in GL(N, \mathbb{C}), \quad \eta^a \rightarrow \eta'^a = U^a_b \eta^b \quad \text{et} \quad \xi^a \rightarrow \xi'^a = U^a_b \xi^b. \quad (\text{C.27})$$

La loi de transformation est ici écrite de façon covariante : les composantes de  $\xi$  et  $\eta$  sont par définition des quantités contravariantes, notées  $\xi^a$  et  $\eta^a$ , qui se transforment sous l'action de la matrice  $U$  dont les éléments de matrice  $(U)_{ab}$  permettent de définir

$$U^a_b \equiv (U)_{ab} \quad (\text{C.28})$$

de sorte que les vecteurs images  $\xi'$  et  $\eta'$  sont bien eux aussi contravariants.

La transposée  $U^t$  de la matrice  $U$  a pour éléments de matrice

$$(U^t)_{ab} \equiv (U)_{ba} = U^b_a. \quad (\text{C.29})$$

Par définition,  $U(N)$  est l'ensemble des matrices qui laissent invariant  $\bar{\eta}^t \xi = \bar{\eta}^a \xi^a$ .

Sous l'action d'une matrice de  $U(N)$ ,  $\bar{\eta}^a \xi^a$  devient  $\bar{\eta}'^a \xi'^a = \bar{U}^a_b \bar{\eta}^b U^a_c \xi^c = \bar{\eta}^a \xi^a$  donc  $\bar{U}^a_b U^a_c = \delta^b_c$  soit encore  $(\bar{U}^t)^b_a U^a_c = \delta^b_c$ , ce qui signifie matriciellement

que  $\bar{U}^t U = \mathbb{1}$ , i.e.  $U^+ U = \mathbb{1}$ , où

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{N \times N}.$$

On montre de la même façon que  $U U^+ = \mathbb{1}$ .

*Remarque* : il n'est bien sûr pas indispensable d'utiliser les notations covariantes pour ce calcul élémentaire. Le seul intérêt est ici de se familiariser avec ces manipulations, utiles pour l'étude générale des représentations irréductibles de  $SU(N)$  à l'aide des tableaux de Young.

L'algèbre de Lie de  $U(N)$  s'obtient aisément en écrivant la condition d'unitarité sous la forme

$$(1 + X_a)(1 + X_a^+) \approx 1 + (X_a + X_a^+) \quad (\text{C.30})$$

qui conduit donc à  $X_a = -X_a^+$  : les générateurs de  $U(N)$  sont donc formés des *matrices antihermitiennes*, au nombre de  $N^2$  (voir ci-dessous).

Les transformations particulières  $\xi^a \rightarrow e^{i\alpha} \xi^a$  appartiennent à  $U(N)$ , et correspondent au sous-groupe  $U(1)$ , de générateur  $i\mathbb{1}$ .

On se ramène à un groupe *simple*, en imposant que les générateurs soient orthogonaux à  $\mathbb{1}_{N \times N}$ , i.e.  $\delta_{bc}(X_a)_{bc} = 0$  soit  $(X_a)_{bb} = 0$  ou encore  $\text{Tr } X_a = 0$ .

Ceci définit l'algèbre de Lie de  $SU(N)$ , qui est formée de  $N^2 - 1$  générateurs (voir ci-dessous).

*Remarques* :

- ◇ Pour  $U(N)$ ,  $U^+ U = 1$  conduit à  $|\det U|^2 = 1$  donc  $\det U = e^{i\alpha}$ .
- ◇ à la condition  $\text{Tr } X_a = 0$  au niveau de l'algèbre correspond la condition  $\det U = 1$  pour le groupe.
- ◇ Pour toute matrice  $n \times n$  (supposée diagonalisable),

$$\boxed{\det(1 + \varepsilon X) = 1 + \varepsilon \text{Tr } X + O(\varepsilon^2)}. \quad (\text{C.31})$$

*Preuves* :

### C. Groupes et algèbres de Lie

Pour la seconde remarque, on écrit, dans un voisinage de l'identité,  $U = e^X$  et l'on diagonalise  $X$ , sous la forme  $X = P\Lambda P^{-1}$ , où  $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Alors  $\exp X = P \exp \Lambda P^{-1}$  et

$$\det U = \det \exp \Lambda = \exp \text{Tr} \Lambda = \exp \text{Tr} X, \text{ q.e.d..}$$

Pour la troisième remarque, il suffit de diagonaliser la matrice  $X$ . On écrit donc  $X = P\Lambda P^{-1}$ , où  $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , ce qui conduit à  $\det(\mathbb{1} + \varepsilon X) = \det(P(\mathbb{1} + \varepsilon\Lambda)P^{-1}) = \det(\mathbb{1} + \varepsilon\Lambda) \sim 1 + \varepsilon \text{Tr} \Lambda + O(\varepsilon^2)$ , ce qui mène au résultat puisque  $\text{Tr} D\Lambda = \text{Tr} X$ .

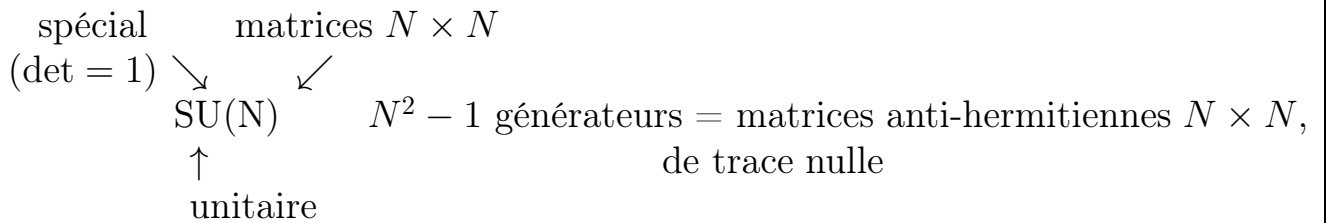
#### Nombre de générateurs :

$$\left. \begin{array}{l} N \text{ coefficients imaginaires purs diagonaux} \\ \frac{N(N-1)}{2} \text{ coefficients non diagonaux complexes} \end{array} \right\} \Rightarrow N + 2 \frac{N(N-1)}{2} = N^2$$
 paramètres réels,

ce qui donne le nombre de générateurs de  $U(N)$ ,

Pour  $SU(N)$ , la condition supplémentaire  $\det U = 1$ , qui est équivalente à  $\text{Tr} X = 0$ , correspond donc à un paramètre en moins, ce qui laisse finalement  $N^2 - 1$  paramètres réels.

#### Résumé



La  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(N, \mathbb{R})$  est la seule forme réelle compacte de la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ , constituée des matrices complexes  $N \times N$  de trace nulle. C'est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de l'algèbre  $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  constituée des matrices complexes  $N \times N$ . Dans la classification de Cartan, c'est l'algèbre de Lie  $A_{N-1}$ .

#### Transformations orthogonales : $O(N)$ et $SO(N)$

Soient  $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ . Par définition,  $O(N)$  est l'ensemble des matrices réelles  $A$  qui laissent invariant  $\eta^a \xi^a = \eta^t \xi$ . Ceci s'écrit  $A^t A = A A^t = 1$ , c'est-à-dire, au niveau de l'algèbre de Lie,  $T^a + (T^a)^t = 0$ , qui correspondent aux matrices antisymétriques  $N \times N$ .

## C.2. Quelques résultats sur les groupes et algèbres de Lie

*Remarque :*  $O(N)$  contient des transformations discrètes, qui n'ont pas d'analogue dans l'algèbre de Lie. On se débarrasse de ces transformations en considérant  $SO(N)$  qui impose la contrainte  $\det A = 1$ .

### Nombre de générateurs :

Chaque élément de  $O(N)$  possède  $N^2$  éléments de matrice.

La contrainte  $A^T A = A A^T = 1$  impose donc  $\frac{N(N-1)}{2}$  conditions d'orthogonalité  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$  ( $i \neq j$ ).

Les  $N$  conditions d'orthogonalité  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$  réduisent le nombre de générateurs : au total,  $\mathfrak{o}(N)$  possède

$$N^2 - \left[ N + \frac{N(N-1)}{2} \right] = \frac{N(N-1)}{2} \text{ générateurs.}$$

L'algèbre  $\mathfrak{o}(N, \mathbb{R})$  est la seule forme réelle compacte de la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{o}(N, \mathbb{C})$ , qui est constituée des matrices complexes  $N \times N$  antisymétriques. Dans la classification de Cartan,  $\mathfrak{o}(2N+1, \mathbb{C})$  est notée  $B_N$  et  $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$  est notée  $D_N$ .

### *Remarques :*

- ◇  $O(N)$  n'est pas connexe (à cause des symétries miroirs, discrètes).
- ◇  $SO(N)$  est connexe
- ◇  $SO(N)$  n'est pas simplement connexe pour  $N \geq 3$

### **Groupes symplectiques :**

Soient  $\eta, \xi \in \mathbb{R}^{2N}$ . Par définition,  $S_p(2N)$  est le groupe des matrices qui préserve le produit scalaire antisymétrique  $\eta^a E_{ab} \xi^b$  avec

$$E_{ab} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline - & - \\ \hline -\mathbf{1} & 0 \end{array} \right) \tag{C.32}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \nearrow \\ \text{blocs } N \times N \end{array} \tag{C.33}$$

L'algèbre de Lie correspondante possède  $N(2N+1)$  générateurs. Elle est non compacte. La  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie est notée  $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ , ou encore  $C_N$  dans la classification de Cartan.

Un exemple de structure symplectique est fourni par le crochets de Poisson.

**Groupes exceptionnels :**  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$

Ces groupes sont en particulier utilisés dans certains modèles d'unification des interactions fondamentales, par exemple en théorie des cordes.

Bien entendu, nous n'avons pas épuisé, comme le lecteur attentif l'aura compris, toute les  $\mathbb{R}$ -algèbres de Lie simples dans ce qui vient d'être présenté. En effet, à chaque  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie simple que nous venons de décrire correspondent plusieurs formes réelles. On trouvera le détail de cette classification dans

## C.3. Représentation des algèbres et groupes de Lie

### C.3.1. Concepts de base

**Définition C.42 :** *Représentation d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$*

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On dit que  $D$  est une représentation linéaire de  $\mathfrak{g}$  dans l'espace vectoriel  $V$  si

$$\begin{aligned} [D(A), D(B)] &= D([A, B]) \\ D(\alpha A + \beta B) &= \alpha D(A) + \beta D(B). \end{aligned} \tag{C.34}$$

**Théorème C.43 :**

Une représentation  $D_G$  d'un groupe  $G$  induit par différentiation une représentation  $D_{\mathfrak{g}}$  de son algèbre de Lie.

*Preuve :*

Il suffit de définir  $D_{\mathfrak{g}}(T_a)$  par  $D_G(1 + tT_a + o(t)) = 1 + tD_{\mathfrak{g}}(T_a) + o(t)$ , ce qui est équivalent à poser que

$$D_{\mathfrak{g}}(T_a) = \left. \frac{d}{dt} D_G(e^{tT_a}) \right|_{t=0}.$$

Pour montrer que l'on a ainsi construit une représentation de  $\mathfrak{g}$ , considérons la courbe

$$C(t) = A(\sqrt{t})B(\sqrt{t})A(\sqrt{t})^{-1}B(\sqrt{t})^{-1} = 1 + t[T_a, T_b] + o(t),$$

où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont des courbes analytiques de  $G$  de vecteurs tangents respectifs  $T_a$  et  $T_b$ . On a donc  $D_G(C(t)) = D_G(1 + t[T_a, T_b] + o(t))$ , soit encore

$$D_{\mathfrak{g}}([T_a, T_b]) = \left. \frac{d}{dt} D_G(C(t)) \right|_{t=0}.$$

Or par morphisme de  $D_G$ ,

$$D_G(C(t)) = D_G(A(\sqrt{t})) D_G(B(\sqrt{t})) D_G^{-1}(A(\sqrt{t})) D_G^{-1}(B(\sqrt{t}))$$

qui s'écrit encore, après développement en série,

$$D_G(C(t)) = 1 + t [D_{\mathfrak{g}}(T_a), D_{\mathfrak{g}}(T_b)] + o(t),$$

d'où

$$\left. \frac{d}{dt} D_G(C(t)) \right|_{t=0} = [D_{\mathfrak{g}}(T_a), D_{\mathfrak{g}}(T_b)],$$

ce qui prouve que  $D_{\mathfrak{g}}([T_a, T_b]) = [D_{\mathfrak{g}}(T_a), D_{\mathfrak{g}}(T_b)]$ .

*Remarque :*

On notera le fait très important suivant, qui justifie la définition (C.34) d'une représentation d'une algèbre de Lie : les relations de commutation  $[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c$  des générateurs de l'algèbre de Lie sont préservées au niveau de sa représentation, et donc les constantes de structure sont préservées :

$$\boxed{[D(T_a), D(T_b)] = if_{ab}^c D(T_c)}. \quad (\text{C.35})$$

## C.3.2. Exemples importants de représentations

### Représentation fondamentale

Pour un groupe de matrices sous-groupe de  $GL(N, \mathbb{R})$  (ou de  $GL(N, \mathbb{C})$ ), elle est définie par  $D(A) = A$ . L'espace vectoriel de la représentation est donc  $\mathbb{R}^N$  (ou  $\mathbb{C}^N$ ), et sa dimension est  $N$ , qu'il ne faut pas confondre avec la dimension du groupe. Cette relation définit aussi bien la représentation fondamentale du groupe que de son algèbre.

### Représentation adjointe

◇ Sur le groupe :

Sur le groupe  $G$ , l'application  $g \mapsto ad g$  définie par  $ad g(h) = g h g^{-1}$  est une représentation de  $G$  sur lui-même.

## C. Groupes et algèbres de Lie

*Preuve :*

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in G, \forall h \in G, ad(g_1 g_2)(h) &= (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1} \\ &= ad_{g_1}(ad_2(h)) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'on a bien construit un morphisme.

◇ Sur l'algèbre :

A cette représentation sur le groupe correspond la représentation  $X \rightarrow adX$  définie par  $adX(Y) = [X, Y]$ .

*Preuve :*

Il suffit de différentier  $\exp(tX)Y \exp(-tX)$  en  $t = 0$  pour en déduire l'expression de la représentation adjointe sur l'algèbre de Lie. Le théorème précédent assure que l'on a bien une représentation. Il est cependant instructif de le vérifier directement de deux façons différentes :

– de manière intrinsèque, nous avons montré (voir eq. (C.16)) que  $[ad X, ad Y] = ad [X, Y]$ .

– matriciellement, en définissant les constantes de structure par

$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$  dans la base  $X_a$  on peut construire cette représentation par  $[D(X_i)]^k_j = C_{ij}^k$ , soit  $\sum_k [D(X_i)]^k_j X_k = [X_i, X_j]$  qui se visualise sous la forme

$$\left( \begin{array}{c} j \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \right)_{n \times n} = D(X_i)$$

↙  
 $\sum_k [D(X_i)]^k_j X_k = \text{image du vecteur } X_j$

Sous cette forme, il suffit donc de vérifier que  $[D(X_i), D(X_j)]^\alpha_\beta = D([X_i, X_j])^\alpha_\beta$ .

*Preuve :*

$$D([X_i, X_j])^\alpha_\beta = [D(C_{ij}^k X_k)]^\alpha_\beta = C_{ij}^k [D(X_k)]^\alpha_\beta.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } D(X_i)^\alpha_\gamma D(X_j)^\gamma_\beta - D(X_j)^\alpha_\gamma D(X_i)^\gamma_\beta &= C_{i\gamma}^\alpha C_{j\beta}^\gamma - C_{j\gamma}^\alpha C_{i\beta}^\gamma \\ &= -C_{\gamma i}^\alpha C_{j\beta}^\gamma - C_{\gamma j}^\alpha C_{\beta i}^\gamma \\ &= C_{ij}^\gamma C_{\gamma\beta}^\alpha = C_{ij}^\gamma [D(X_\gamma)]^\alpha_\beta \end{aligned}$$



ce qui prouve le résultat.

Avec les notations des physiciens, correspondant à  $[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c$ ,  $D(T_a)^b_c = if_{ac}^b$  ou encore  $\text{ad } T_a(T_b) = [T_a, T_b]$ .

*Remarque :*

◇ Pour une algèbre de Lie semi-simple compacte, on a montré, voir Th. C.40, que l'on peut écrire simplement  $D(T_a)_{bc} = -if_{abc}$  que l'on note aussi  $(T_a^A)_{bc} = -if_{abc}$  (avec  $A$  comme « adjoint »), la position des indices n'ayant alors pas de signification particulière. C'est par exemple le cas de l'algèbre de Lie de  $SU(N)$ .

◇ *La dimension de la représentation adjointe est égale à la dimension du groupe.*

En revanche les générateurs  $X_a$  peuvent être dans une représentation complètement arbitraire. La seule chose qui compte finalement est que leur nombre soit la dimension du groupe (qu'il ne faut surtout pas confondre avec la dimension  $d$  de la représentation des générateurs  $X_a$  (i.e. les  $X_a$  sont des matrices  $d \times d$ )). On obtient ainsi différentes formes isomorphes de la représentation adjointe.

**Exemple :  $SU(2)$**

Le cas bien connu du groupe  $SU(2)$ , permet d'illustrer les deux représentations précédentes.

◇ Représentation fondamentale : matrices  $\frac{\vec{\sigma}}{2}$  (3 matrices  $2 \times 2$ )

◇ Représentation adjointe : c'est la représentation vectorielle que l'on peut aussi fabriquer à partir des rotations infinitésimales  $(J_k)_{ij} = -i\varepsilon_{kij} = -i\varepsilon_{ijk}$  (3 matrices  $3 \times 3$ ).

En tant que matrice,  $T_a^A$  agit comme une matrice  $n \times n$  ( $n =$  dimension du groupe). En revanche si l'on décide de décrire  $T_a^A$  comme un opérateur construit à partir d'une représentation donnée (en général la représentation fondamentale) de dimension  $d$ , alors

$$T_a^A(T_b) = [T_a, T_b] \quad T_a : \text{pour } a \text{ fixé, c'est une matrice } d \times d$$

↙  $n$  indices possibles

## C. Groupes et algèbres de Lie

Notations usuelles dans la littérature :  $\text{ad} \Leftrightarrow T^A \Leftrightarrow T$  pour l'adjointe  
 $T^f \Leftrightarrow t$  pour la fondamentale.

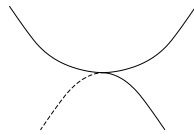
Il est assez usuel d'utiliser les indices  $i, j, k$  pour les coefficients des générateurs de la (des) représentation(s) fondamentale(s), et  $a, b, c$  pour les coefficients des générateurs de la représentation adjointe.

Dans les théories de Yang-Mills, les champs de jauge apparaissent naturellement comme se transformant sous le groupe de jauge suivant la représentation adjointe du groupe.

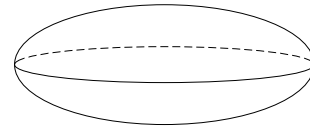
### C.3.3. Quelques éléments concernant les représentations du groupe de Lorentz

#### Représentations de dimension finie

Considérons les deux groupes  $O(3, 1)$  et  $O(4)$ . La topologie de ces deux variétés diffère notablement, la première étant non-compacte alors que la seconde est compacte, comme illustré dans la fig. C.1.



La variété de  $O(3, 1)$  à 4 dimensions



La variété de  $O(4)$  à 4 dimensions

FIGURE C.1. – Visualisation symbolique des variétés correspondant aux groupes  $O(3, 1)$  et  $O(4)$ . A gauche, hyperboloïde (correspondant à  $O(3, 1)$ ). À droite, ellipsoïde (correspondant à  $O(4)$ ).

Le chapitre 1 est consacré à l'étude détaillée du *groupe de Lorentz*. En particulier, nous construisons son algèbre de Lie. Elle est constituée de 6 générateurs :

- ◇  $J_1, J_2, J_3$       générateurs des rotations
- ◇  $K_1, K_2, K_3$     générateurs des boosts

qui satisfont les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i \varepsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] &= -i \varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i \varepsilon_{ijk} K_k. \end{aligned}$$

Cette  $\mathbb{R}$ -algèbre  $\mathfrak{so}(3, 1; \mathbb{R})$  est non compacte. Ceci est directement relié au fait que le groupe de Lorentz est non compact : les rapidités  $\phi$  qui codent les boosts  $e^{i\phi\vec{n}\cdot\vec{K}}$  suivant l'axe  $\vec{n}$  varient sur tout  $\mathbb{R}$ , qui n'est pas compact, contrairement aux rotations pour lesquelles l'angle de rotation peut être ramené à varier sur un domaine compact de  $\mathbb{R}$ .

On pose

$$\begin{cases} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{J} + i\vec{K}) \\ \vec{N} &= \frac{1}{2} (\vec{J} - i\vec{K}) . \end{cases}$$

Avec  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  on construit une nouvelle algèbre de Lie sur  $\mathbb{R}$ . C'est la *forme réelle compacte* de la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(4)$ , dont  $\mathfrak{so}(3, 1; \mathbb{R})$  est une autre forme réelle.

L'algèbre de Lie ainsi obtenue satisfait les relations de commutation suivantes :

$$\begin{cases} [M_i, M_j] &= i \varepsilon_{ijk} M_k \\ [N_i, N_j] &= i \varepsilon_{ijk} N_k \\ [M_i, N_j] &= 0 . \end{cases}$$



L'algèbre de Lie obtenue est donc tout simplement celle de  $SU(2) \times SU(2)$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . On notera que la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2)$  du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  peut être vue comme une  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie de dimension 6, qui est précisément  $\mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ .

Cette dernière  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  de dimension 6 est la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie du groupe non-compact  $SO(3, 1)$ .

Le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  est le groupe de recouvrement de  $SO(3, 1)$  et de  $SO(4)$ , de la même façon que  $SU(2)$  est le groupe de recouvrement de  $SO(3)$ .

La construction des représentations correspondantes est alors standard : elle repose sur le fait que les représentations irréductibles de  $\mathfrak{su}(2)$  sont constituées des matrices  $n \times n$  avec  $n = 2j + 1$  où  $j$  est un entier naturel.

**Résumé :**

groupe $SO(3, 1)$ $\rightarrow \mathbb{R}$ -algèbre $\mathfrak{so}(3, 1)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>◇ non compact</li> <li>◇ <math>SO(3, 1)</math> est doublement connexe</li> <li>◇ possède des représentations projectives</li> </ul>	complexification 
		$\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$  complexification
groupe $SO(4)$ $\rightarrow \mathbb{R}$ -algèbre $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>◇ compact mais <math>SO(4)</math> est doublement connexe</li> <li>◇ <math>SL(2, \mathbb{C})</math> est simplement connexe</li> <li>◇ <math>SL(2, \mathbb{C})</math> ne possède que des vraies représentations, construites à partir de celles de <math>\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)</math></li> </ul>	

Formellement, le point clef qui assure l'absence de représentation projectives dans les groupes  $SU(2)$  et  $SL(2, \mathbb{C})$  est le fait que ces groupes sont semi-simples, et simplement connexes, *i.e.* que leur groupe d'homotopie est trivial. Ceci signifie que tout chemin sur le groupe est réductible à un chemin, ce qui n'est pas le cas de  $SO(3)$ , de  $SO(3, 1)$  ou de  $SO(4)$  par exemple. Ceci justifie le passage de  $SO(3)$  à  $SU(2)$  ou de  $SO(3, 1)$  à  $SL(2, \mathbb{C})$  puisque ces groupes n'ont que des vraies représentations, ce qui est beaucoup plus simple à manipuler mathématiquement, au prix de l'introduction des spins demi-entiers qui caractérisent ces représentations.

D'autre part, le passage à des groupes compacts (« trick unitaire » inventé par Hermann Weyl) facilite grandement l'étude des représentations : on peut ainsi se ramener à l'étude des représentations unitaires comme on l'a vu dans l'étude des représentation des groupes compacts. Or toute représentation unitaire de dimension finie d'un groupe matriciel est réductible, ce qui nous ramène à l'étude des représentations irréductibles.

Nous espérons avoir convaincu le lecteur sur cet exemple que l'introduction de notions aussi complexes (dans tous les sens du terme) est pertinente physiquement !

### Représentations de dimensions infinies

L'étude générale des représentations de dimension infinie de  $L_+^\uparrow$  est un sujet très vaste.

Nous allons ici nous contenter de discuter un ensemble de représentations unitaires de dimensions infinies, qui s'obtiennent en faisant agir un groupe de Lie  $G$  sur des espaces de fonctions de carré sommable :

$\forall g \in G$ , on associe la transformation  $T_g$  agissant sur les fonctions

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{C.36}$$

par

$$f(x) \xrightarrow{T_g} (T_g f)(x) = f(g^{-1}x) . \tag{C.37}$$

On vérifiera facilement que  $T$  est une représentation de  $G$ . Ceci d'applique tout particulièrement à  $G = SO(3)$  et  $G = L_+^\uparrow$ .

Cette représentation est unitaire comme il est facile de le voir par changement de variable d'intégration.



# D. Symboles et tenseurs de Levi-Civita

## D.1. Symbole de Levi-Civita dans l'espace euclidien

### D.1.1. 2d

A deux dimensions, on définit

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= +1 & \text{si } (i, j) &= (1, 2) \\ &= -1 & \text{si } (i, j) &= (2, 1) \\ &= 0 & \text{si } i &= j.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Il est facile de voir que

$$\boxed{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}.}$$
\tag{D.2}

Après une contraction sur une paire d'indices, on obtient

$$\boxed{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{in} = \delta_{jn},}$$
\tag{D.3}

puisque

$$\delta_{ii} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{ji} = 2\delta_{jn} - \delta_{jn} = \delta_{jn}.\tag{D.4}$$

Partant de l'Eq. (D.3), une contraction supplémentaire conduit finalement à

$$\boxed{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = 2.}$$
\tag{D.5}

### D.1.2. 3d

A trois dimensions, on définit

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} &= +1 & \text{si } (i, j, k) &= \text{permutation paire de } (1, 2, 3) \\ &= -1 & \text{si } (i, j, k) &= \text{permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ &= 0 & \text{sinon.}\end{aligned}\tag{D.6}$$

## D. Symboles et tenseurs de Levi-Civita

On peut facilement montrer que

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}}. \quad (\text{D.7})$$

En effet, il y a 6 termes, ce qui se déduit du fait qu'à 3d,  $i$ ,  $j$  et  $k$ , ainsi que  $\ell$ ,  $m$  et  $n$  peuvent prendre 3 différentes valeurs 1, 2, 3 : ainsi  $i$  doit être égal à  $\ell$ ,  $m$  ou  $n$ , ce qui force  $j$  à être égal à l'un des deux indices restants  $\ell$ ,  $m$  ou  $n$ , de sorte que  $k$  est le dernier, i.e.  $3 \times 2 \times 1 = 6$  choix. Le premier choix  $i = \ell$ ,  $j = m$ ,  $k = n$ , i.e.  $\delta_{i\ell}\delta_{jm}\delta_{kn}$ , donne, sans somme sur les indices,  $\varepsilon_{ijk}^2 = +1$ , alors que les 5 autres termes s'obtiennent simplement par permutation des indices, en prenant en compte le signe provenant du produit des deux  $\varepsilon$ .

Une seule contraction conduit à

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}}. \quad (\text{D.8})$$

Une contraction supplémentaire mène à

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}}, \quad (\text{D.9})$$

puisque

$$\delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}. \quad (\text{D.10})$$

Finalement, une dernière contraction donne

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3! = 6}. \quad (\text{D.11})$$

### D.1.3. Cas général

En dimension  $n$ , on note

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} &= +1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) &= \text{permutation paire de } (1, 2, \dots, n) \\ &= -1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) &= \text{permutation impaire de } (1, 2, \dots, n) \\ &= 0 & \text{sinon.} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Considérons une matrice  $n \times n$   $A$ , dont les éléments de matrices sont notés  $a_{ij}$ . Son déterminant est donné par

$$\boxed{\det A = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n}} \quad (\text{D.13})$$



et

$$\boxed{a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = (\det A) \varepsilon_{j_1 \dots j_n},} \quad (\text{D.14})$$

qui peut être compris comme la façon dont le symbole de Levi-Civita se transforme sous une transformation linéaire arbitraire.

#### D.1.4. Transformation sous $O(n)$ et $SO(n)$

Nous rappelons que les transformations orthogonales, éléments du groupe  $O(n)$ ,

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{D.15})$$

$$x \mapsto O x \text{ with } x^i = O^i_j x^j \quad (\text{D.16})$$

sont caractérisées par la contrainte

$$O O^t = O^t O = \mathbb{1}. \quad (\text{D.17})$$

En prenant le déterminant des deux membres, il est facile de voir que  $\det O = \pm 1$ . Le cas  $\det O = 1$  définit le sous-groupe  $SO(n)$ , appelé groupe spécial orthogonal, par extension du groupe des rotations en dimensions  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

En insérant ceci dans la transformation générale (D.14) du symbole de Levi-Civita, nous voyons que<sup>1</sup>

$$\boxed{O_{i_1 j_1} \cdots O_{i_n j_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = (\det O) \varepsilon_{j_1 \dots j_n}, \text{ avec } \det O = \pm 1.} \quad (\text{D.18})$$

Le symbole de Levi-Civita est donc un *pseudo-tenseur*, puisqu'il prolonge naturellement ce qui se produit en 3d :

- ◇ sous une rotation, i.e. une transformation spéciale orthogonale, de déterminant  $+1$ , le symbole de Levi-Civita est inchangé.
- ◇ sous une transformation orthogonale de déterminant  $-1$ , par exemple une réflexion dans un nombre impair de dimensions (comme l'espace 3d familier de la géométrie euclidienne), appelée parité  $P$ , il devrait acquérir un signe moins s'il s'agissait d'un tenseur, réalisé par exemple comme le produit direct des composantes d'un vecteur  $V^i$ , as  $V^{i_1} V^{i_2} \cdots V^{i_n}$ . Dans le cas présent, il reste invariant, d'où le nom de pseudo-tenseur.

---

1. Nous travaillons ici dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , avec une métrique triviale donnée par la matrice d'identité, donc la position haute ou basse des indices est arbitraire.

## D.2. Tenseur de Levi-Civita dans l'espace de Minkowski 4d

Considérons à présent l'espace de Minkowski, avec la métrique usuelle  $g_{\mu\nu}$ . Le tenseur Levi-Civita à 4 composantes contravariantes est défini par

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} &= +1 \quad \text{if } (\mu, \nu, \rho, \sigma) = \text{even permutation of } (0, 1, 2, 3) \\ &= -1 \quad \text{if } (\mu\nu\rho\sigma) = \text{odd permutation of } (0, 1, 2, 3) \\ &= 0 \quad \text{otherwise.}\end{aligned}\tag{D.19}$$

En utilisant comme d'habitude le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et son inverse, on peut monter ou descendre n'importe quel indice.

Comme  $\det g = -1$ , on a

$$\boxed{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} .}\tag{D.20}$$

Il faut faire attention au fait que la normalisation de  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est conventionnelle. Dans certains manuels/articles, il est défini avec un signe opposé. Nous utilisons ici la convention de Jackson, Itzykson-Zuber et Peskin-Schroeder.

### D.2.1. Identités de contraction

Les identités de contraction successives suivantes sont satisfaites.

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= -\det g^{\alpha\alpha'} & \alpha &= \mu, \nu, \rho, \sigma & \text{row} \\ & & \alpha' &= \mu', \nu', \rho', \sigma' & \text{column}\end{aligned}}\tag{D.21}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu}{}^{\nu'\rho'\sigma'} &= -\det g^{\alpha\alpha'} & \alpha &= \nu, \rho, \sigma & \text{row} \\ & & \alpha' &= \nu', \rho', \sigma' & \text{column}\end{aligned}}\tag{D.22}$$

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho'\sigma'} = -2 \left( g^{\rho\rho'} g^{\sigma\sigma'} - g^{\rho\sigma'} g^{\rho'\sigma} \right) .}\tag{D.23}$$

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma'} = -6g^{\sigma\sigma'} .}\tag{D.24}$$

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4! = -24 .}\tag{D.25}$$

### D.2.2. Relation avec le symbole de Levi-Civita

$$\boxed{\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{0ijk}.} \quad (\text{D.26})$$

### D.2.3. Comportement sous les transformations de Lorentz

Sous les transformations de Lorentz, le tenseur de Levi-Civita se transforme de la façon suivante

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mapsto \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\rho_{\rho'} \Lambda^\sigma_{\sigma'} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \det \Lambda \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{D.27})$$

Donc :

- ◇ sous les transformations propres ( $\mathcal{L}_+$  :  $\det \Lambda = +1$ ),  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est invariant. Cela inclut les boosts et les rotations.
- ◇ sous des transformations impropres ( $\mathcal{L}_-$  :  $\det \Lambda = -1$ ),  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est renversé. Ceci inclut  $T$  et  $P$  séparément.

En conclusion,

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{ est un pseudo-tenseur sous les transformations de Lorentz.}} \quad (\text{D.28})$$



# E. Analyse dimensionnelle en physique des hautes énergies

## E.1. Système d'unités naturelles en physique des hautes énergies

En physique des hautes énergies, il est habituel de choisir un système d'unités dans lequel

$$c = 1, \quad (\text{E.1})$$

$$\hbar = 1. \quad (\text{E.2})$$

Comme  $[c] = L/T$ , prendre  $c = 1$  signifie que  $[L] = [T]$ .

Par ailleurs, nous savons que  $[\hbar] = ML^2T^{-1}$  (par exemple en partant de  $E = h\nu$ ). Dans un système d'unités dans lequel  $c = 1$ , nous avons donc  $[\hbar] = ML$  et le fait de choisir  $\hbar = 1$  conduit à  $M = L^{-1}$ . Finalement, comme  $[P] = M[c] = M$ , nous déduisons les règles suivantes pour l'analyse dimensionnelle :

$$\boxed{[P] = [E] = M = \frac{1}{L} = \frac{1}{T}.} \quad (\text{E.3})$$

Comme

$$\begin{aligned} \hbar \times c &= 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \times 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} = 3.161 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \\ &= 1.973 \times 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

ceci signifie qu'en unités naturelles,

$$\boxed{1 \text{ fm} \sim 1/(200 \text{ MeV}).} \quad (\text{E.4})$$

De même,  $c = 1$  implique que

$$\boxed{1 \text{ fm} \sim 3.3 \times 10^{-24} \text{ s},} \quad (\text{E.5})$$

et de  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  on tire

$$1 \text{ GeV} \sim 1.6 \times 10^{-10} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-10} (3 \times 10^8)^{-2}$$

i.e.

$$\boxed{1 \text{ GeV} \sim 1.8 \times 10^{-27} \text{ s}.} \quad (\text{E.6})$$

## E.2. Analyse dimensionnelle en théorie des champs

Voyons comment cela s'applique à la théorie des champs. Puisque l'action a la dimension de  $\hbar$ , cela signifie qu'elle est sans dimension en unités naturelles. Maintenant, partant du fait que  $S = \int d^4x \mathcal{L}$ , ceci signifie que

$$[\mathcal{L}] = M^4. \quad (\text{E.7})$$

La structure du terme cinétique, imposée par le fait qu'il doit être quadratique en  $\partial_\mu \phi$  (présence d'une dérivée temporelle et covariance de Lorentz, avec donc, pour un champ sans masse,

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \quad (\text{E.8})$$

qui conduit donc à

$$\boxed{[\phi] = M.} \quad (\text{E.9})$$

De façon similaire, partant du Lagrangien

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (\text{E.10})$$

nous déduisons que le champ du photon a pour dimension

$$\boxed{[A^\mu] = M.} \quad (\text{E.11})$$