M1 de Physique et Magistère de Physique Fondamentale 2022-2023

Electrodynamique Classique et Quantique

Examen

13 janvier 2023

Documents autorisés

Notes:

- Le sujet est **délibérément long**. Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note.

- Certaines questions peuvent être longues, ou délicates (signalées alors par une *), le barème en tiendra compte et récompensera en proportion le soin apporté aux réponses.

- On pourra utiliser un système d'unités dans lequel $c = 1$ et $\hbar = 1$.

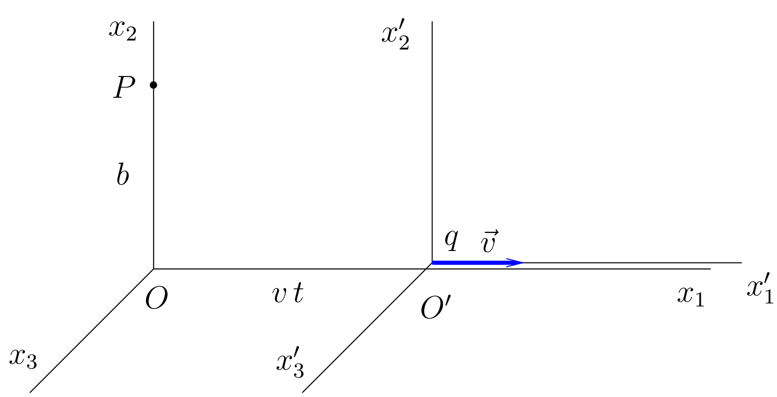
- Les coordonnées pourront être librement notées (x, y, z) ou (x^1, x^2, x^3).

- On veillera aux notations utilisées, qui diffèrent partiellement d'une partie à l'autre.

- Tout dessin est très bienvenu!

1 Champ d'une charge en mouvement rectiligne uniforme

On considère une charge q en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel K de l'observateur. On notera K' le référentiel au repos de cette charge, située à l'origine O' de celui-ci. On oriente les repères liés à K et K' de sorte que les axes x_i et x'_i sont colinéaires, avec x_1 et x'_1 pointant dans la direction du mouvement de la charge, et donc $\vec{v} = v\,\vec{u}_1$ $(v \geq 0)$. On notera t et t' les temps respectivement dans les référentiels K et K'. On suppose qu'à $t = t' = 0$, les origines O et O' des deux repères coïncident. L'observateur se trouve à une distance b de O dans le référentiel K, orienté de sorte que $\overrightarrow{OP} = \vec{b} = b\,\vec{u}_2$.



1.1 Question préliminaire:

On considère deux référentiels inertiels K et K' de sorte que K' s'obtient à partir de K par un boost arbitraire de velocité $\vec{v} = \vec{\beta} = \beta\vec{n}$. On note $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ et $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$ les champs électromagnétiques respectivement dans ces deux référentiels. On rappelle les relations suivantes permettant d'exprimer $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$ à l'aide de $\{\vec{E}, \vec{B}\}$:

$$\vec{E}' = (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{E} - (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{n}\right] + \gamma\,\vec{v}\wedge\vec{B}\,, \tag{1}$$

$$\vec{B}' = (\vec{B}\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{n})\vec{n}\right] - \gamma\,\vec{v}\wedge\vec{E}\,. \tag{2}$$

Donner l'expression de $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ en fonction de $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$.

Solution

Il suffit d'écrire la transformation inverse, ce qui revient à inverser le sens de $\vec{\beta}$, i.e. de $\vec{n}$ dans les relations (1) et (2). On a donc

$$\vec{E} = (\vec{E}'\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{E}' - (\vec{E}'\cdot\vec{n})\vec{n}\right] - \gamma\,\vec{v}\wedge\vec{B}'\,,$$

$$\vec{B} = (\vec{B}'\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{B}' - (\vec{B}'\cdot\vec{n})\vec{n}\right] + \gamma\,\vec{v}\wedge\vec{E}'\,.$$

1.2 Champs

1. Montrer que dans K', les champs électromagnétiques au point P s'écrivent sous la forme

$$E'_1 = -\frac{qvt'}{4\pi r'^3}\,, \tag{3}$$

$$E'_2 = \frac{qb}{4\pi r'^3}\,, \tag{4}$$

$$E'_3 = 0\,, \tag{5}$$

$$\vec{B} = \vec{0}\,. \tag{6}$$

On donnera l'expression de r' en fonction de b et t'.

Solution

Le résultat est simplement l'expression du champ Coulombien d'une charge statique: champ magnétique nul et champ électrique donné par

$$\vec{E}' = q\frac{\vec{b} - \vec{v}t'}{\|\vec{b} - \vec{v}t'\|^3} = q\frac{\vec{b} - \vec{v}t'}{r'^3}$$

avec $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$.

---

2. Montrer qu'en utilisant les coordonnées dans K ce champ s'écrit encore

$$E'_1 = -\frac{q}{4\pi}\frac{v\gamma t}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{3/2}}, \tag{7}$$

$$E'_2 = \frac{q}{4\pi}\frac{b}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{3/2}}. \tag{8}$$

Solution

Il suffit d'utiliser le fait que $t' = \gamma(t - v\,x_1) = \gamma t$ puisque $x_1 = 0$ pour l'observateur P.

---

3. Montrer que

$$E_1 = E'_1 = -\frac{q}{4\pi}\frac{v\gamma t}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{3/2}}, \tag{9}$$

$$E_2 = \gamma E'_2 = \frac{q}{4\pi}\frac{\gamma b}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{3/2}}, \tag{10}$$

$$B_3 = \gamma\beta E'_2 = \beta E_2 . \tag{11}$$

Solution

La relation donnant $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ en fonction de $\{\vec{E}', \vec{B}'\}$ s'écrit ici

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= E'_1\vec{u}_1 + \gamma\, E'_2\vec{u}_2 \\
\vec{B} &= \gamma\vec{\beta} \wedge \vec{E}' = \gamma v\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 E'_2 = \gamma v E'_2\vec{u}_3
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
E_1 &= E'_1 \\
E_2 &= \gamma E'_2 \\
B_3 &= \gamma v E'_2 = \beta E_2 .
\end{aligned}$$

1.3 Limite non relativiste

4. On considère la limite $\gamma \to 1$.

i) Discuter et commenter l'expression du champ électrique $\vec{E}$ dans cette limite.

Solution

On a, en confondant $\vec{r} = \vec{b} - \vec{v}t$ et $\vec{r}'$ dans la limite non relativiste,

$$\begin{aligned} E_1 &\sim \frac{q}{4\pi}\frac{-vt}{r^3} \\ E_2 &\sim \frac{q}{4\pi}\frac{b}{r^3} \end{aligned}$$

soit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

en accord avec l'expression du champ Coulombien en l'absence d'effet relativiste.

---

ii) Même questions pour le champ magnétique $\vec{B}$. On interprétera le résultat obtenu du point de vue de la loi de Biot et Savart.

Solution

Dans cette limite, on a

$$\vec{B} \sim \frac{qvb}{4\pi r^3}\vec{u}_3\,.$$

La loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(\vec{x}) = \int d^3y\,\frac{\vec{j}(\vec{y}) \wedge (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}$$

conduit ici, puisque $\vec{j}(\vec{y}) = q\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{v}t)\vec{v}$, à

$$\vec{B}(\vec{b}) = \frac{q\vec{v} \wedge (\vec{b} - \vec{v}t)}{4\pi\|\vec{b} - \vec{v}t\|^3} = \frac{qvb}{4\pi r^3}\vec{u}_3\,,$$

en accord avec le résultat obtenu.

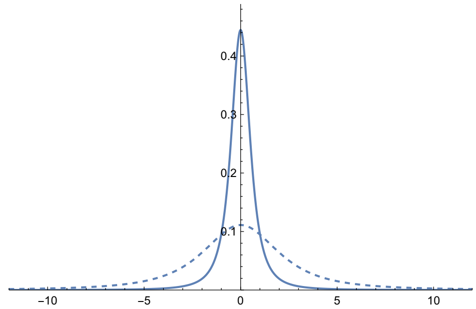
1.4 Etude des effets relativistes

Structure temporelle du champ

5. Allure de la variation temporelle du champ transverse à la direction du mouvement de la particule E_2.

i) Tracer le champ transverse E_2 en fonction de vt, pour $\gamma \sim 1$ et $\gamma \gg 1$.

Solution



Allure du champ E_2 en fonction de vt. En continu, cas $\gamma = 4$, en tireté cas $\gamma = 1$. On a arbitrairement posé $q = 4\pi$ pour fixer l'échelle verticale.

---

ii) Préciser les extrema éventuels, et leur largeur temporelle.

Solution

La composante E_2 est maximale en t=0. Elle vaut

$$E_{2\,max} = \frac{\gamma q}{4\pi b^2}\,.$$

Pour que le champ électromagnétique ait une amplitude appréciable par rapport à son maximum, il faut que

$$b^2 \gtrsim \gamma^2 v^2 t^2$$

soit

$$|t| \lesssim \frac{b}{\gamma v} = \Delta t\,.$$

---

iii) Discuter la modification de l'allure de E_2 lorsque l'on passe de $\beta \ll 1$ à $\beta \to 1$.

Solution

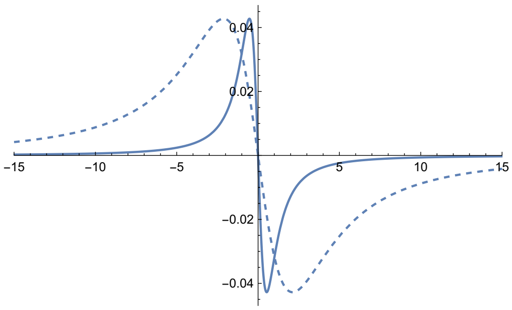
D'après la question précédente, le pic de E_2 est d'autant plus prononcé et étroit que γ est grand.

---

6. Allure de la variation temporelle du champ longitudinal E_1.

i) Etudier et tracer le champ longitudinal E_1 en fonction de vt, pour $\gamma \sim 1$ et $\gamma \gg 1$.

Solution



Allure du champ E_1 en fonction de vt. En continu, cas $\gamma = 4$, en tireté cas $\gamma = 1$. On a arbitrairement posé $q = 4\pi$ pour fixer l'échelle verticale.

Posons $x = vt$ et $y = \gamma vt = \gamma x$. Alors

$$E_1 = -\frac{q}{4\pi}\frac{y}{(b^2+y^2)^{3/2}}$$

et

$$\frac{d|E_1|}{|E_1|} = \frac{dy}{y} - 3\frac{ydy}{b^2+y^2}$$

s'annule pour $3y^2 = b^2 + y^2$ soit $y = \pm b/\sqrt{2}$, i.e. $vt = \pm b/(\sqrt{2}\gamma)$. En ces deux valeurs de y, qui correspondent à un maximum de $|E_1|$,

$$|E_1|_{max} = \frac{qb}{4\pi\sqrt{2}}\frac{1}{(b^2+b^2/2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi b^2}\frac{2}{\sqrt{27}}\,.$$

On notera que ces deux extrema ont une amplitude indépendante de γ.

---

ii) Préciser les extrema éventuels.

Solution

Voir la question précédente.

---

iii) Discuter la modification de l'allure de E_1 lorsque l'on passe de $\beta \ll 1$ à $\beta \to 1$.

Solution

Les pics de E_1 sont d'autant plus resserrés que β est proche de 1. Leur amplitude ne change pas, contrairement au maximum de E_2.

---

7. Comparer l'amplitude de ces deux champs dans la limite $\beta \to 1$

Solution

Le champ transverse a une valeur maximale typiquement γ fois plus grande que celle du champ longitudinal. Dans cette limite, il domine donc.

---

8. i) A $t = 0$, comparer le champ électrique transverse à la direction du mouvement de la particule E_2 à sa valeur non relativiste.

Solution

On a

$$E_2(t=0) = \frac{q}{4\pi}\frac{\gamma b}{(b^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi}\frac{\gamma}{b^2} = \gamma E_{2\, non\, relativiste}\,.$$

---

ii) Donner un ordre de grandeur de la durée de l'impulsion électromagnétique résultant du passage de la particule chargée.

Solution

C'est la largeur temporelle $\Delta t = \frac{b}{\gamma v}$ du pic de E_2 déterminée plus haut.

---

iii) Discuter l'effet du champ longitudinal.

Solution

Le champ longitudinal E_1 varie très rapidement d'une valeur positive (dans le cas où q est positif) à une valeur négative, et sa valeur moyenne est nulle. Cette variation s'effectue sur un temps de l'ordre de Δt. Sur des durées plus longues, l'effet de ce champ est donc nul.

---

iv) Pour une résolution temporelle faible (devant une échelle que l'on précisera), montrer que le champ $\vec{E}$ se comporte comme celui d'une onde plane dont on précisera la structure (polarisation et direction de propagation).

Solution

Sur des durées moyennées longues devant Δt, le champ perçu est identique à celui d'une onde plane polarisée transversalement et se propageant suivant u_1: la composante longitudinale a un effet négligeable, et la composante transverse est orthogonale au champ magnétique, tous deux d'amplitudes identiques et orthogonaux à $\vec{u}_1$.

---

9. On suppose que la charge mobile est une particule de charge $q = ze$ et qu'en P se trouve un électron atomique de charge $-e$.

i) Déduire de ce qui précède une évaluation de l'impulsion transférée Δp à l'électron lors du passage de la charge mobile. Vérifier que le résultat est indépendant de γ .

Solution

D'après ce qui précède, seul le champ transverse est à prendre en compte. On a

$$\Delta p \sim zeE_2 \Delta t \sim -ze^2 \frac{b}{\gamma v} \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma}{b^2} \sim -\frac{ze^2}{4\pi b v}\,.$$

qui ne dépend pas de γ.

---

ii) Calculer cette impulsion transférée de manière exacte.

Solution

On a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} zeE_2(t)\,dt &= -\frac{ze^2}{4\pi v b}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma v t/b}{[1+(\gamma v t/b)^2]^{3/2}} = -\frac{ze^2}{4\pi v b}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{ze^2}{4\pi v b}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{ze^2}{2\pi v b}\,.\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int^X \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} &= -\int^{1/X} \frac{dt}{t^2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{-3/2} = -\int^{1/X} \frac{tdt}{(1+t^2)^{3/2}} = \left(1+\frac{1}{X^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\,.\end{aligned}$$

Dépendance spatiale des champs

On s'intéresse à présent à la structure spatiale des champs à l'instant t où se trouve la charge dans le référentiel de l'observateur.

10. Direction et sens du champ électrique

i) Justifier le fait que le champ $\vec{E}$ est dirigé et orienté (dans le cas où $q > 0$) suivant un vecteur unitaire $\vec{n}$ pointant de la position de la charge à l'instant t vers le point d'observation P.

Solution

Ceci vient du fait que

$$E_1/E_2 = -\frac{vt}{b}$$

d'une part, et du fait que le signe de E_2 est le signe de q, d'après les résultats (9) et (10). On peut aussi simplement écrire

$$\vec{n} = \frac{-vt\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2}{\sqrt{b^2+v^2t^2}}$$

et constater directement que $\vec{E} = \text{signe}(q)\|\vec{E}\|\,\vec{n}$.

ii) Comparer au cas coulombien.

Solution

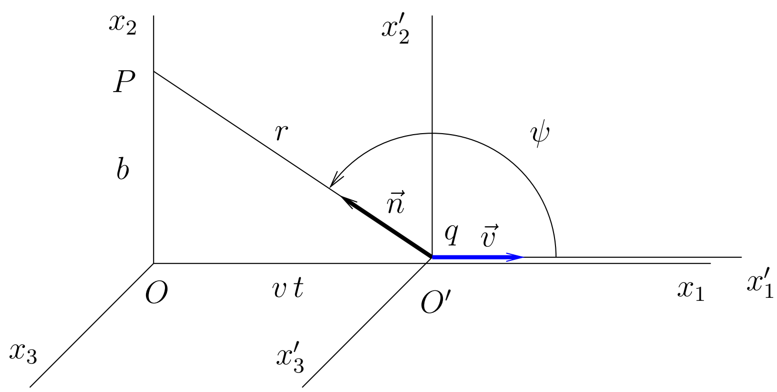
L'orientation du champ est la même que dans le cas coulombien d'après ce qui précède.

11. Dépendance angulaire du champ électrique

i) Montrer que

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3\gamma^2(1-\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}}\,, \tag{12}$$

où $\vec{r} = r\,\vec{n}$ et $\psi = (\vec{v}, \vec{n})$, r étant la distance radiale entre la charge à l'instant t et le point d'observation au même instant t, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Solution

D'après les résultats (9) et (10), on a

$$\vec{r} = -vt\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$$

et

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q\gamma\vec{r}}{4\pi\left(b^2+v^2\gamma^2t^2\right)^{3/2}} = \frac{q\gamma\vec{r}}{4\pi\gamma^3\left(\frac{b^2}{\gamma^2}+v^2t^2\right)^{3/2}} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\gamma^2\left(\frac{b^2}{\gamma^2}+v^2t^2\right)^{3/2}}\\ &= \frac{q\vec{r}}{4\pi\gamma^2(b^2+v^2t^2-\beta^2b^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{b^2}{\gamma^2} = b^2 + b^2\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} = b^2-\beta^2b^2\,,$$

et donc, puisque $\sin\psi = b/r$,

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\gamma^2r^3(1-\beta^2b^2/r^2)^{3/2}} = \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3\gamma^2(1-\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}}\,.$$

ii) Discuter la dépendance angulaire de ce champ, en particulier son caractère radial et son isotropie, suivant la valeur de γ.

Solution

Le champ est toujours radial, puisque nous avons vu plus haut qu'il est dirigé suivant $\vec{n}$. En revanche, il n'est pas isotrope. Il n'est isotrope que dans le cas statique $\beta = 0$. L'anisotropie augmente avec γ. L'amplitude $\|\vec{E}\|$ est maximale pour $1 - \beta^2 \sin^2\psi$ minimal, i.e. $\sin^2\psi = 1$, soit $\psi = \pm\pi/2$. Elle est minimale pour $\psi = 0$ et $\psi = \pi$.

---

iii) Comparer les valeurs de ce champ dans les directions longitudinales et transverses par rapport au champ coulombien.

Solution

Dans le cas coulombien isotrope,

$$\|\vec{E}\|_{\text{Coul.}} = \frac{q}{4\pi r^3}\,.$$

Perpendiculairement à la direction du mouvement, i.e. pour $\psi = \pm\pi/2$ on a

$$\|\vec{E}\|_{\perp} = \frac{q}{4\pi r^2}\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^3 = \frac{\gamma q}{4\pi r^2} = \gamma\|\vec{E}\|_{\text{Coul.}}\,,$$

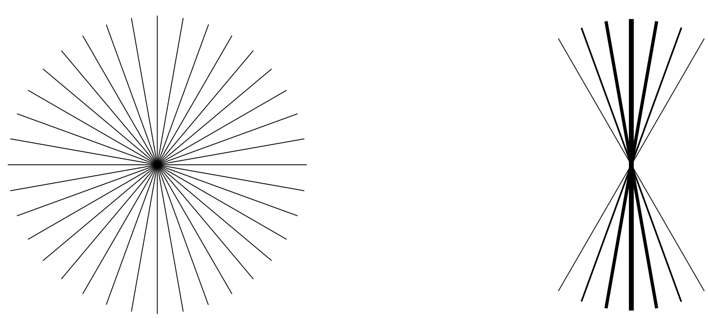
alors que dans la direction du mouvement, i.e. pour $\psi = 0$ ou π, on a

$$\|\vec{E}\|_{\parallel} = \frac{q}{4\pi r^3}\frac{1}{\gamma^2} = \frac{\|\vec{E}\|_{\text{Coul.}}}{\gamma^2}\,.$$

---

iv) Dessiner l'allure des lignes de champ électrique (en utilisant des traits d'autant plus épais que l'amplitude du champ est plus grande), pour deux situations typiques où $\gamma \sim 1$ et $\gamma \gg 1$.

Solution



Lignes de champ électrique: à gauche $\gamma = 1$, à droite $\gamma \gg 1$. Les lignes sont d'autant plus épaisses que l'intensité du champ est plus grande.

Relation entre les deux approches*

12. Discuter précisément le lien entre les deux descriptions temporelle et spatiale précédentes. On distinguera pour cela les différents régimes en $v|t|$ par rapport aux échelles caractéristiques.

On se limitera aux deux situations extrêmes suivantes:

i) Limite ultra-relativiste $\gamma \gg 1$.

Solution

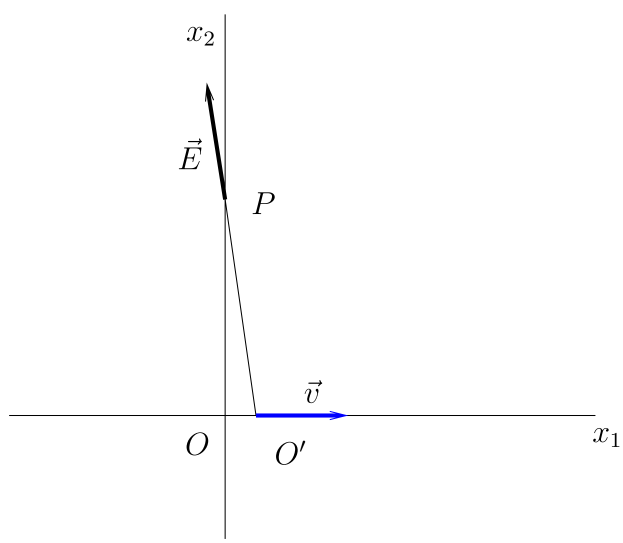
Dans ce cas, l'échelle pertinente est b/γ.

A) Si $v|t| \gg b/\gamma$: alors

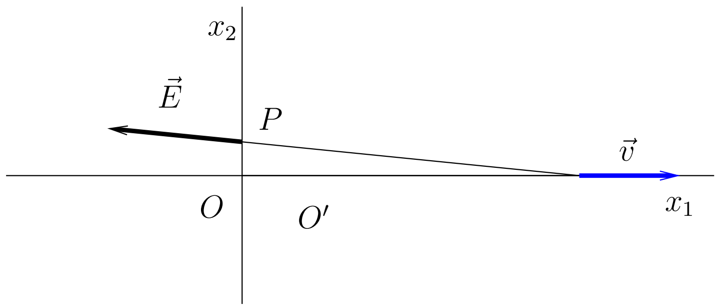
$$\begin{aligned} E_1 &\sim -\frac{q\gamma vt}{4\pi\gamma^3 v^3 t^3} \sim -\frac{q}{4\pi\gamma^2 v^2 t^2}\,, \\ E_2 &\sim \frac{q\gamma b}{4\pi\gamma^3 v^3 t^3} \sim \frac{q}{4\pi\gamma^2 v^2 t^2}\frac{b}{vt}\,. \end{aligned}$$

Comme $\gamma \gg 1$, on a $b/\gamma \ll b$ et l'on doit donc distinguer deux régimes:

a) $b/\gamma \ll v|t| \ll b$: alors $b/(v|t|) \gg 1$ donc $E_2 \gg E_1$. Ceci correspond dans l'image spatiale à $\psi \sim \pm\pi/2$. La situation ressemble à celle d'une onde plane se propageant dans le vide, puisque E_2 domine et $\vec{B}$ est suivant $\vec{u}_3$ avec $B_3 \sim E_2$.



b) $b \ll v|t|$: alors $b/(v|t|) \ll 1$ donc $E_2 \ll E_1$. Ceci correspond dans l'image spatiale à $\psi \sim 0$ ou $\psi \sim \pi$. Donc à très grande distance, lorsque l'amplitude du champ est très faible, le champ diffère fortement de celui d'une onde plane se propageant dans le vide.



B) Si $v|t| \ll b/\gamma < b$: alors

$$\begin{aligned} E_1 &\sim -\frac{q\gamma vt}{4\pi b^3}\,, \\ E_2 &\sim \frac{q\gamma b}{4\pi b^3}\,, \end{aligned}$$

et donc $E_2 \gg E_1$. Ceci correspond dans l'image spatiale à $\psi \sim \pm\pi/2$.

---

ii) Limite non relativiste $\gamma \sim 1$.

Solution

On doit alors seulement distinguer les deux régimes extrêmes

A) $v|t| \gg b/\gamma \sim b$ donc $E_2 \ll E_1$. Donc à très grande distance, lorsque l'amplitude du champ est très faible, le champ diffère fortement de celui d'une onde plane se propageant dans le vide.

B) $v|t| \ll b$ donc $E_2 \gg E_1$, la situation ressemble à celle d'une onde plane se propageant dans le vide, puisque E_2 domine et $\vec{B}$ est suivant $\vec{u}_3$ avec $B_3 \sim E_2$.

---

2 Composante coulombienne du champ de Liénard-Wiechert d'une particule en mouvement quelconque

On considère une particule ponctuelle chargée, de charge q, en mouvement quelconque, dont la trajectoire est décrite par son quadrivecteur position $(\xi^0, \vec{\xi}(t))$.

On rappelle que le champ électrique de Liénard-Wiechert dû au mouvement de cette particule s'écrit

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{(1-\vec{\beta}'\cdot\vec{n}')^3}\left[\frac{\vec{n}'-\vec{\beta}'}{\gamma'^2 R'^2} + \frac{1}{R'}\vec{n}'\wedge\left((\vec{n}'-\vec{\beta}')\wedge\dot{\vec{\beta}}'\right)\right] \tag{13}$$

où la notation x' signifie que la quantité correspondante doit être évaluée à l'instant retardé t', solution de l'équation

$$t' - t + \frac{|\vec{r}-\xi(\vec{t'})|}{c} = 0\,.$$

Le vecteur $\vec{R}' = \overrightarrow{M'P}$ pointe de la position retardée M' où se trouve la charge vers le point d'observation P, et l'on note R' sa norme. Enfin $\vec{n}'$ est le vecteur unitaire $\vec{R}'/R'$.
Par ailleurs, le champ magnétique s'écrit

$$\vec{B} = \vec{n}' \wedge \vec{E}\,. \tag{14}$$

Le champ électrique (13) (de même que le champ magnétique (14)) est la somme de deux termes. Le premier terme entre les deux crochets dans (13), en $1/R'^2$, est le champ uniquement dû à la vitesse de la particule en mouvement, indépendamment de son accélération, tandis que le second terme, en $1/R'$, est dû à son accélération.

13. Rappeler pourquoi le premier terme ne donne pas lieu à un transfert d'énergie radiative à grande distance.

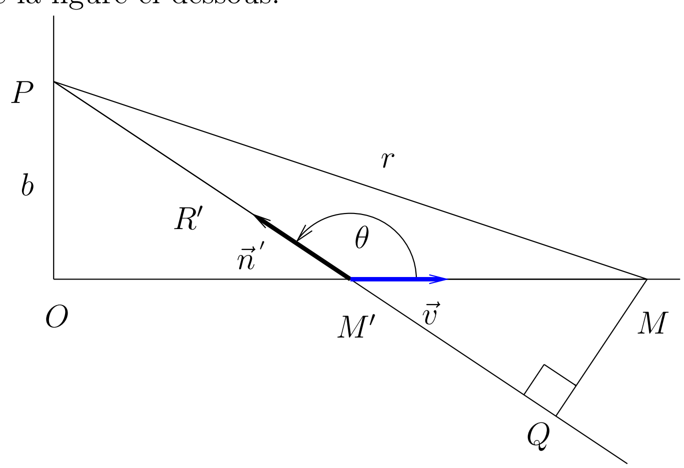
Solution

Comme la première composante varie en $1/R'^2$, donc le vecteur de Poynting correspondant varie comme $1/R'^3$ à grande distance. Comme la surface du sphère varie comme R'^2, la puissance par angle solide tend vers 0 à grande distance.

---

14. On souhaite démontrer par un argument géométrique que ce champ électrique dû à la vitesse est bien identique au champ coulombien examiné dans la partie 1.

On pourra s'aider de la figure ci-dessous.



On note M et M' la position de la charge respectivement à l'instant t et à l'instant retardé t'.

i) Justifier le fait que $M'M = \beta R'$.

Solution

Le temps écoulé entre M' et M est celui qu'il faut pour que l'onde électromagnétique de vitesse $c = 1$ se propage de M' à P, soit un temps R'. Pendant cette durée, la particule a parcouru une distance $M'M = \beta R'$.

---

ii) On introduit $\theta = (\vec{v}, \vec{n}')$. En introduisant l'intersection Q entre la droite (PM') et sa normale passant par M, et en exprimant judicieusement la distance PQ, démontrer le résultat.

Solution

On a

$$M'Q = -\beta R' \cos\theta = -\vec{\beta} \cdot \vec{n}' R'$$

et donc

$$PQ = PM' + M'Q = R'(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}') \,.$$

Par ailleurs,

$$PQ^2 + QM^2 = PM^2 = r^2$$

avec

$$QM = \beta R' \sin\theta$$

et donc

$$R'^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}')^2 = r^2 - \beta^2 R'^2 \sin^2\theta = r^2 - \beta^2 b^2$$

puisque $b = R' \sin\theta$. Finalement, comme $OM = vt$ et donc $r^2 = b^2 + v^2 t^2$, on a donc

$$R'^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}')^2 = b^2(1 - \beta^2) + v^2 t^2 = \frac{b^2}{\gamma^2} + v^2 t^2 = \frac{1}{\gamma^2}(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)$$

soit encore

$$(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}')^3 = (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2} \frac{1}{R'^3 \gamma^3} \,.$$

Comme

$$\vec{n}' - \vec{\beta} = \frac{1}{R'} \left(\frac{(\beta R' - vt)}{R'} - \beta \right) \vec{u}_1 + b \vec{u}_2 = -\frac{vt}{R'} \vec{u}_1 + b \vec{u}_2 \,,$$

on a d'après la relation (13)

$$\vec{E}_{vitesse} = \frac{q R'^3 \gamma^3}{4\pi \gamma^2 R'^2 (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} (\vec{n}' - \vec{\beta}) = \frac{q\gamma}{4\pi (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} (\vec{b} - \vec{\beta} t)$$

qui est bien en accord avec les résultats (9) et (10).