M1 de Physique et Magistère de Physique Fondamentale 2023-2024

Electrodynamique Classique et Quantique

Examen

19 janvier 2024

Documents autorisés

Notes:
- Le sujet est **délibérément très long**. Il n'est donc absolument pas nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note!

- Les 3 parties sont indépendantes, mais des résultats des premières parties (donnés explicitement) peuvent servir dans les parties qui suivent.

- Certaines questions peuvent être délicates (signalées par le symbole *), ou longues (signalées par le symbole **). Le barème en tiendra compte et récompensera en proportion le soin apporté aux réponses, ainsi que les tentatives de réponse.

- On pourra utiliser un système d'unités dans lequel $c = 1$ et $\hbar = 1$.

- Les coordonnées pourront être librement notées (x, y, z) ou (x^1, x^2, x^3).

- Les transformées de Fourier et les notations correspondantes sont définies par l'Eq. (4).

- Tout dessin est très bienvenu!

1 Fonctions de Green

En théorie classique des champs, les équations du mouvement sont typiquement du type Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = j(x) \tag{1}$$

où j dépend a priori des champs ϕ et où l'on oublie les indices supplémentaires éventuels (indices de Lorentz...). Dans le cadre des équations de Maxwell, cette équation est par exemple satisfaite par le potentiel, dans la jauge de Lorentz, avec $m^2 = 0$.
On obtient les solutions de cette équation si on connaît les solutions (dites fonctions de Green) de l'équation

$$(\Box + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x'). \tag{2}$$

On ne s'intéresse qu'aux solutions invariantes par translation de sorte que l'on peut ne considérer que les fonctions de Green $G(x, x')$ qui ne dépendent que de $x - x'$.
Les solutions générales de l'Eq. (1) s'obtiennent alors grâce au principe de superposition par

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int d^4x' \, G(x - x') \, j(x') \,, \tag{3}$$

où $\phi^{(0)}(x)$ est solution de l'équation homogène et choisie de sorte que ϕ satisfasse aux conditions aux limites (choisies de façon générale sur des surfaces de genre espace, l'équation étant du type hyperbolique).

L'invariance par translation des solutions de l'Eq.(3) permet alors par analyse de Fourier de remplacer le problème par un problème algébrique. En posant

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{-ip\cdot x} \tilde{G}(p)\,, \tag{4}$$

on obtient ainsi

$$(-p^2 + m^2)\, \tilde{G}(p) = 1\,. \tag{5}$$

La solutions générale est donc complètement déterminée, à une distribution à support sur l'hyperboloïde à deux nappes $p^2 - m^2 = 0$ près (ou sur le cône $p^2 = 0$ si $m^2 = 0$), de la forme

$$g\left(\vec{p}, \frac{p_0}{|p_0|}\right) \delta(p^2 - m^2). \tag{6}$$

Cette dernière distribution est solution de l'équation de Klein-Gordon homogène.
On définit en premier lieu les fonctions de Green retardée et avancée ($\epsilon \to 0^+$):

$$\tilde{G}_{\substack{ret\\av}}(p) = \frac{-1}{(p_0 \pm i\epsilon)^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2}. \tag{7}$$

On notera $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

1. En étudiant la structure analytique de $\tilde{G}_{\substack{ret\\av}}(p)$, simplifier $G_{\substack{ret\\av}}(x)$ en effectuant l'intégration sur p_0. On notera $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^{2} + m^2}$.

On montrera que

$$\begin{aligned} G_{ret}(x) &= i\theta(x_0)(D(x) - D(-x))\,, & (8)\\ G_{av}(x) &= i\theta(-x_0)(D(-x) - D(x))\,, & (9) \end{aligned}$$

où la fonction $D(x)$ est définie par

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} e^{-ip\cdot x} \quad \text{avec} \quad p_0 = \omega_p. \tag{10}$$

2. Montrer que

$$\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} = \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) \tag{11}$$

et conclure sur l'invariance de Lorentz de cet élément d'espace de phase à une particule.

3. Montrer que $D(x)$ est invariante sous le groupe de Lorentz orthochrone $\mathcal{L}^{\uparrow}$. En déduire que les fonctions de Green G_{ret} et G_{av} sont invariantes sous ce même groupe.

4. (i) (*) Dans le cas spécifique $x^2 < 0$, en utilisant leurs propriétés de symétrie et en utilisant l'invariance de Lorentz, montrer que ces deux fonctions de Green G_{ret} et G_{av} s'annulent.

(ii) Justifier les appellations de fonctions de Green avancée et retardée, et préciser le support de ces deux distributions.

5. On souhaite donner une interprétation physique aux fonctions de Green précédentes. On suppose pour cela que le système est enfermé dans une très grande boite cubique de taille L. L'intégrale sur l'impulsion doit alors être remplacée par une somme de Riemann. En prenant par exemple des conditions aux bords périodiques, et en introduisant les ondes planes

$$\varphi_{\pm,\vec{p}}(x) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_p}} e^{\mp i\omega_p x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \tag{12}$$

donner l'expression correspondante de $G_{\substack{ret\\av}}(x-y)$. Interpréter physiquement l'expression obtenue, du point de vue de la propagation des solutions d'énergies positives et négatives. Vérifier que cette expression est réelle.

6. Fonction de Green $G^{(-)}$.

(i) Montrer que la différence $G^{(-)}(x) \equiv G_{ret}(x) - G_{av}(x)$ est une fonction impaire qui s'annule à l'extérieur du cône de lumière, et qui satisfait l'équation de Klein-Gordon homogène.

(ii) Montrer que sa transformée de Fourier s'écrit

$$G^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \, e^{-ip\cdot x} \epsilon(p_0)\, \delta(p^2 - m^2)\,, \tag{13}$$

où $\epsilon(p_0) = \text{signe}(p_0)$.

(iii) Montrer que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x)\right|_{x_0=0} = \delta^3(\vec{x}). \tag{14}$$

(iv) Dans la limite $m^2 = 0$, montrer que

$$G^{(-)}(x)\,|_{m^2=0} = \frac{1}{2\pi}\epsilon(x_0)\,\delta(x^2) = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{4\pi^2 i}\left[\frac{1}{(x-i\eta)^2} - \frac{1}{(x+i\eta)^2}\right] \tag{15}$$

où η est un vecteur infinitésimal de genre temps avec $\eta_0 > 0$.

7. Fonction de Green $G^{(+)}$.

Montrer que

$$G^{(+)} \equiv \frac{1}{2}[G_{ret}(x) + G_{av}(x)] = -\frac{\text{PP}}{(2\pi)^4} \int d^4p \, e^{-ip.x} \frac{1}{p^2 - m^2}\,, \tag{16}$$

où la partie principale s'applique à l'intégrale sur p_0.
On rappelle que

$$\frac{1}{p_0 - \omega_p \pm i\epsilon} = \text{PP}\frac{1}{p_0 - \omega_p} \mp i\pi\delta(p_0 - \omega_p)\,. \tag{17}$$

où la distribution partie principale de Cauchy, notée PP, est définie pour toute fonction test $f(x)$ par la limite

$$\int \mathrm{PP}\frac{1}{x}\, f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\, f(x)\, dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{1}{x}\, f(x)\, dx\right]. \tag{18}$$

8. Fonction de Green de Feynman.

Les fonctions de Green introduites précédemment apparaissent en théorie classique des champs. En théorie quantique des champs, la fonction de Green retardée apparaît dans l'expression

$$G_{ret}(x-y) = i\theta(x_0 - y_0)\langle 0|[\Phi(x), \Phi(y)]|0\rangle\,. \tag{19}$$

où Φ est un champ bosonique.
Il est en fait plus naturel d'introduire une autre fonction de Green (introduite pour la première fois par Stueckelberg et Feynman), qui est complexe (contrairement au cas classique), définie par

$$G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip.x}\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{20}$$

(i) Simplifier cette expression en intégrant sur p_0, et exprimer celle-ci l'aide de la fonction D.

(ii) En suivant la même approche que dans la question 5, donner l'expression discrétisée de cette distribution.

(iii) Interpréter ce résultat, dans l'esprit particule/antiparticule, en lien avec l'équation de Klein-Gordon.

9. (i) Montrer que G_F ne s'annule pas à l'extérieur du cône de lumière. On calculera pour cela $G_F(x_0 = 0, r)$ avec $r = |\vec{x}|$, et on montrera que

$$G_F(0, r) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p\, dp}{\sqrt{p^2 + m^2}}e^{ipr}. \tag{21}$$

(ii) (*) Par un choix judicieux de contour dans le plan complexe, montrer que

$$G_F(0, r) = \frac{i}{(2\pi)^2 r}\int_{m}^{+\infty}\frac{p\, dp}{\sqrt{p^2 - m^2}}e^{-pr}. \tag{22}$$

(iii) En déduire que

$$G_F(0, r) \sim \frac{ie^{-mr}}{(2\pi)^2 r^2}\left(\frac{\pi m r}{2}\right)^{1/2} \qquad \text{pour} \quad r \to \infty\,. \tag{23}$$

2 Fonction de Green et jauge covariante

1. Question préliminaire. Pour toute impulsion p (supposée ne pas être de genre lumière), on introduit les opérateurs T et L définis par

$$L_{\mu\nu} = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \tag{24}$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \tag{25}$$

Quelles sont leurs propriétés algébriques? On étudiera en particulier L^2, T^2, LT, TL et $L+T$. Quelles sont leur action sur p? En déduire leur nature. Caractériser le noyau de ces deux opérateurs.

Dans le cas de l'électromagnétisme, l'équation de Maxwell satisfaite par le potentiel vecteur s'écrit

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial.A) = j^\mu \tag{26}$$

2. Montrer qu'elle ne suffit pas à elle seule à déterminer A^μ en fonction de j^μ. Montrer en particulier que si l'on tente de construire la fonction de Green correspondante, l'on est amené (dans l'espace de Fourier) à inverser l'opérateur T, et conclure.

Pour résoudre ce problème, on est amené à donner une masse au photon ou alors à ajouter un terme de fixation de jauge dans le lagrangien. Dans la jauge covariante de Lorentz, on ajoute donc au lagrangien le terme

$$\mathcal{L}_{jauge} = \frac{\lambda}{2}(\partial.A)^2, \tag{27}$$

de sorte que le lagrangien complet s'écrit

$$\mathcal{L}_{e.m} = -\frac{1}{4}F^2 - j.A + \frac{\lambda}{2}(\partial.A)^2, \tag{28}$$

3. Ecrire les équations du mouvement du lagrangien correspondant.

4. On pose

$$M_{\mu\nu} = p^2 g_{\mu\nu} - (1+\lambda)p_\mu p_\nu. \tag{29}$$

En utilisant les deux opérateurs L et T, et en calculant l'opérateur inverse de M, montrer que la fonction de Green, correspondant à l'équation du mouvement obtenue à la question 2 peut s'écrire sous la forme, en utilisant la prescription de Feynman (20),

$$G_{F\mu\nu}(x-y,\lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip\cdot(x-y)}\frac{1}{p^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{1+\lambda}{\lambda}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right). \tag{30}$$

5. Discuter les limites $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$. Dans ce deuxième cas, relier les propriétés du propagateur obtenu à la forme du lagrangien.

3 Bremsstrahlung classique

On souhaite étudier le rayonnement d'une charge brutalement accélérée. On note $u_i = p_i/m$ et $u_f = p_f/m$ les quadri-vitesses initiale et finale de la particule chargée. En choisissant l'origine des coordonnées d'espace-temps au point où la particule est accélérée, sa trajectoire prend la forme

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{p_i}{m}\tau & \tau < 0 \\ \\ \frac{p_f}{m}\tau & \tau > 0 \end{cases} \tag{31}$$

3.1 Calcul de l'énergie émise

1. (i) Montrer que le courant s'écrit, en représentation de Fourier

$$j^\mu(x) = \frac{-ie}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik.x}\left[\frac{p_i^\mu}{p_i.k - i\epsilon} - \frac{p_f^\mu}{p_f.k + i\epsilon}\right], \tag{32}$$

après utilisation d'une régularisation appropriée ($\tau \to \tau(1 - i\,\mathrm{sgn}(p_i \cdot k)\epsilon)$ pour $\tau < 0$ et $\tau \to \tau(1 + i\,\mathrm{sgn}(p_f \cdot k)\epsilon)$ pour $\tau > 0$, avec $\epsilon \to 0^+$).

(ii) Discuter la conservation de ce courant.

(iii) Comparer $\tilde{j}(k)$, $\tilde{j}(-k)$ et $\tilde{j}^*(k)$.

2. Pour $t \to -\infty$, comme la conservation du courant interdit son annulation, on va exiger que le champ électromagnétique se réduise au champ de Coulomb de la particule incidente. On décompose donc le champ A^μ en la somme d'un champ de radiation (solution de l'équation de Maxwell homogène) et d'un champ de Coulomb accompagnant la particule. En utilisant la partie 1, donner l'expression des deux champs correspondants en fonction de $G^{(-)}$, G_{av} et j^μ. En particulier, montrer que

$$A^\mu_{rad}(x) = \int d^4x'\, G^{(-)}(x - x')\, j^\mu(x')\,. \tag{33}$$

3. En utilisant la forme explicite (13) de $G^{(-)}$, calculer $F^{\mu\nu}_{rad}(x)$ en fonction de $\tilde{j}(k)$.

4. On rappelle que le tenseur d'énergie-impulsion de Belinfante $\Theta^{\mu\nu}_{rad}$ du champ $A^\mu_{rad}(x)$ s'écrit

$$\Theta^{\mu\nu}_{rad} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2_{rad} + F^{\mu\rho}_{rad}F_{rad\,\rho}{}^{\nu}\,. \tag{34}$$

Pour un vecteur de genre lumière $k^0 = |\vec{k}|$, on définit deux vecteurs polarisation orthogonaux de genre espace qui vérifient

$$\epsilon_\lambda^2 = -1 \quad \epsilon_1 \,.\, \epsilon_2 = 0 \quad \epsilon_\lambda \,.\, k = 0\,. \tag{35}$$

On souhaite montrer que l'énergie émise à un instant $t > 0$ s'écrit

$$\mathcal{E} = \int d^3x\, \Theta^{00}(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2\,. \tag{36}$$

(i) Montrer que $\mathcal{E}$ peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x \int d^4k\, d^4k'\, e^{-i(k+k')\cdot x} \epsilon(k_0)\, \epsilon(k_0')\, \delta(k^2)\, \delta(k'^2)\, T(k,k') \tag{37}$$

où

$$\begin{aligned} T(k,k') &= \frac{1}{2} \left[(k \cdot k')\, (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(k')) - (k \cdot \tilde{j}(k'))(k' \cdot \tilde{j}(k)) \right] \\ &- k_0 k_0'\, (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(k')) + k_0 \tilde{j}_0(k')\, (k' \cdot \tilde{j}(k)) + k_0' \tilde{j}_0(k)\, (k \cdot \tilde{j}(k')) - (k \cdot k')\, \tilde{j}_0(k) \tilde{j}_0(k')\,. \end{aligned} \tag{38}$$

(ii) Pour tout $k = (k_0, \vec{k})$ de genre lumière donné, on pose $\tilde{k} = (k_0, -\vec{k})$. Montrer que $T(k, \tilde{k}) = 0$.

(iii) (**) Mener alors à bien le calcul conduisant à l'Eq. (36): après intégration sur x, il sera utile d'utiliser la relation

$$\epsilon(k_0)\, \delta(k^2) = \frac{1}{2k_0} \delta(|\vec{k}| - k_0) + \frac{1}{2k_0} \delta(|\vec{k}| + k_0) \tag{39}$$

(que l'on justifiera), ainsi que la conservation du courant, et de décomposer ce courant $\tilde{j}(k)$ dans la base bidimensionnelle ϵ_λ, cf Eq. (35).

5. (i) Quel est le nombre dN de photons de polarisation ϵ et d'énergie k_0 émis par élément d'espace de phase?

(ii) Déduire des résultats précédents que l'énergie totale est finie tandis que le nombre total de photon ne l'est pas. Ce phénomène porte le nom de catastrophe infrarouge. Justifier cette appellation.

3.2 Distribution angulaire et calcul du nombre de photons émis

6. On introduit les vitesses $\vec{v}_i$ et $\vec{v}_f$ des particules incidentes et sortantes, et l'on note $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ la direction du photon émis.

(i) Montrer que

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3k}{|\vec{k}|^2} \left[\frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} - \frac{m^2}{E_i^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)^2} - \frac{m^2}{E_f^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)^2} \right]. \tag{40}$$

(ii) Caractériser la distribution angulaire de la radiation.

7. Le processus de diffusion est caractérisé par une section efficace $d\sigma_{diff}$, dont la forme explicite ne joue aucun rôle ici. La section efficace totale $d\sigma_{Brems}$ inclut l'émission additionnelle de photons.

On souhaite donc maintenant évaluer le nombre total de photons émis afin d'obtenir le facteur correctif permettant de passer de $d\sigma_{diff}$ à $d\sigma_{Brems}$. On va ainsi intégrer ce nombre de photon d'une valeur k_{min} (pour échapper à la catastrophe infrarouge; elle correspond en pratique à la résolution du détecteur) à une valeur maximale k_{max}.

Dans la suite, nous allons donc étudier en détail

$$N = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk_0}{k_0} \int d^2\vec{n} \left[\frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} - \frac{m^2}{E_i^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)^2} - \frac{m^2}{E_f^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)^2} \right]. \tag{41}$$

(i) Justifier cette expression. Pourquoi introduire une coupure k_{max}? On pourra donner à la fois une explication technique et une explication physique liée au modèle considéré.

Afin de pouvoir intégrer sur l'angle solide $d^2\vec{n}$, on introduit la représentation intégrale de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2} \,. \tag{42}$$

(ii) En déduire que

$$\int d^2\vec{n} \, \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = 2\pi \int_0^1 dx \, \frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{1 - [x\vec{v}_i + (1-x)\vec{v}_f]^2} \,. \tag{43}$$

(iii) Montrer que

$$\int d^2\vec{n} \, \frac{m^2}{E^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} = 4\pi \,. \tag{44}$$

Nous allons à présent mener le calcul dans deux limites extrêmes. On note θ l'angle de diffusion.

8. On considère la limite non relativiste $v \ll 1$.

(i) Montrer que

$$\int d^2\vec{n} \, \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = 4\pi \left(1 + \frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(v^4) \,. \tag{45}$$

(ii) En déduire finalement que dans cette limite non relativiste,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{Brems} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{diff} \left(\ln \frac{k_{max}}{k_{min}} \right) \frac{8\alpha}{3\pi} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \,. \tag{46}$$

9. Considérons à présent le cas ultra-relativiste. On introduit le transfert d'impulsion $q = p_f - p_i$.

(i) Justifier le fait que

$$q^2 \simeq -4E^2 \sin^2 \theta/2 \tag{47}$$

dans la limite ultra-relativiste où $E_i \sim E_f = E$.

(ii) (*) Montrer que dans la limite ultra-relativiste $q^2 \gg m^2$,

$$\int d^2\vec{n}\, \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = 4\pi \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) . \tag{48}$$

(iii) En déduire finalement que dans cette limite,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{Brems} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{diff} \left(\ln \frac{k_{max}}{k_{min}}\right) \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) - 1\right] . \tag{49}$$

FIN !