

*Electrodynamique Classique et Quantique***Examen**

19 janvier 2024

Documents autorisés

Notes:

- Le sujet est **délibérément très long**. Il n'est donc absolument pas nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note!
- Les 3 parties sont indépendantes, mais des résultats des premières parties (donnés explicitement) peuvent servir dans les parties qui suivent.
- Certaines questions peuvent être délicates (signalées par le symbole *), ou longues (signalées par le symbole **). Le barème en tiendra compte et récompensera en proportion le soin apporté aux réponses, ainsi que les tentatives de réponse.
- On pourra utiliser un système d'unités dans lequel $c = 1$ et $\hbar = 1$.
- Les coordonnées pourront être librement notées (x, y, z) ou (x^1, x^2, x^3) .
- Les transformées de Fourier et les notations correspondantes sont définies par l'Eq. (4).
- Tout dessin est très bienvenu!

1 Fonctions de Green

En théorie classique des champs, les équations du mouvement sont typiquement du type Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x) \quad (1)$$

où j dépend a priori des champs ϕ et où l'on oublie les indices supplémentaires éventuels (indices de Lorentz...). Dans le cadre des équations de Maxwell, cette équation est par exemple satisfaite par le potentiel, dans la jauge de Lorentz, avec $m^2 = 0$.

On obtient les solutions de cette équation si on connaît les solutions (dites fonctions de Green) de l'équation

$$(\square + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (2)$$

On ne s'intéresse qu'aux solutions invariantes par translation de sorte que l'on peut ne considérer que les fonctions de Green $G(x, x')$ qui ne dépendent que de $x - x'$.

Les solutions générales de l'Eq. (1) s'obtiennent alors grâce au principe de superposition par

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int d^4x' G(x - x') j(x'), \quad (3)$$

où $\phi^{(0)}(x)$ est solution de l'équation homogène et choisie de sorte que ϕ satisfasse aux conditions aux limites (choisies de façon générale sur des surfaces de genre espace, l'équation étant du type hyperbolique).

L'invariance par translation des solutions de l'Eq.(3) permet alors par analyse de Fourier de remplacer le problème par un problème algébrique. En posant

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \tilde{G}(p), \quad (4)$$

on obtient ainsi

$$(-p^2 + m^2) \tilde{G}(p) = 1. \quad (5)$$

La solutions générale est donc complètement déterminée, à une distribution à support sur l'hyperboloïde à deux nappes $p^2 - m^2 = 0$ près (ou sur le cône $p^2 = 0$ si $m^2 = 0$), de la forme

$$g\left(\vec{p}, \frac{p_0}{|p_0|}\right) \delta(p^2 - m^2). \quad (6)$$

Cette dernière distribution est solution de l'équation de Klein-Gordon homogène. On définit en premier lieu les fonctions de Green retardée et avancée ($\epsilon \rightarrow 0^+$):

$$\tilde{G}_{av}^{ret}(p) = \frac{-1}{(p_0 \pm i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}. \quad (7)$$

On notera $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

1. En étudiant la structure analytique de $\tilde{G}_{av}^{ret}(p)$, simplifier $G_{av}^{ret}(x)$ en effectuant l'intégration sur p_0 . On notera $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

On montrera que

$$G_{ret}(x) = i\theta(x_0)(D(x) - D(-x)), \quad (8)$$

$$G_{av}(x) = i\theta(-x_0)(D(-x) - D(x)), \quad (9)$$

où la fonction $D(x)$ est définie par

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} e^{-ip \cdot x} \quad \text{avec} \quad p_0 = \omega_p. \quad (10)$$

Solution

Partant de la définition

$$G_{av}^{ret}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{(p_0 \pm i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2},$$

on constate donc que

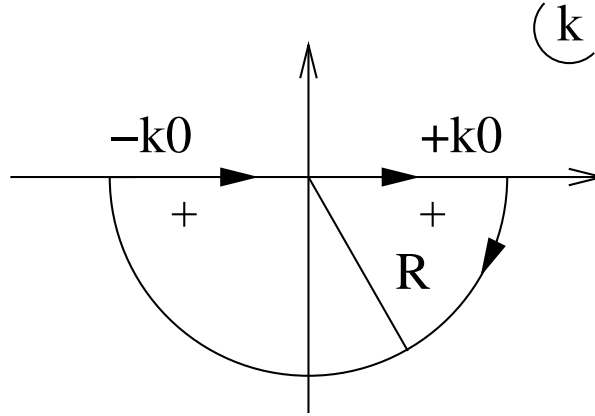
$$G_{av}(x) = G_{ret}^*(-x).$$

Etudions en détail $G_{ret}(x)$. On a

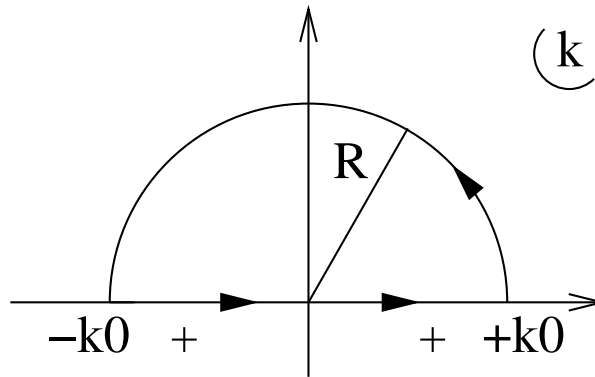
$$\frac{1}{(p_0 + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{1}{2\omega_p} \left[\frac{1}{p_0 - \omega_p + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_p + i\epsilon} \right].$$

Les deux pôles sont dans le demi-plan $\text{Im}(p_0) < 0$. On déforme maintenant le contour d'intégration, initialement le long d'une droite de $-\infty$ à $+\infty$, donc au-dessus de ces deux pôles.

Cas $x_0 > 0$: le contour est fermé vers le bas pour la convergence sur un demi-cercle de rayon R , dont on fait tendre le rayon vers l'infini. La contribution sur ce demi-cercle est nulle. On peut alors appliquer le théorème de Cauchy. On constate que l'on entoure les deux pôles, qui contribuent, comme illustré ci-dessous:



Cas $x_0 < 0$: le contour est fermé vers le haut pour la convergence sur un demi-cercle de rayon R , dont on fait tendre le rayon vers l'infini. La contribution sur ce demi-cercle est nulle. On peut alors appliquer le théorème de Cauchy. On constate que le contour n'entoure aucun de ces deux pôles, et la fonction de Green est donc nulle, comme illustré ci-dessous:



Au total, on obtient donc

$$\begin{aligned} G_{ret}(x) &= \theta(x_0) \frac{2i\pi}{(2\pi)^4} \int d^3p \left[\frac{1}{2\omega_p} e^{-i\omega_p x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \frac{1}{2\omega_p} e^{i\omega_p x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \\ &= \theta(x_0) \frac{2i\pi}{(2\pi)^4} \int d^3p \left[\frac{1}{2\omega_p} e^{-i\omega_p x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \frac{1}{2\omega_p} e^{i\omega_p x_0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \end{aligned}$$

après $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ dans la seconde intégrale, en tenant compte du fait que ω_p est invariant sous cette transformation. On a donc finalement

$$G_{ret}(x) = i\theta(x_0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} [e^{-ip\cdot x} - e^{ip\cdot x}]_{p_0=\omega_p} = i\theta(x_0)(D(x) - D(-x)).$$

Par ailleurs, d'après la définition de $D(x)$, on a $D^*(x) = D(-x)$ et donc

$$G_{ret}^*(x) = -i\theta(x_0)(D^*(x) - D^*(-x)) = -i\theta(x_0)(D(-x) - D(x)) = G_{ret}(x),$$

ce qui montre que $G_{ret}(x)$ est réelle. Enfin

$$G_{av}(x) = G_{ret}^*(-x) = G_{ret}(-x) = i\theta(-x_0)(D(-x) - D(x)).$$

2. Montrer que

$$\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} = \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) \quad (11)$$

et conclure sur l'invariance de Lorentz de cet élément d'espace de phase à une particule.

Solution

Il suffit d'écrire que

$$\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) = \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2)\theta(p_0)$$

L'équation $p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0$ possède deux racines $p_0 = \pm\omega_p$, et la contrainte d'énergie positive $\theta(p_0)$ sélectionne la racine positive. Comme

$$\frac{d}{dp_0}(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2)(p_0 = \omega_p) = 2\omega_p,$$

on a donc

$$\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) = \frac{\delta(p_0 - \omega_p)}{2\omega_p}$$

q.e.d.

L'invariance sous les transformations de Lorentz de \mathcal{L}^\uparrow est alors évidente d'après le membre de droite de l'Eq. (11).

3. Montrer que $D(x)$ est invariante sous le groupe de Lorentz orthochrone \mathcal{L}^\uparrow . En déduire que les fonctions de Green G_{ret} et G_{av} sont invariantes sous ce même groupe.

Solution

Considérons une transformation $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow$. On a

$$D(\Lambda x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} e^{-ip \cdot (\Lambda x)} \quad \text{avec } p_0 = \omega_p. \quad (12)$$

Or $p \cdot \Lambda x = \Lambda^{-1}p \cdot x$ par invariance de Lorentz du produit scalaire Minkowskien. Comme par ailleurs on a vu dans la question précédente que $\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p}$ est invariant sous \mathcal{L}^\uparrow , on peut faire le changement de variable $\Lambda^{-1}p \rightarrow p$ dans l'intégrale, ce qui montre que $D(\Lambda x) = D(x)$.

4. (i) (*) Dans le cas spécifique $x^2 < 0$, en utilisant leurs propriétés de symétrie et en utilisant l'invariance de Lorentz, montrer que ces deux fonctions de Green G_{ret} et G_{av} s'annulent.

Solution

Si $x^2 < 0$, on peut par transformation de Lorentz se ramener au cas $x = (0^+, \vec{x})$ avec $x^2 = -\vec{x}^2$. On a donc $G_{ret}(x) = i(D(0, \vec{x}) - D(0, -\vec{x}))$. Or $D(0, -\vec{x}) = D(0, \vec{x})$ comme on le voit immédiatement à partir de sa définition après changement de variable d'intégration $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, d'où $G_{ret}(x) = 0$. Même raisonnement pour $G_{av}(x)$.

(ii) Justifier les appellations de fonctions de Green avancée et retardée, et préciser le support de ces deux distributions.

Solution

3 cas se présentent:

- $x^2 < 0$: les deux fonctions de Green sont nulles, voir question précédente.
- $x^2 > 0$ et $x^2 = 0$: aucune raison pour que ces fonctions de Green soient nulles. L'appellation fonctions de Green avancée et retardée vient des distributions $\theta(x_0)$ pour G_{ret} et $\theta(-x_0)$ pour G_{av} .

5. On souhaite donner une interprétation physique aux fonctions de Green précédentes. On suppose pour cela que le système est enfermé dans une très grande boîte cubique de taille L . L'intégrale sur l'impulsion doit alors être remplacée par une somme de Riemann. En prenant par exemple des conditions aux bords périodiques, et en introduisant les ondes planes

$$\varphi_{\pm, \vec{p}}(x) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_p}} e^{\mp i\omega_p x_0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \quad (13)$$

donner l'expression correspondante de $G_{ret}^{av}(x - y)$. Interpréter physiquement l'expression obtenue, du point de vue de la propagation des solutions d'énergies positives et négatives. Vérifier que cette expression est réelle.

Solution

Avec des conditions aux bords périodiques, la condition de quantification s'écrit

$$\varphi_{\pm, \vec{p}}(x_0, L\vec{u}_1 + \vec{x}) = \varphi_{\pm, \vec{p}}(x_0, L\vec{u}_2 + \vec{x}) = \varphi_{\pm, \vec{p}}(x_0, L\vec{u}_3 + \vec{x}) = \varphi_{\pm, \vec{p}}(x_0, \vec{x})$$

soit

$$e^{ip_1 L} = e^{ip_2 L} = e^{ip_3 L} = 1$$

i.e.

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = \frac{2\pi}{L} \vec{n}$$

avec $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$, donc le passage du discret au continu se fait par

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{p} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p}.$$

Les ondes planes dans le cas discret s'écrivent donc, en prenant en compte le facteur de normalisation précédent,

$$\varphi_{\pm, \vec{p}}(x) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_p}} e^{\mp i\omega_p x_0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}},$$

où $\varphi_{+, \vec{p}}$ est une onde plane d'énergie positive, et $\varphi_{-, \vec{p}}$ est une onde plane d'énergie négative. On a donc

$$G_{ret}(x - y) = i\theta(x_0 - y_0) \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{\vec{p} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}} [\varphi_{+, \vec{p}}(x) \varphi_{+, \vec{p}}^*(y) - \varphi_{-, \vec{p}}(x) \varphi_{-, \vec{p}}^*(y)].$$

L'expression précédente montre que G_{ret} propage à la fois les fréquences positives (1er terme) et les fréquences négative (2ème terme) vers le futur. On vérifie par ailleurs sur cette expression que

$$G_{ret}(x - y) = i\theta(x_0 - y_0) \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{\vec{p} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}} [\varphi_{+, \vec{p}}(x) \varphi_{+, \vec{p}}^*(y) - (\varphi_{+, \vec{p}}(x) \varphi_{+, \vec{p}}^*(y))^*],$$

ce qui montre que $G_{ret}(x - y)$ est réelle. Ceci est bien sûr en accord avec le résultat montré plus haut.

6. Fonction de Green $G^{(-)}$.

(i) Montrer que la différence $G^{(-)}(x) \equiv G_{ret}(x) - G_{av}(x)$ est une fonction impaire qui s'annule à l'extérieur du cône de lumière, et qui satisfait l'équation de Klein-Gordon homogène.

Solution

On a

$$G^{(-)}(x) = G_{ret}(x) - G_{av}(x) = G_{ret}(x) - G_{ret}(-x)$$

et donc $G^{(-)}(-x) = G^{(-)}(x)$. La fonction de Green $G^{(-)}(x)$ est donc impaire. Chacune des fonctions de Green $G_{ret}(x)$ et $G_{av}(x)$ s'annule lorsque $x^2 < 0$, donc $G^{(-)}(x)$ est nulle pour $x^2 < 0$, i.e. en dehors du cône de lumière.

Enfin

$$\begin{aligned} (\square + m^2)G_{av}(x) &= \delta^4(x) \\ (\square + m^2)G_{ret}(x) &= \delta^4(x) \end{aligned}$$

donc la différence membre à membre conduit à

$$(\square + m^2)G^{(-)}(x) = 0.$$

(ii) Montrer que sa transformée de Fourier s'écrit

$$G^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2), \quad (14)$$

où $\epsilon(p_0) = \text{signe}(p_0)$.

Solution

Partant de

$$G^{(-)}(x) = G_{ret}(x) - G_{av}(-x)$$

et de la définition de $G^{(-)}(x)$, et en utilisant la relation (8) on a

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) &= G_{ret}(x) - G_{av}(x) = i\theta(x_0)[D(x) - D(-x)] - i\theta(-x_0)[D(-x) - D(x)] \\ &= i[\theta(x_0) + \theta(-x_0)][D(x) - D(-x)] = i(D(x) - D(-x)). \end{aligned}$$

Insérons la définition (10) de $D(x)$, ce qui conduit en utilisant l'Eq. (11) à

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} (e^{-ip \cdot x} - e^{ip \cdot x})_{p_0=\omega_p} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) (e^{-ip \cdot x} - e^{ip \cdot x}). \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $p \rightarrow -p$ dans l'intégrale de la seconde exponentielle, on a donc

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) (\theta(p_0) - \theta(-p_0)) e^{-ip \cdot x} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) \end{aligned}$$

avec $\epsilon(p_0) = \theta(p_0) - \theta(-p_0)$.

(iii) Montrer que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x) \right|_{x_0=0} = \delta^3(\vec{x}). \quad (15)$$

Solution

Deux méthodes:

- On écrit l'expression (14) sous la forme

$$G^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{-ip \cdot x} [\theta(p_0) - \theta(-p_0)] \delta(p^2 - m^2),$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x) \Big|_{x_0=0} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} [p_0 \theta(p_0) - p_0 \theta(-p_0)] \delta(p^2 - m^2),$$

Or d'après le calcul mené à la question 2,

$$\delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) = \frac{\delta(p_0 - \omega_p)}{2\omega_p} \quad \text{et} \quad \delta(p^2 - m^2) \theta(-p_0) = \frac{\delta(p_0 + \omega_p)}{2\omega_p},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x) \Big|_{x_0=0} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \left[\delta(p_0 - \omega_p) \frac{p_0}{2\omega_p} - \delta(p_0 + \omega_p) \frac{p_0}{2\omega_p} \right] e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} = \delta^3(\vec{x}). \end{aligned}$$

où l'on a intégré sur p_0 puis sur \vec{p} .

- On part de la définition de $G^{(-)}(x)$ et de $D(x)$, soit

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} (e^{-ip \cdot x} - e^{ip \cdot x})_{p_0=\omega_p} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} [e^{-i(\omega_p x_0 - \vec{x} \cdot \vec{p})} - e^{i(\omega_p x_0 - \vec{x} \cdot \vec{p})}]. \end{aligned}$$

On a alors immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x) \Big|_{x_0=0} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_p} [\omega_p e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \omega_p e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2} [e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}] = \delta^3(\vec{x}). \end{aligned}$$

(iv) Dans la limite $m^2 = 0$, montrer que

$$G^{(-)}(x) |_{m^2=0} = \frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 i} \left[\frac{1}{(x - i\eta)^2} - \frac{1}{(x + i\eta)^2} \right] \quad (16)$$

où η est un vecteur infinitésimal de genre temps avec $\eta_0 > 0$.

Solution

On sait (voir cours) que dans le cas où $m = 0$,

$$G_{av}^{ret}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x_0) \delta(x^2)$$

d'où l'on tire immédiatement

$$G^{(-)}(x) |_{m^2=0} = G_{ret}(x) - G_{av}(x) = \frac{1}{2\pi} [\theta(x_0) - \theta(-x_0)] \delta(x^2) = \frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2).$$

Par ailleurs, posons $\eta = (\eta_0, 0, 0, 0)$. On a

$$\frac{1}{(x - i\eta)^2} - \frac{1}{(x + i\eta)^2} \sim \frac{1}{x^2 - 2ix_0\eta_0} - \frac{1}{x^2 + 2ix_0\eta_0}.$$

Cette expression se simplifie de la façon suivante:

Si $x_0 > 0$, cette expression peut s'écrire, avec la notation habituelle $\epsilon \rightarrow 0^+$:

$$\frac{1}{(x - i\eta)^2} - \frac{1}{(x + i\eta)^2} \sim \frac{1}{x^2 - i\epsilon} - \frac{1}{x^2 + i\epsilon} = +2i\pi\delta(x^2).$$

Si $x_0 < 0$, cette expression peut cette fois s'écrire

$$\frac{1}{(x - i\eta)^2} - \frac{1}{(x + i\eta)^2} \sim \frac{1}{x^2 + i\epsilon} - \frac{1}{x^2 - i\epsilon} = -2i\pi\delta(x^2),$$

où l'on a utilisé

$$\frac{1}{x^2 \pm i\epsilon} = \text{PP} \frac{1}{x^2} \mp i\pi\delta(x^2).$$

Finalement, on a donc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 i} \left[\frac{1}{(x - i\eta)^2} - \frac{1}{(x + i\eta)^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2)$$

d'où le résultat attendu.

7. Fonction de Green $G^{(+)}$.

Montrer que

$$G^{(+)} \equiv \frac{1}{2} [G_{ret}(x) + G_{av}(x)] = -\frac{\text{PP}}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (17)$$

où la partie principale s'applique à l'intégrale sur p_0 .

On rappelle que

$$\frac{1}{p_0 - \omega_p \pm i\epsilon} = \text{PP} \frac{1}{p_0 - \omega_p} \mp i\pi\delta(p_0 - \omega_p). \quad (18)$$

où la distribution partie principale de Cauchy, notée PP, est définie pour toute fonction test $f(x)$ par la limite

$$\int \text{PP} \frac{1}{x} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{x} f(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x} f(x) dx \right]. \quad (19)$$

Partant de la définition de $G^{(+)}(x)$ et de $G_{ret}(x)$ et $G_{av}(x)$ on a

$$\begin{aligned}
G^{(+)}(x) &= \frac{1}{2}[G_{ret}(x) + G_{av}(x)] \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \left[\frac{1}{(p_0 + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} + \frac{1}{(p_0 - i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} \right] \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{2\omega_p} \left[\frac{1}{p_0 - \omega_p + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_p + i\epsilon} + \frac{1}{p_0 - \omega_p - i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_p - i\epsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{2\omega_p} \text{PP} \left[\frac{2}{p_0 - \omega_p} - \frac{2}{p_0 + \omega_p} \right] \\
&= -\frac{\text{PP}}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2}.
\end{aligned}$$

On notera que $G^{(+)}(-x) = G^{(+)}(x)$. Ceci se montre soit en utilisant l'expression précédente pour exprimer $G^{(+)}(-x)$ puis en effectuant le changement de variable $p \rightarrow -p$ qui ramène à $G^{(+)}(x)$, soit en partant de la définition (17) et en utilisant le fait que $G_{ret}(-x) = G_{av}(x)$, de sorte que la transformation $x \rightarrow -x$ échange les deux termes de la somme définissant $G^{(+)}(x)$, en laissant cette somme invariante.

8. Fonction de Green de Feynman.

Les fonctions de Green introduites précédemment apparaissent en théorie classique des champs. En théorie quantique des champs, la fonction de Green retardée apparaît dans l'expression

$$G_{ret}(x - y) = i\theta(x_0 - y_0) \langle 0 | [\Phi(x), \Phi(y)] | 0 \rangle. \quad (20)$$

où Φ est un champ bosonique.

Il est en fait plus naturel d'introduire une autre fonction de Green (introduite pour la première fois par Stueckelberg et Feynman), qui est complexe (contrairement au cas classique), définie par

$$G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (21)$$

(i) Simplifier cette expression en intégrant sur p_0 , et exprimer celle-ci l'aide de la fonction D .

La valeur de ϵ importe peu; seul le fait que $\epsilon \rightarrow 0^+$ est pertinent dans tous les raisonnements ci-dessous. Dans cette notation générique pour ϵ , on a donc, à l'ordre dominant en ϵ , et en confondant $2\omega_p\epsilon$ avec ϵ (ce qui est juste puisque $\omega_p > 0$),

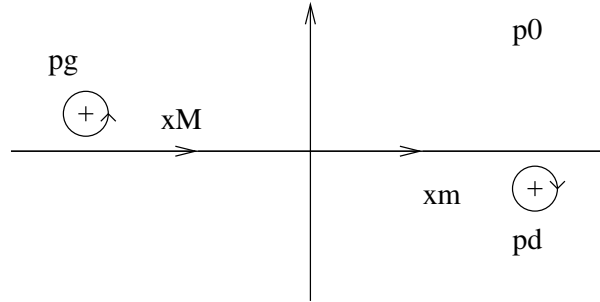
$$p^2 - m^2 + i\epsilon = p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon = (p_0 + \omega_p - i\epsilon)(p_0 - \omega_p + i\epsilon).$$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\omega_p} \frac{1}{p_0 - \omega_p + i\epsilon} - \frac{1}{2\omega_p} \frac{1}{p_0 + \omega_p - i\epsilon}$$

Considérons maintenant l'intégration sur p_0 .

Le contour d'intégration en p_0 suit initialement l'axe réel. L'intégrand possède deux pôles dans cette variable, en $p^0 = \omega_p - i\varepsilon$ et en $p^0 = -\omega_p + i\varepsilon$, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



A cause du facteur exponentiel, dans exactement le même esprit que celui de la question 1, on peut compléter ce chemin de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe réel de la façon suivante:

- pour $x_0 > 0$, un demi-cercle de centre 0, de rayon R asymptotiquement infini, dans le demi-plan $\text{Im } p_0 < 0$ (parcouru dans le sens indirect pour la suite du raisonnement), aura une contribution tendant vers 0 pour $R \rightarrow \infty$. L'intégration initiale est donc remplacée par un contour fermé qui entoure le pôle en $\omega_p - i\varepsilon$ dans le sens indirect. Par application immédiate du théorème de Cauchy, après utilisation du théorème des résidus pour l'intégration sur p_0 , le résultat sera donc $-2\pi i$ multiplié par le résidu en ce pôle. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, ce résidu vaut

$$\frac{1}{2\omega_p} e^{-i\omega_p x_0}.$$

- pour $x_0 < 0$, un demi-cercle de centre 0, de rayon R asymptotiquement infini, dans le demi-plan $\text{Im } p_0 > 0$ (parcouru dans le sens direct pour la suite du raisonnement), aura une contribution tendant vers 0 pour $R \rightarrow \infty$. L'intégration initiale est donc remplacée par un contour fermé qui entoure le pôle en $-\omega_p + i\varepsilon$ dans le sens direct. Cette fois, le résultat sera $-2\pi i$ multiplié par le résidu en ce pôle. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, ce résidu vaut

$$-\frac{1}{2\omega_p} e^{+i\omega_p x_0}.$$

Ces deux cas de figure et les deux déformations correspondantes des deux contours fermés autour de chacun des deux pôles sont illustrés par la figure ci-dessus.

En résumé, l'intégration sur p_0 conduit finalement à:

$$G_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} [\theta(x_0) e^{-i\omega_p x_0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \theta(-x_0) e^{i\omega_p x_0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}}].$$

Un changement de variable $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ dans l'intégration du second terme conduit finalement à

$$G_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} [\theta(x_0) e^{-i\omega_p x_0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \theta(-x_0) e^{i\omega_p x_0 - i\vec{p} \cdot \vec{x}}]$$

soit

$$G_F(x) = i\theta(x_0)D(x) + i\theta(-x_0)D(-x).$$

(ii) En suivant la même approche que dans la question 5, donner l'expression discrétisée de cette distribution.

Solution

On a ici

$$G_F(x - y) = i \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{\vec{p} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}} [\theta(x_0 - y_0) \varphi_{+, \vec{p}}(x) \varphi_{+, \vec{p}}^*(y) + \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \varphi_{-, \vec{p}}(x) \varphi_{-, \vec{p}}^*(y)].$$

(iii) Interpréter ce résultat, dans l'esprit particule/antiparticule, en lien avec l'équation de Klein-Gordon.

Solution

On constate sur l'expression précédente que les solutions d'énergie positive se propagent vers le futur, tandis que les solutions d'énergie négative se propagent vers le passé. On peut donc faire la distinction entre particule et antiparticule pour des particules chargées:

- les solutions d'énergie positive sont des particules, se propageant comme il se doit vers le futur
- les solutions d'énergie négative se propageant vers le passé sont en fait des antiparticules d'énergie positive de propageant vers le futur.

A noter que cette charge peut être la charge électrique (π^+ versus π^-), la charge d'étrangeté (K^0 versus \bar{K}^0), etc.

9. (i) Montrer que G_F ne s'annule pas à l'extérieur du cône de lumière. On calculera pour cela $G_F(x_0 = 0, r)$ avec $r = |\vec{x}|$, et on montrera que

$$G_F(0, r) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr}. \quad (22)$$

Solution

Considérons $G_F(0^+, r)$, et évaluons son expression. En notant $p = |\vec{p}|$ et en passant en coordonnées sphériques (p, θ, ϕ) , l'intégration sur l'angle ϕ est immédiate et l'on a

$$\begin{aligned} G_F(0^+, r) &= iD(0, r) = i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \int_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} d\cos\theta e^{ipr \cos\theta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{p dp}{2\sqrt{p^2 + m^2}} (e^{ipr} - e^{-ipr}) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr} \end{aligned}$$

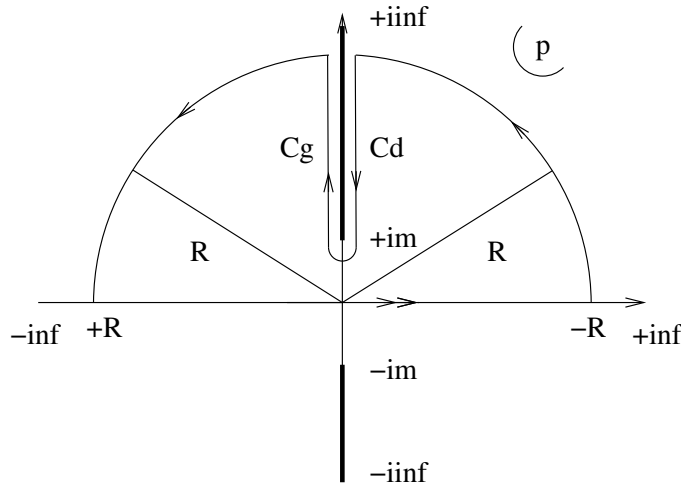
après changement de variable $p \rightarrow -p$ dans l'intégrale du second terme. Cette fonction n'est clairement pas nulle.

(ii) (*) Par un choix judicieux de contour dans le plan complexe, montrer que

$$G_F(0, r) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^{+\infty} \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - m^2}} e^{-pr}. \quad (23)$$

Solution

L'intégrand de l'intégrale du second membre de l'Eq. (22) n'a pas de pôle. Il possède deux coupure, l'un de $-i\infty$ à $-im$, l'autre de m à $+\infty$, indiquées par deux traits épais dans la figure ci-dessous. Considérons le contour fermé constitué du segment $[-R, R]$ (qui tend vers l'intégration initiale sur $] -\infty, +\infty[$ dans la limite $R \rightarrow \infty$), d'un quart de cercle de centre O et de rayon R dans le premier quadrant, parcouru dans le sens direct, d'un contour longeant la coupure $[+im, +i\infty[$ par la droite (contour C_d), parcouru de haut en bas, d'un petit demi-cercle contournant $+im$ par le bas, d'un contour longeant la coupure $[+im, +i\infty[$ par la gauche (contour C_g), parcouru de bas en haut, et finalement d'un quart de cercle de centre O et de rayon R dans le second quadrant, parcouru dans le sens direct, comme illustré dans cette même figure. Comme il n'y a aucun pôle dans son intérieur, l'intégrale correspondante le long de ce contour fermé est nulle d'après le théorème de Cauchy.



Par ailleurs, dans la limite $R \rightarrow \infty$, l'intégrale le long des deux quarts de cercle est nulle. Et l'intégrale le long du petit demi-cercle contournant $+im$ par le bas tend vers 0 lorsque le rayon de ce demi-cercle tend vers 0.

On peut donc écrire l'intégrale initiale comme l'opposé de l'intégrale longeant la coupure par la droite puis par la gauche:

$$G_F(0, r) = - [I_{C_d} + I_{C_g}] .$$

La somme de ces deux intégrales correspond à une intégrale de discontinuité le long de cette

coupure.

Intégrale le long de C_d , i.e. pour p variant de $+i\infty + \epsilon$ (le $+\epsilon$ indique que nous sommes à droite, i.e. $\text{Re } p > 0$): posons $p = ip' + \epsilon$. On a donc, en tenant compte du facteur $i^- = 1$ venant du changement de variable d'intégration,

$$\begin{aligned} I_{C_d} &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{+\infty}^m \frac{p' dp'}{\sqrt{(ip' + \epsilon)^2 + m^2}} e^{-p'r} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_m^{+\infty} \frac{p' dp'}{\sqrt{(ip' + \epsilon)^2 + m^2}} e^{-p'r}. \end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{(ip' + \epsilon)^2 + m^2} = \sqrt{m^2 - p'^2 + i\epsilon} = e^{i\pi/2} \sqrt{p'^2 - m^2}$$

puisque $z + i\epsilon$ avec $z < 0$ a pour argument $+\pi$, d'où $\sqrt{z + i\epsilon} = i\sqrt{-z}$. Ainsi, après passage à l'inverse dans l'intégrant

$$I_{C_d} = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} (-i) \int_m^{+\infty} \frac{p' dp'}{\sqrt{p'^2 - m^2}} e^{-p'r}.$$

De même,

$$I_{C_g} = -\frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_m^{+\infty} \frac{p' dp'}{\sqrt{(ip' - \epsilon)^2 + m^2}} e^{-p'r}.$$

Or

$$\sqrt{(ip' - \epsilon)^2 + m^2} = \sqrt{m^2 - p'^2 - i\epsilon} = e^{-i\pi/2} \sqrt{p'^2 - m^2}$$

puisque $z - i\epsilon$ avec $z < 0$ a pour argument $-\pi$, d'où $\sqrt{z - i\epsilon} = -i\sqrt{-z}$. Ainsi

$$I_{C_g} = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} (-i) \int_m^{+\infty} \frac{p' dp'}{\sqrt{p'^2 - m^2}} e^{-p'r} = I_{C_d}.$$

En conclusion (afin d'alléger la notation on remplace p' par p),

$$G_F(0, r) = -2 I_{C_g} = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^{+\infty} \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - m^2}} e^{-pr}.$$

(iii) En déduire que

$$G_F(0, r) \sim \frac{ie^{-mr}}{(2\pi)^2 r^2} \left(\frac{\pi mr}{2}\right)^{1/2} \quad \text{pour } r \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Solution

Lorsque r est asymptotiquement large, à cause du facteur exponentiel l'intégrale est dominée par la région où r est minimal, donc par la région $p \sim m$. Dans cette région, on a

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 - m^2}} \underset{p \sim m}{\sim} \frac{1}{\sqrt{p - m}} \sqrt{\frac{m}{2}}$$

Posons $X = \sqrt{p - m}$ et donc $2X dX = dp$. Le développement asymptotique de l'intégrale précédente s'obtient en remplaçant l'intégrand par le développement précédent, soit

$$\begin{aligned} G_F(0, r) &= \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^{+\infty} \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - m^2}} e^{-pr} \sim \frac{i}{(2\pi)^2 r^2} \sqrt{\frac{m}{2}} 2 \int_0^\infty dX e^{-rX^2} e^{-mr} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 r} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{r}} e^{-mr} \end{aligned}$$

d'où

$$G_F(0, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{ie^{-mr}}{(2\pi)^2 r^2} \sqrt{\frac{\pi m r}{2}}.$$

2 Fonction de Green et jauge covariante

1. Question préliminaire. Pour toute impulsion p (supposée ne pas être de genre lumière), on introduit les opérateurs T et L définis par

$$L_{\mu\nu} = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (25)$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad (26)$$

Quelles sont leurs propriétés algébriques? On étudiera en particulier L^2 , T^2 , LT , TL et $L+T$. Quelles sont leur action sur p ? En déduire leur nature. Caractériser le noyau de ces deux opérateurs.

Solution

Ces deux opérateurs sont des projecteurs, puisque $L^2 = L$ et $T^2 = T$. En effet

$$L_{\mu\rho} L^\rho{}_\nu = \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \frac{p^\rho p_\nu}{p^2} = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} = L_{\mu\nu}$$

et

$$T_{\mu\rho} T^\rho{}_\nu = \left(g_{\mu\rho} - \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \right) \left(g^\rho{}_\nu - \frac{p^\rho p_\nu}{p^2} \right) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + p^2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 p^2} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} = T_{\mu\nu}.$$

Leur somme est égale à l'identité, puisque

$$L_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Enfin, ils sont orthogonaux entre eux, en effet

$$T_{\mu\rho}L^\rho{}_\nu = \left(g_{\mu\rho} - \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \right) \frac{p^\rho p_\nu}{p^2} = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - p^2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 p^2} = 0,$$

et de même

$$L_{\mu\rho}T^\rho{}_\nu = \frac{p_\mu p_\rho}{p^2} \left(g^\rho{}_\nu - \frac{p^\rho p_\nu}{p^2} \right) = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - p^2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 p^2} = 0.$$

Finalement, on a

$$L^\mu{}_\nu p^\nu = p^\mu$$

et

$$T^\mu{}_\nu p^\nu = 0.$$

Le projecteur T projette sur l'hyperplan orthogonal à p , et L projette sur la droite vectorielle engendrée par p . Le noyau de T est donc la droite vectorielle engendrée par p , et le noyau de L est l'hyperplan orthogonal à p .

Dans le cas de l'électromagnétisme, l'équation de Maxwell satisfaite par le potentiel vecteur s'écrit

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial \cdot A) = j^\mu \quad (27)$$

2. Montrer qu'elle ne suffit pas à elle seule à déterminer A^μ en fonction de j^μ . Montrer en particulier que si l'on tente de construire la fonction de Green correspondante, l'on est amené (dans l'espace de Fourier) à inverser l'opérateur T , et conclure.

Solution

Par transformée de Fourier on a

$$-p^2 A^\mu + p^\mu p_\nu A^\nu = \tilde{j}^\mu$$

soit

$$-p^2 \left[g^\mu{}_\nu - \frac{p^\mu p_\nu}{p^2} \right] A^\nu = \tilde{j}^\mu.$$

i.e.

$$-p^2 T^\mu{}_\nu A^\nu = \tilde{j}^\mu.$$

Or le noyau de T est la droite vectorielle portée par p . Il n'est donc pas inversible. On ne peut donc déterminer la fonction de Green.

Pour résoudre ce problème, on est amené à donner une masse au photon ou alors à ajouter un terme de fixation de jauge dans le lagrangien. Dans la jauge covariante de Lorentz, on ajoute donc au lagrangien le terme

$$\mathcal{L}_{jauge} = \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2, \quad (28)$$

de sorte que le lagrangien complet s'écrit

$$\mathcal{L}_{e.m} = -\frac{1}{4}F^2 - j \cdot A + \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2, \quad (29)$$

3. Ecrire les équations du mouvement du lagrangien correspondant.

Solution

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{e.m}}{\delta A_\nu} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{e.m}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = 0.$$

On a

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{e.m}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -F^{\mu\nu} + \lambda(\partial \cdot A)g^{\mu\nu}$$

et

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{e.m}}{\delta A_\nu} = -j^\nu$$

d'où

$$\partial^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial \cdot A) - j^\nu - \lambda \partial^\nu(\partial \cdot A) = 0$$

et donc finalement

$$[\square g_\nu^\mu - (1 + \lambda)\partial^\mu \partial_\nu] A^\nu = j^\nu.$$

4. On pose

$$M_{\mu\nu} = p^2 g_{\mu\nu} - (1 + \lambda)p_\mu p_\nu. \quad (30)$$

En utilisant les deux opérateurs L et T , et en calculant l'opérateur inverse de M , montrer que la fonction de Green, correspondant à l'équation du mouvement obtenue à la question 2 peut s'écrire sous la forme, en utilisant la prescription de Feynman (21),

$$G_{F\mu\nu}(x - y, \lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1 + \lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (31)$$

Solution

L'équation du mouvement s'écrit, après transformée de Fourier,

$$M_{\mu\nu} \tilde{G}_F^\nu = -g_{\mu\rho},$$

avec

$$M_{\mu\nu} = p^2 [(L + T)_{\mu\nu} - (1 + \lambda)L_{\mu\nu}] = p^2 [-\lambda L_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}].$$

En utilisant la prescription de Feynman, on a donc

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{\mu\nu} &= \left[-\frac{1}{\lambda} L_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \right] \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \\ &= \left[g_{\mu\nu} - \frac{1 + \lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{1}{p^2 + i\epsilon}, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$G_{F\mu\nu}(x - y, \lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1 + \lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right).$$

5. Discuter les limites $\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow \infty$. Dans ce deuxième cas, relier les propriétés du propagateur obtenu à la forme du lagrangien.

Solution

Cas $\lambda \rightarrow 0$: le propagateur n'est pas défini, on retombe sur le problème initial.

Cas $\lambda \rightarrow \infty$: le propagateur devient

$$G_{F\mu\nu}(x - y, \infty) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right).$$

Dans ce cas, le propagateur est automatiquement orthogonal à p^μ . Ceci est attendu puisque dans le lagrangien, le terme de fixation de jauge est alors multiplié par un facteur infini, ce qui impose que la jauge de Lorenz soit satisfaite.

3 Bremsstrahlung classique

On souhaite étudier le rayonnement d'une charge brutalement accélérée. On note $u_i = p_i/m$ et $u_f = p_f/m$ les quadri-vitesses initiale et finale de la particule chargée. En choisissant l'origine des coordonnées d'espace-temps au point où la particule est accélérée, sa trajectoire prend la forme

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{p_i}{m} \tau & \tau < 0 \\ \frac{p_f}{m} \tau & \tau > 0 \end{cases} \quad (32)$$

3.1 Calcul de l'énergie émise

1. (i) Montrer que le courant s'écrit, en représentation de Fourier

$$j^\mu(x) = \frac{-ie}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \left[\frac{p_i^\mu}{p_i \cdot k - i\epsilon} - \frac{p_f^\mu}{p_f \cdot k + i\epsilon} \right], \quad (33)$$

après utilisation d'une régularisation appropriée ($\tau \rightarrow \tau(1 - i \operatorname{sgn}(p_i \cdot k)\epsilon)$ pour $\tau < 0$ et $\tau \rightarrow \tau(1 + i \operatorname{sgn}(p_f \cdot k)\epsilon)$ pour $\tau > 0$, avec $\epsilon \rightarrow 0^+$).

Solution

Partons de

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{dx_\mu}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau)) \\ &= e \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{dx_\mu}{d\tau} \delta^4\left(x - \frac{p_i}{m}\tau\right) + e \int_0^{+\infty} d\tau \frac{dx_\mu}{d\tau} \delta^4\left(x - \frac{p_f}{m}\tau\right) \\ &= e \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{p_i^\mu}{m} \delta^4\left(x - \frac{p_i}{m}\tau\right) + e \int_0^{+\infty} d\tau \frac{p_f^\mu}{m} \delta^4\left(x - \frac{p_f}{m}\tau\right). \end{aligned}$$

En utilisant la représentation de Fourier de la distribution de Dirac, et en introduisant les régularisations $\tau \rightarrow \tau(1 - i \operatorname{sgn}(p_i \cdot k)\epsilon)$ pour $\tau < 0$ et $\tau \rightarrow \tau(1 + i \operatorname{sgn}(p_f \cdot k)\epsilon)$ pour $\tau > 0$, de façon à assurer la convergence respectivement en $\tau \rightarrow -\infty$ et $\tau \rightarrow +\infty$, on a donc

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{p_i^\mu}{m} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-ik \cdot \left(x - \frac{p_i}{m}\tau(1 - i \operatorname{sgn}(p_i \cdot k)\epsilon)\right)} + \frac{p_f^\mu}{m} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-ik \cdot \left(x - \frac{p_f}{m}\tau(1 + i \operatorname{sgn}(p_f \cdot k)\epsilon)\right)} \right] \\ &= e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \left[\frac{p_i^\mu}{m} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\tau(ik \cdot \frac{p_i}{m} + \epsilon)} + \frac{p_f^\mu}{m} \int_0^{+\infty} d\tau e^{\tau(ik \cdot \frac{p_f}{m} - \epsilon)} \right] \\ &= -ie \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \left[\frac{p_i^\mu}{p_i \cdot k - i\epsilon} - \frac{p_f^\mu}{p_f \cdot k + i\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

(ii) Discuter la conservation de ce courant.

Solution

La conservation de ce courant est immédiate dans l'espace de Fourier: en effet, on a de façon évidente

$$k \cdot \tilde{j}(k) = 0.$$

(iii) Comparer $\tilde{j}(k)$, $\tilde{j}(-k)$ et $\tilde{j}^*(k)$.

Solution

On a

$$\tilde{j}(k) = -ie \left[\frac{p_i^\mu}{p_i \cdot k - i\epsilon} - \frac{p_f^\mu}{p_f \cdot k + i\epsilon} \right]$$

donc

$$\tilde{j}(-k) = -ie \left[-\frac{p_i^\mu}{p_i \cdot k + i\epsilon} + \frac{p_f^\mu}{p_f \cdot k - i\epsilon} \right] = \tilde{j}^*(k)$$

2. Pour $t \rightarrow -\infty$, comme la conservation du courant interdit son annulation, on va exiger que le champ électromagnétique se réduise au champ de Coulomb de la particule incidente. On décompose donc le champ A^μ en la somme d'un champ de radiation (solution de l'équation de Maxwell homogène) et d'un champ de Coulomb accompagnant la particule. En utilisant la partie 1, donner l'expression des deux champs correspondants en fonction de $G^{(-)}$, G_{av} et j^μ . En particulier, montrer que

$$A_{rad}^\mu(x) = \int d^4x' G^{(-)}(x - x') j^\mu(x'). \quad (34)$$

Solution

On peut écrire

$$G_{ret}(x - x') = G^{(-)}(x - x') + G_{av}(x - x')$$

où $G^{(-)}$ est solution de l'équation de Maxwell homogène et G_{av} est solution de l'équation de Maxwell complète. Convoluée avec le courant, la première conduit à la partie radiative du champ A^μ tandis que la seconde s'interprète comme la partie coulombienne accompagnant la source.

3. En utilisant la forme explicite (14) de $G^{(-)}$, calculer $F_{rad}^{\mu\nu}(x)$ en fonction de $\tilde{j}(k)$.

Solution

On a

$$\begin{aligned} F_{rad}^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A_{rad}^\nu - \partial^\nu A_{rad}^\mu \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \epsilon(k_0) \delta(k^2) (-ik^\mu \tilde{j}^\nu(k) + ik^\nu \tilde{j}^\mu(k)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \epsilon(k_0) \delta(k^2) (k^\mu \tilde{j}^\nu(k) - k^\nu \tilde{j}^\mu(k)). \end{aligned}$$

4. On rappelle que le tenseur d'énergie-impulsion de Belinfante $\Theta_{rad}^{\mu\nu}$ du champ $A_{rad}^\mu(x)$ s'écrit

$$\Theta_{rad}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{rad}^2 + F_{rad}^{\mu\rho} F_{rad\rho}{}^\nu. \quad (35)$$

Pour un vecteur de genre lumière $k^0 = |\vec{k}|$, on définit deux vecteurs polarisation orthogonaux de genre espace qui vérifient

$$\epsilon_\lambda^2 = -1 \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0 \quad \epsilon_\lambda \cdot k = 0. \quad (36)$$

On souhaite montrer que l'énergie émise à un instant $t > 0$ s'écrit

$$\mathcal{E} = \int d^3x \Theta^{00}(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2. \quad (37)$$

(i) Montrer que \mathcal{E} peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x \int d^4k d^4k' e^{-i(k+k')\cdot x} \epsilon(k_0) \epsilon(k'_0) \delta(k^2) \delta(k'^2) T(k, k') \quad (38)$$

où

$$\begin{aligned} T(k, k') &= \frac{1}{2} [(k \cdot k') (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(k')) - (k \cdot \tilde{j}(k')) (k' \cdot \tilde{j}(k))] \\ &- k_0 k'_0 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(k')) + k_0 \tilde{j}_0(k') (k' \cdot \tilde{j}(k)) + k'_0 \tilde{j}_0(k) (k \cdot \tilde{j}(k')) - (k \cdot k') \tilde{j}_0(k) \tilde{j}_0(k'). \end{aligned} \quad (39)$$

Solution

D'après la question précédente et la définition de Θ^{00} , on a

$$\begin{aligned} T(k, k') &= \frac{1}{4} (k^\mu \tilde{j}^\nu(k) - k^\nu \tilde{j}^\mu(k)) (k'_\mu \tilde{j}_\nu(k') - k'_\nu \tilde{j}_\mu(k')) \\ &+ (k^0 \tilde{j}^\rho(k) - k^\rho \tilde{j}^0(k)) (k'_\rho \tilde{j}^0(k') - k'^0 \tilde{j}_\rho(k')) \\ &= \frac{1}{2} [(k \cdot k') (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(k')) - (k \cdot \tilde{j}(k')) (k' \cdot \tilde{j}(k))] \\ &- k_0 k'_0 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(k')) + k_0 \tilde{j}_0(k') (k' \cdot \tilde{j}(k)) + k'_0 \tilde{j}_0(k) (k \cdot \tilde{j}(k')) - (k \cdot k') \tilde{j}_0(k) \tilde{j}_0(k'). \end{aligned}$$

(ii) Pour tout $k = (k_0, \vec{k})$ de genre lumière donné, on pose $\tilde{k} = (k_0, -\vec{k})$. Montrer que $T(k, \tilde{k}) = 0$.

Solution

On a

$$\begin{aligned} T(k, \tilde{k}) &= \frac{1}{2} [(k \cdot \tilde{k}) (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(\tilde{k})) - (k \cdot \tilde{j}(\tilde{k})) (\tilde{k} \cdot \tilde{j}(k))] \\ &- k_0^2 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(\tilde{k})) + k_0 \tilde{j}_0(\tilde{k}) (\tilde{k} \cdot \tilde{j}(k)) + k_0 \tilde{j}_0(k) (k \cdot \tilde{j}(\tilde{k})) - (k \cdot \tilde{k}) \tilde{j}_0(k) \tilde{j}_0(\tilde{k}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\tilde{k} = -k + 2k_0(1, \vec{0})$. Donc, puisque $k^2 = 0$, et en utilisant la conservation du courant,

$$\begin{aligned} k \cdot \tilde{k} &= k \cdot (-k + 2k_0(1, \vec{0})) = 2k_0^2 \\ \tilde{k} \cdot \tilde{j}(k) &= (-k + 2k_0(1, \vec{0})) \cdot \tilde{j}(k) = 2k_0 \tilde{j}_0(k) \\ k \cdot \tilde{j}(\tilde{k}) &= (-\tilde{k} + 2k_0(1, \vec{0})) \cdot \tilde{j}(\tilde{k}) = 2k_0 \tilde{j}_0(\tilde{k}). \end{aligned}$$

Ceci conduit alors à

$$\begin{aligned} T(k, \tilde{k}) &= k_0^2 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(\tilde{k})) - 2k_0^2 \tilde{j}_0(k) \tilde{j}_0(\tilde{k}) - k_0^2 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(\tilde{k})) \\ &+ 2k_0^2 \tilde{j}_0(\tilde{k}) \tilde{j}_0(k) + 2k_0^2 \tilde{j}_0(k) \tilde{j}_0(\tilde{k}) - 2k_0^2 \tilde{j}_0(k) \tilde{j}_0(\tilde{k}) = 0. \end{aligned}$$

(iii) (**) Mener alors à bien le calcul conduisant à l'Eq. (37): après intégration sur x , il sera utile d'utiliser la relation

$$\epsilon(k_0) \delta(k^2) = \frac{1}{2k_0} \delta(|\vec{k}| - k_0) + \frac{1}{2k_0} \delta(|\vec{k}| + k_0) \quad (40)$$

(que l'on justifiera), ainsi que la conservation du courant, et de décomposer ce courant $\tilde{j}(k)$ dans la base bidimensionnelle ϵ_λ , cf Eq. (36).

Solution

L'intégration sur x est immédiate en utilisant

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i(k+k') \cdot x} = \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-i(k_0+k'_0)x_0}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x \int d^4k d^4k' e^{-i(k+k') \cdot x} \epsilon(k_0) \epsilon(k'_0) \delta(k^2) \delta(k'^2) T(k, k') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0 dk'_0}{4k_0 k'_0} d^3k d^3k' e^{-i(k_0+k'_0)x_0} \left(\delta(|\vec{k}| - k_0) + \delta(|\vec{k}| + k_0) \right) \\ &\times \left(\delta(|\vec{k}'| - k'_0) + \delta(|\vec{k}'| + k'_0) \right) \delta(\vec{k} + \vec{k}') T(k, k'). \end{aligned}$$

Considérons les 4 termes qui apparaissent:

- terme $\delta(|\vec{k}| + k_0) \delta(|\vec{k}'| - k'_0) \delta(\vec{k} + \vec{k}')$: on obtient $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k'_0 = -k_0$, soit: $k' = -k$ avec $k_0 = -|\vec{k}|$.

Or par conservation du courant, $k \cdot \tilde{j}^\mu(k) = 0$ donc ici, puisque $k' = -k$ et $k^2 = 0$, le seul terme non nul est $-k_0 k'_0 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(k')) = k_0^2 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}(-k)) = k_0^2 (\tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}^*(k))$. Or $k \cdot \tilde{j}(k) = 0$ donc $\tilde{j}(k)$ peut se décomposer sur $(k, \epsilon_1, \epsilon_2)$.

On a donc

$$\begin{aligned} T(k, -k) = k_0^2 \tilde{j}(k) \cdot \tilde{j}^*(k) &= k_0^2 \left[\sum_{\lambda} (\tilde{j}(k) \cdot \epsilon_{\lambda}) \epsilon_{\lambda} \right] \cdot \left[\sum_{\lambda'} (\tilde{j}(k) \cdot \epsilon_{\lambda'}) \epsilon_{\lambda'} \right]^* \\ &= -k_0^2 \sum_{\lambda} |\tilde{j}(k) \cdot \epsilon_{\lambda}|^2 \end{aligned}$$

puisque $\epsilon_{\lambda} \cdot \epsilon_{\lambda'} = -\delta_{\lambda\lambda'}$.

- terme $\delta(|\vec{k}| - k_0)\delta(|\vec{k}'| + k'_0)\delta(\vec{k} + \vec{k}')$: la contribution est la même que celle ci-dessus. En effet on a alors $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = -k'_0 = k_0$, soit $k' = -k$ avec $k_0 = |\vec{k}|$.
- terme $\delta(|\vec{k}| + k_0)\delta(|\vec{k}'| + k'_0)\delta(\vec{k} + \vec{k}')$: on a alors $\vec{k}' = -\vec{k}$ et $k_0 = k'_0 = -|\vec{k}| = -|\vec{k}'|$ soit $k' = \tilde{k}$ avec $k_0 = -|\vec{k}|$. Or $T(k, \tilde{k}) = 0$, donc la contribution de ce terme est nulle.
- terme $\delta(|\vec{k}| - k_0)\delta(|\vec{k}'| - k'_0)\delta(\vec{k} + \vec{k}')$: on a alors $\vec{k}' = -\vec{k}$ et $k_0 = k'_0 = |\vec{k}| = |\vec{k}'|$ soit $k' = \tilde{k}$ avec $k_0 = |\vec{k}|$. A nouveau, comme $T(k, \tilde{k}) = 0$, la contribution de ce terme est donc nulle.

En conclusion, les deux contributions identiques conduisent à

$$\mathcal{E} = 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \int d^3k \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2$$

où l'on a tenu compte du signe (-) venant de $k'_0 = -k_0$. En vue de l'interprétation physique du résultat, on peut l'écrire sous la forme attendue

$$\mathcal{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2.$$

5. (i) Quel est le nombre dN de photons de polarisation ϵ et d'énergie k_0 émis par élément d'espace de phase?

Solution

On a

$$dN = \frac{d\mathcal{E}}{k_0}.$$

(ii) Dédurre des résultats précédents que l'énergie totale est finie tandis que le nombre total de photon ne l'est pas. Ce phénomène porte le nom de catastrophe infrarouge. Justifier cette appellation.

Solution

On a

$$d\mathcal{E} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2 \sim dk_0 \text{ pour } k_0 \rightarrow 0,$$

qui est donc fini à basse énergie. En revanche,

$$dN = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2 \sim \frac{dk_0}{k_0} \text{ pour } k_0 \rightarrow 0,$$

qui diverge donc logarithmiquement dans le secteur infrarouge.

3.2 Distribution angulaire et calcul du nombre de photons émis

6. On introduit les vitesses \vec{v}_i et \vec{v}_f des particules incidentes et sortantes, et l'on note $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ la direction du photon émis.

(i) Montrer que

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3k}{|\vec{k}|^2} \left[\frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} - \frac{m^2}{E_i^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)^2} - \frac{m^2}{E_f^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)^2} \right]. \quad (41)$$

Solution

On a

$$d\mathcal{E} = \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2 = \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} |\tilde{j}(k)|^2.$$

Or

$$\tilde{j}^\mu(k) = -ie \left[\frac{p_i^\mu}{p_i \cdot k - i\epsilon} - \frac{p_f^\mu}{p_f \cdot k + i\epsilon} \right],$$

donc (en faisant $\epsilon = 0$, le régulateur ne jouant pas de rôle dans ce qui suit)

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda \cdot \tilde{j}(k)|^2 = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} d^3k \left[\frac{p_i}{p_i \cdot k} - \frac{p_f}{p_f \cdot k} \right]^2 \\ &= \frac{e^2}{2(2\pi)^3} d^3k \left[2 \frac{p_i \cdot p_f}{(p_i \cdot k)(p_f \cdot k)} - \frac{m^2}{(p_i \cdot k)^2} - \frac{m^2}{(p_f \cdot k)^2} \right] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $p_i^2 = p_f^2 = m^2$. Par ailleurs, en utilisant la relation $\vec{p}/E = \vec{v}$, on a

$$\begin{aligned} p_i \cdot p_f &= E_i E_f - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f = E_i E_f (1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f), \\ k \cdot p_i &= |\vec{k}| E_i - \vec{k} \cdot \vec{p}_i = E_i |\vec{k}| (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i), \\ k \cdot p_f &= |\vec{k}| E_f - \vec{k} \cdot \vec{p}_f = E_f |\vec{k}| (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f), \end{aligned}$$

d'où

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3k}{|\vec{k}|^2} \left[\frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} - \frac{m^2}{E_i^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)^2} - \frac{m^2}{E_f^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)^2} \right].$$

(ii) Caractériser la distribution angulaire de la radiation.

Solution

D'après l'expression précédente, elle est piquée dans les directions de \vec{v}_i et de \vec{v}_f , donc des particules incidentes et sortantes.

7. Le processus de diffusion est caractérisé par une section efficace $d\sigma_{diff}$, dont la forme explicite ne joue aucun rôle ici. La section efficace totale $d\sigma_{Brems}$ inclut l'émission additionnelle de photons.

On souhaite donc maintenant évaluer le nombre total de photons émis afin d'obtenir le facteur correctif permettant de passer de $d\sigma_{diff}$ à $d\sigma_{Brems}$. On va ainsi intégrer ce nombre de photon d'une valeur k_{min} (pour échapper à la catastrophe infrarouge; elle correspond en pratique à la résolution du détecteur) à une valeur maximale k_{max} .

Dans la suite, nous allons donc étudier en détail

$$N = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk_0}{k_0} \int d^2\vec{n} \left[\frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} - \frac{m^2}{E_i^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)^2} - \frac{m^2}{E_f^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)^2} \right]. \quad (42)$$

(i) Justifier cette expression. Pourquoi introduire une coupure k_{max} ? On pourra donner à la fois une explication technique et une explication physique liée au modèle considéré.

Solution

L'expression de dN est immédiate en combinant l'expression (41) avec le fait que $dN = d\mathcal{E}/|\vec{k}|$. Finalement, en écrivant $\vec{k} = |\vec{k}|\vec{n}$ avec $|\vec{k}| = k_0$, et $d^3\vec{k} = k^2 dk d^2\vec{n}$, le résultat est immédiat.

L'intégrale sur k_0 est en dk_0/k_0 donc diverge dans l'UV. Ceci vient du fait que l'accélération est instantanée, ce qui crée une singularité irréaliste à courte distance, donc dans l'UV par conjuguée de Fourier.

Afin de pouvoir intégrer sur l'angle solide $d^2\vec{n}$, on introduit la représentation intégrale de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2}. \quad (43)$$

(ii) En déduire que

$$\int d^2\vec{n} \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = 2\pi \int_0^1 dx \frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{1 - [x\vec{v}_i + (1-x)\vec{v}_f]^2}. \quad (44)$$

Solution

On a

$$\begin{aligned}
& \int d^2\vec{n} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = \int_0^1 dx \int d^2\vec{n} \frac{1}{[x(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i) + (1 - x)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)]^2} \\
&= \int_0^1 dx \int d^2\vec{n} \frac{1}{[1 - \vec{n} \cdot (x\vec{v}_i + (1 - x)\vec{v}_f)]^2} \\
&= \int_0^1 dx \int_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{[1 - |x\vec{v}_i + (1 - x)\vec{v}_f| \cos\theta]^2} \\
&= \int_0^1 dx \frac{2\pi}{|x\vec{v}_i + (1 - x)\vec{v}_f|} \left[\frac{1}{1 - |x\vec{v}_i + (1 - x)\vec{v}_f| \cos\theta} \right]_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} \\
&= \int_0^1 dx \frac{4\pi}{1 - |x\vec{v}_i + (1 - x)\vec{v}_f|^2},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(iii) Montrer que

$$\int d^2\vec{n} \frac{m^2}{E^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} = 4\pi. \quad (45)$$

Solution

On a, en utilisant la paramétrisation de Feynman,

$$\begin{aligned}
\int d^2\vec{n} \frac{m^2}{E^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} &= \frac{m^2 2\pi}{E^2 |\vec{v}|} \left[\frac{1}{1 - |\vec{v}| \cos\theta} \right]_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} \\
&= \frac{m^2 4\pi}{E^2 |\vec{v}|} \frac{1}{1 - |\vec{v}|^2}.
\end{aligned}$$

Or $E = m\gamma = m/\sqrt{1 - |\vec{v}|^2}$ d'où finalement

$$\int d^2\vec{n} \frac{m^2}{E^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} = 4\pi.$$

Nous allons à présent mener le calcul dans deux limites extrêmes. On note θ l'angle de diffusion.

8. On considère la limite non relativiste $v \ll 1$.

(i) Montrer que

$$\int d^2\vec{n} \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = 4\pi \left(1 + \frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(v^4). \quad (46)$$

Dans la limite non relativiste $v \ll 1$, on a, en faisant $|\vec{v}_i| \sim |\vec{v}_f| \sim v \ll 1$,

$$(x\vec{v}_i + (1-x)\vec{v}_f)^2 = v^2(x^2 + (1-x)^2 + 2x(1-x)\cos\theta) + \mathcal{O}(v^4)$$

et d'autre part,

$$1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f = 1 - v^2 \cos\theta + \mathcal{O}(v^4)$$

donc

$$\begin{aligned} & \int d^2\vec{n} \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = 2\pi \int_0^1 dx \frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{1 - [x\vec{v}_i + (1-x)\vec{v}_f]^2} \\ &= 4\pi [1 - v^2 \cos\theta + \mathcal{O}(v^4)] \int_0^1 dx [1 + v^2(x^2 + (1-x)^2 + 2x(1-x)\cos\theta) + \mathcal{O}(v^4)] \\ &= 4\pi [1 - v^2 \cos\theta + \mathcal{O}(v^4)] \left[1 + v^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos\theta \right) + \mathcal{O}(v^4) \right] \\ &= 4\pi \left[1 + v^2 \frac{2}{3} (1 - \cos\theta) + \mathcal{O}(v^4) \right] \\ &= 4\pi \left[1 + \frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(v^4) \right]. \end{aligned}$$

(ii) En déduire finalement que dans cette limite non relativiste,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{Brems} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{diff} \left(\ln \frac{k_{max}}{k_{min}} \right) \frac{8\alpha}{3\pi} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (47)$$

On a maintenant, d'après l'Eq. (42) et l'Eq. (45),

$$\begin{aligned} N &= \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk_0}{k_0} \left[2 \times 4\pi \left(1 + \frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(v^4) \right) - 2 \times 4\pi \right] \\ &= \frac{e^2}{2\pi^2} \ln \frac{k_{max}}{k_{min}} \left[\frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(v^4) \right] \\ &= \left(\ln \frac{k_{max}}{k_{min}} \right) \frac{2\alpha}{\pi} \frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} [1 + \mathcal{O}(v^2)], \end{aligned}$$

d'où le résultat.

9. Considérons à présent le cas ultra-relativiste. On introduit le transfert d'impulsion $q = p_f - p_i$.

(i) Justifier le fait que

$$q^2 \simeq -4E^2 \sin^2 \theta / 2 \quad (48)$$

dans la limite ultra-relativiste où $E_i \sim E_f = E$.

On a

$$p_i \cdot p_f = E_i E_f - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f \sim E^2(1 - \cos \theta) = 2E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

et donc

$$q^2 = (p_f - p_i)^2 = 2m^2 - 2p_i \cdot p_f \sim -4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

(ii) (*) Montrer que dans la limite ultra-relativiste $q^2 \gg m^2$,

$$\int d^2 \vec{n} \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} = 4\pi \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m^2}{q^2} \right). \quad (49)$$

Nous avons, dans la limite où $v_i \sim v_f \sim 1$, et puisque $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_f = v_i v_f \cos \theta$,

$$\begin{aligned} 1 - [x\vec{v}_i + (1-x)\vec{v}_f]^2 &= 1 - x^2 v_i^2 - (1-x)^2 v_f^2 - 2x(1-x)\vec{v}_i \cdot \vec{v}_f \\ &\sim 1 - x^2 - (1-x)^2 - 2x(1-x) \cos \theta \\ &\sim 2x(1-x)(1 - \cos \theta) \\ &\sim x(1-x) \frac{-q^2}{E^2} \end{aligned}$$

pour x non paramétriquement proche de 0 ou 1. Nous obtenons donc deux singularités logarithmiques en $1/x$ (pour $x \rightarrow 0$) et en $1/(1-x)$ (pour $x \rightarrow 1$). Notre approximation doit être améliorée dans ces deux régions.

Si $x \rightarrow 1$, on a alors

$$1 - [x\vec{v}_i + (1-x)\vec{v}_f]^2 \sim 1 - v_i^2$$

avec

$$p_i^2 = m^2 = E_i^2 - \vec{p}_i^2 = E_i^2(1 - v_i^2)$$

et donc

$$1 - v_i^2 \sim \frac{m^2}{E_i^2} \sim \frac{m^2}{E^2}.$$

Même résultat dans la limite $x \rightarrow 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int d^2 \vec{n} \frac{1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_i)(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_f)} &= 2\pi \int_0^1 dx \frac{2(1 - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f)}{1 - [x\vec{v}_i + (1-x)\vec{v}_f]^2} \\ &\sim 4\pi \frac{-q^2}{2E^2} \int_0^1 dx \frac{1}{\frac{m^2}{E^2} + x(1-x) \frac{-q^2}{E^2}} \\ &\sim 2\pi \int_{\frac{m^2}{-q^2}}^{1 - \frac{m^2}{-q^2}} \frac{dx}{x(1-x)} \\ &\sim 4\pi \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

(iii) En déduire finalement que dans cette limite,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{Brems} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{diff} \left(\ln \frac{k_{max}}{k_{min}}\right) \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) - 1\right]. \quad (50)$$

Solution

Finalement, partant de l'Eq. (42) et en utilisant les résultats (49) et (45), on obtient

$$\begin{aligned} N &= \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk_0}{k_0} \left[2 \times 4\pi \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) - 2 \times 4\pi\right] \\ &= \left(\ln \frac{k_{max}}{k_{min}}\right) \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) - 1\right], \end{aligned}$$

d'où le résultat.

FIN !