M1 de Physique et Magistère de Physique Fondamentale 2022-2023

Electrodynamique Classique et Quantique

Examen

13 janvier 2023

Documents autorisés

Notes:

- Le sujet est **délibérément long**. Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note.

- Certaines questions peuvent être longues, ou délicates (signalées alors par une *), le barème en tiendra compte et récompensera en proportion le soin apporté aux réponses.

- On pourra utiliser un système d'unités dans lequel $c = 1$ et $\hbar = 1$.

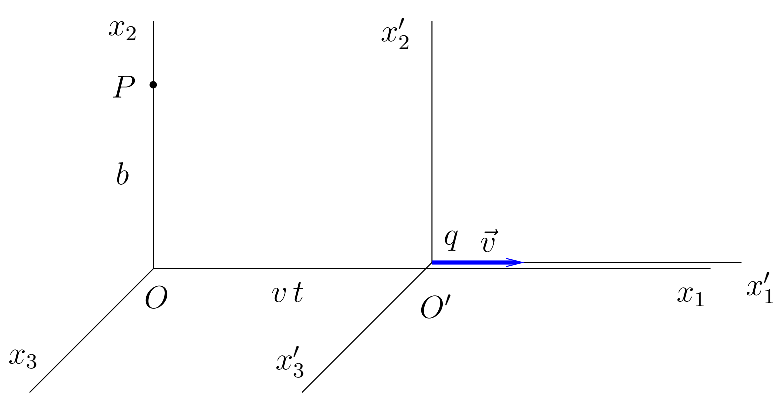
- Les coordonnées pourront être librement notées (x, y, z) ou (x^1, x^2, x^3).

- On veillera aux notations utilisées, qui diffèrent partiellement d'une partie à l'autre.

- Tout dessin est très bienvenu!

1 Champ d'une charge en mouvement rectiligne uniforme

On considère une charge q en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel K de l'observateur. On notera K' le référentiel au repos de cette charge, située à l'origine O' de celui-ci. On oriente les repères liés à K et K' de sorte que les axes x_i et x'_i sont colinéaires, avec x_1 et x'_1 pointant dans la direction du mouvement de la charge, et donc $\vec{v} = v\,\vec{u}_1$ ($v \geq 0$). On notera t et t' les temps respectivement dans les référentiels K et K'. On suppose qu'à $t = t' = 0$, les origines O et O' des deux repères coïncident. L'observateur se trouve à une distance b de O dans le référentiel K, orienté de sorte que $\overrightarrow{OP} = \vec{b} = b\,\vec{u}_2$.



1.1 Question préliminaire:

On considère deux référentiels inertiels K et K' de sorte que K' s'obtient à partir de K par un boost arbitraire de velocité $\vec{v} = \vec{\beta} = \beta\vec{n}$. On note $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ et $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$ les champs électromagnétiques respectivement dans ces deux référentiels. On rappelle les relations suivantes permettant d'exprimer $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$ à l'aide de $\{\vec{E}, \vec{B}\}$:

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{E} - (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{n}\right] + \gamma\,\vec{v}\wedge\vec{B}\,, &(1)\\
\vec{B}' &= (\vec{B}\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{n})\vec{n}\right] - \gamma\,\vec{v}\wedge\vec{E}\,. &(2)
\end{aligned}$$

Donner l'expression de $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ en fonction de $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$.

1.2 Champs

1. Montrer que dans K', les champs électromagnétiques au point P s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}
E'_1 &= -\frac{qvt'}{4\pi r'^3}\,, &(3)\\
E'_2 &= \frac{qb}{4\pi r'^3}\,, &(4)\\
E'_3 &= 0\,, &(5)\\
\vec{B} &= \vec{0}\,. &(6)
\end{aligned}$$

On donnera l'expression de r' en fonction de b et t'.

2. Montrer qu'en utilisant les coordonnées dans K ce champ s'écrit encore

$$\begin{aligned}
E'_1 &= -\frac{q}{4\pi}\frac{v\gamma t}{\left(b^2+v^2\gamma^2t^2\right)^{3/2}}, &(7)\\
E'_2 &= \frac{q}{4\pi}\frac{b}{\left(b^2+v^2\gamma^2t^2\right)^{3/2}}\,. &(8)
\end{aligned}$$

3. Montrer que

$$\begin{aligned}
E_1 &= E'_1 = -\frac{q}{4\pi}\frac{v\gamma t}{\left(b^2+v^2\gamma^2t^2\right)^{3/2}}, &(9)\\
E_2 &= \gamma E'_2 = \frac{q}{4\pi}\frac{\gamma b}{\left(b^2+v^2\gamma^2t^2\right)^{3/2}}\,, &(10)\\
B_3 &= \gamma\beta E'_2 = \beta E_2\,. &(11)
\end{aligned}$$

1.3 Limite non relativiste

4. On considère la limite $\gamma \to 1$.

i) Discuter et commenter l'expression du champ électrique $\vec{E}$ dans cette limite.

ii) Même questions pour le champ magnétique $\vec{B}$. On interprétera le résultat obtenu du point de vue de la loi de Biot et Savart.

1.4 Etude des effets relativistes

Structure temporelle du champ

5. Allure de la variation temporelle du champ transverse à la direction du mouvement de la particule E_2.

i) Tracer le champ transverse E_2 en fonction de vt, pour $\gamma \sim 1$ et $\gamma \gg 1$.

ii) Préciser les extrema éventuels, et leur largeur temporelle.

iii) Discuter la modification de l'allure de E_2 lorsque l'on passe de $\beta \ll 1$ à $\beta \to 1$.

6. Allure de la variation temporelle du champ longitudinal E_1.

i) Etudier et tracer le champ longitudinal E_1 en fonction de vt, pour $\gamma \sim 1$ et $\gamma \gg 1$.

ii) Préciser les extrema éventuels.

iii) Discuter la modification de l'allure de E_1 lorsque l'on passe de $\beta \ll 1$ à $\beta \to 1$.

7. Comparer l'amplitude de ces deux champs dans la limite $\beta \to 1$

8. i) A $t = 0$, comparer le champ électrique transverse à la direction du mouvement de la particule E_2 à sa valeur non relativiste.

ii) Donner un ordre de grandeur de la durée de l'impulsion électromagnétique résultant du passage de la particule chargée.

iii) Discuter l'effet du champ longitudinal.

iv) Pour une résolution temporelle faible (devant une échelle que l'on précisera), montrer que le champ $\vec{E}$ se comporte comme celui d'une onde plane dont on précisera la structure (polarisation et direction de propagation).

9. On suppose que la charge mobile est une particule de charge $q = ze$ et qu'en P se trouve un électron atomique de charge $-e$.

i) Déduire de ce qui précède une évaluation de l'impulsion transférée Δp à l'électron lors du passage de la charge mobile. Vérifier que le résultat est indépendant de γ.

ii) Calculer cette impulsion transférée de manière exacte.

Dépendance spatiale des champs

On s'intéresse à présent à la structure spatiale des champs à l'instant t où se trouve la charge dans le référentiel de l'observateur.

10. Direction et sens du champ électrique

i) Justifier le fait que le champ $\vec{E}$ est dirigé et orienté (dans le cas où $q > 0$) suivant un vecteur unitaire $\vec{n}$ pointant de la position de la charge à l'instant t vers le point d'observation P.

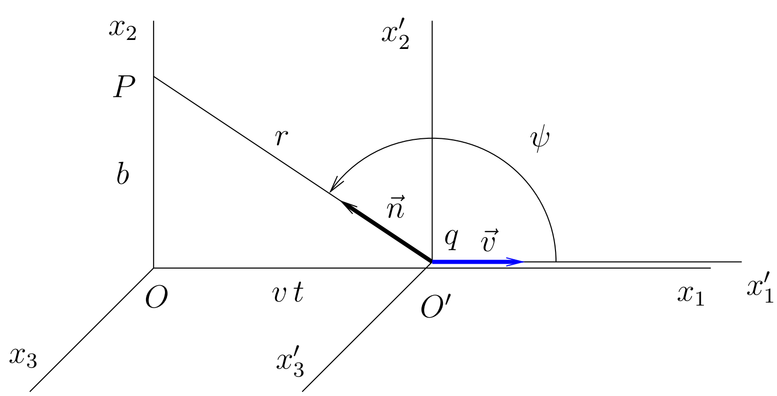
ii) Comparer au cas coulombien.

11. Dépendance angulaire du champ électrique

i) Montrer que

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3 \gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} \,, \tag{12}$$

où $\vec{r} = r\,\vec{n}$ et $\psi = (\vec{v}, \vec{n})$, r étant la distance radiale entre la charge à l'instant t et le point d'observation au même instant t, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



ii) Discuter la dépendance angulaire de ce champ, en particulier son caractère radial et son isotropie, suivant la valeur de γ.

iii) Comparer les valeurs de ce champ dans les directions longitudinales et transverses par rapport au champ coulombien.

iv) Dessiner l'allure des lignes de champ électrique (en utilisant des traits d'autant plus épais que l'amplitude du champ est plus grande), pour deux situations typiques où $\gamma \sim 1$ et $\gamma \gg 1$.

Relation entre les deux approches*

12. Discuter précisément le lien entre les deux descriptions temporelle et spatiale précédentes. On distinguera pour cela les différents régimes en $v|t|$ par rapport aux échelles caractéristiques.

On se limitera aux deux situations extrêmes suivantes:

i) Limite ultra-relativiste $\gamma \gg 1$.

ii) Limite non relativiste $\gamma \sim 1$.

2 Composante coulombienne du champ de Liénard-Wiechert d'une particule en mouvement quelconque

On considère une particule ponctuelle chargée, de charge q, en mouvement quelconque, dont la trajectoire est décrite par son quadrivecteur position $(\xi^0, \vec{\xi}(t))$.

On rappelle que le champ électrique de Liénard-Wiechert dû au mouvement de cette particule s'écrit

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{(1-\vec{\beta}\,'\cdot\vec{n}\,')^3}\left[\frac{\vec{n}\,'-\vec{\beta}\,'}{\gamma'^2 R'^2} + \frac{1}{R'}\vec{n}\,'\wedge\left((\vec{n}\,'-\vec{\beta}\,')\wedge\dot{\vec{\beta}}\,'\right)\right] \tag{13}$$

où la notation x' signifie que la quantité correspondante doit être évaluée à l'instant retardé t', solution de l'équation

$$t' - t + \frac{|\vec{r} - \xi(\vec{t'})|}{c} = 0\,.$$

Le vecteur $\vec{R}\,' = \overrightarrow{M'P}$ pointe de la position retardée M' où se trouve la charge vers le point d'observation P, et l'on note R' sa norme. Enfin $\vec{n}\,'$ est le vecteur unitaire $\vec{R}\,'/R'$.
Par ailleurs, le champ magnétique s'écrit

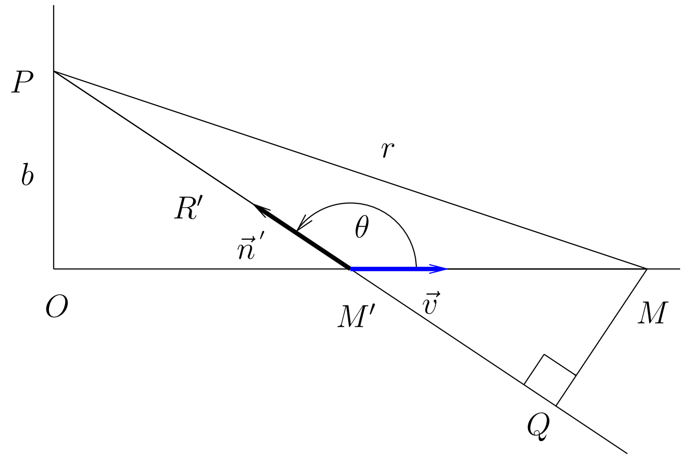
$$\vec{B} = \vec{n}\,'\wedge\vec{E}\,. \tag{14}$$

Le champ électrique (13) (de même que le champ magnétique (14)) est la somme de deux termes. Le premier terme entre les deux crochets dans (13), en $1/R'^2$, est le champ uniquement dû à la vitesse de la particule en mouvement, indépendamment de son accélération, tandis que le second terme, en $1/R'$, est dû à son accélération.

13. Rappeler pourquoi le premier terme ne donne pas lieu à un transfert d'énergie radiative à grande distance.

14. On souhaite démontrer par un argument géométrique que ce champ électrique dû à la vitesse est bien identique au champ coulombien examiné dans la partie 1.

On pourra s'aider de la figure ci-dessous.



On note M et M' la position de la charge respectivement à l'instant t et à l'instant retardé t'.

i) Justifier le fait que $M'M = \beta R'$.

ii) On introduit $\theta = (\vec{v}, \vec{n}\,')$. En introduisant l'intersection Q entre la droite (PM') et sa normale passant par M, et en exprimant judicieusement la distance PQ, démontrer le résultat.