**M1 de Physique et Magistère de Physique Fondamentale 2024-2025**

*Electrodynamique Classique et Quantique*

**Examen**

17 janvier 2025

Documents autorisés

*Notes:*
- Le sujet est **délibérément très long**. Il n'est donc absolument pas nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note !

- Les 3 parties sont indépendantes.

- On pourra utiliser un système d'unités dans lequel $c = 1$, $\hbar = 1$, $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$.

- Les coordonnées pourront être librement notées $(x, y, z)$ ou $(x^1, x^2, x^3)$.

- Tout dessin est très bienvenu !

# 1 Exercice: invariants relativistes

Soit deux champs électromagnétiques différents $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$.

Montrer que les deux quantités $\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{B}_1$ et $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ sont des invariants lors d'un changement de référentiel inertiel.

*Indication:* on utilisera avec profit la linéarité des équations de Maxwell.

# 2 Problème: théorème de Derrick

Soit $f(s)$ différentiable en 0, avec $f(0) = f'(0) = 0$. On note $s_i$ les racines de $f(s) = 0$. On considère la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 - (\vec{\nabla}\theta)^2 - f(\theta)\,, \tag{1}$$

où $\theta$ est un champ réel, d'action

$$S = \int dt\, d^3\vec{r} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 - (\vec{\nabla}\theta)^2 - f(\theta)\right]. \tag{2}$$

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de solution indépendante du temps qui soit stable et d'énergie finie (théorème de Derrick).

1. Ecrire l'équation du mouvement satisfaite par le champ $\theta$.

2. Justifier de deux façon différentes le fait que l'énergie s'écrive

$$E = \int d^3\vec{x} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla}\theta)^2 + f(\theta) \right] . \tag{3}$$

3. On s'intéresse aux configurations du champ indépendantes du temps, dites statiques, et localisées, i.e. telles que

$$\int d^3\vec{r}\,(\vec{\nabla}\theta)^2 \quad \text{et} \quad \int d^3\vec{r}\, f(\theta) \tag{4}$$

convergent.
On cherche à minimiser l'énergie, comme fonctionnelle du champ $\theta$, et donc à imposer $\delta E = 0$ et $\delta^2 E \geq 0$ .

Montrer que les solutions statiques des équations du mouvement pour l'action (2) vérifient

$$\vec{\nabla}^2\theta = \frac{1}{2} f'(\theta) . \tag{5}$$

4. Justifier le fait que les solutions statiques des équations du mouvement pour l'action (2) sont également des solutions qui rendent extrémale l'énergie (3).

5. On suppose que $\theta(\vec{r})$ est une solution localisée de $\delta E = 0$. Posons

$$\theta_\lambda(\vec{r}) = \theta(\lambda\vec{r}) \tag{6}$$

où $\lambda$ est une constante arbitraire. On pose

$$I_1 = \int d^3\vec{r}\,(\vec{\nabla}\theta)^2 , \tag{7}$$

$$I_2 = \int d^3\vec{r}\, f(\theta) . \tag{8}$$

Ecrire $E_\lambda$ correspondant à la configuration de champ $\theta_\lambda$ à l'aide de $I_1$, $I_2$ et $\lambda$.

6. Pour cette solution $\theta$ fixée, considérons l'ensemble des configurations $\theta_\lambda$ avec $\lambda$ variable. En minimisant $E_\lambda$, en déduire qu'une condition nécessaire pour que $E$ soit minimale pour la solution $\theta$ est que les deux équations suivantes soient satisfaites

$$-I_1 - 3I_2 = 0 , \tag{9}$$

$$2I_1 + 12I_2 \geq 0 . \tag{10}$$

7. En déduire que

$$\left. \frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = -2I_1 . \tag{11}$$

8. Démontrer alors le théorème de Derrick.

9. Montrer que si par ailleurs $f(\theta) \geq 0$, alors $\delta E = 0$ n'a pas de solutions localisées, stables ou instables, autres que les solutions triviales $\theta = s_i$.

10. On souhaite étendre le théorème de Derrick au cas d'un champ $\vec{\theta}$ à $N$ composantes réelles, notées $\theta_A$ avec $A \in \{1, 2, \cdots N\}$, en dimension d'espace-temps $D + 1$. On introduit donc un potentiel $V(\vec{\theta})$, fonction du champ $\vec{\theta}$.

i) Ecrire la densité lagrangienne analogue à (1), et l'action correspondante.

ii) Ecrire les équations du mouvement.

iii) Donner l'expression de l'énergie.

iv) En s'inspirant du cas d'un champ scalaire, montrer finalement que pour $D \geq 3$, aucune solution indépendante du temps et localisée spatialement ne peut être stable.

v) Que peut-on dire dans le cas où $V(\vec{\theta})$ est défini positif?

# 3 Problème: champ électromagnétique dans deux référentiels

## 3.1 Quadrivecteur vitesse et quadrivecteur force

Considérons un référentiel $R'$ se déplaçant à la vitesse $\vec{\beta} = \vec{v}$ ($c = 1$) par rapport au référentiel $R$. Par commodité, $\vec{v}$ peut être pris le long de l'axe $x$.

On note $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ la vitesse de la particule dans le référentiel $R$ et $\vec{u}\,' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ la vitesse correspondante de la particule dans le référentiel $R'$. Ces vitesses sont définies par les relations habituelles

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{u}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} \,. \tag{12}$$

1. Montrer que

$$u'_x = \frac{u_x - \beta}{1 - \beta u_x} \tag{13}$$

$$u'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \beta u_x} \tag{14}$$

$$u'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - \beta u_x} \,. \tag{15}$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

2. Montrer que

$$1 - u_x'^2 = \frac{(1-\beta^2)(1-u_x^2)}{(1-\beta u_x)^2}\,. \tag{16}$$

3. Calculer $1 - \vec{u}\,'^2$.

4. Montrer que les deux rapports $\dfrac{1-\vec{u}\,'^2}{1-\vec{u}\,^2}$ et $\dfrac{1-u_x'^2}{1-u_x^2}$ sont reliés de façon très simple.

La particule précédente a une masse $m$. Sa quadri-impulsion est $p^\mu = (E, \vec{p})$ dans le référentiel $R$, et $p'^\mu = (E', \vec{p}\,')$ dans le référentiel $R'$. Dans le référentiel $R$, définissons

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}\,. \tag{17}$$

5. Pourquoi $\mathcal{F}^\mu$ est-il un quadrivecteur? Pourquoi peut-on l'appeler le quadrivecteur force dans le référentiel $R$ ?

6. En notant $\vec{F}$ la force subie par la particule dans le référentiel $R$, montrer que

$$\mathcal{F}^\mu = \Gamma(u)(\vec{F}\cdot\vec{u}, \vec{F}) \tag{18}$$

avec $u = \|\vec{u}\|$ and $\Gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$.

On définit de façon similaire $\mathcal{F}'^\mu$ dans le référentiel $R'$, et $\vec{F}\,'$ la force subie par la particule dans ce référentiel.

7. Relier les composantes $\mathcal{F}'^\mu$ à celles de $\mathcal{F}^\mu$.

8. Montrer finalement que

$$\vec{F}'_\parallel = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\left[\vec{F}_\parallel - \vec{\beta}(\vec{F}\cdot\vec{u})\right], \tag{19}$$

$$\vec{F}'_\perp = \frac{1}{\gamma(1-\vec{\beta}\cdot\vec{u})}\vec{F}_\perp \tag{20}$$

où $\parallel$ et $\perp$ correspondent respectivement à la composante colinéaire et transverse à $\vec{\beta}$.

9. Montrer que la dérivée temporelle de l'énergie dans les référentiels $R$ et $R'$ est reliée par l'équation

$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\left[\frac{dE}{dt} - \vec{F}\cdot\vec{\beta}\right]. \tag{21}$$

10. Montrer que la relation précédente, qui s'écrit

$$\vec{F}'\cdot\vec{u}\,' = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\left[\vec{F}\cdot\vec{u} - \vec{F}\cdot\vec{\beta}\right], \tag{22}$$

peut être directement obtenues à partir des lois de transformation pour $\vec{u}_\parallel$ et $\vec{u}_\perp$ obtenues à la question 1, et pour $\vec{F}_\parallel$ et $\vec{F}_\perp$ obtenues à la question 8.

## 3.2 Champ électromagnétique créé par un fil infini

Dans un référentiel inertiel $R$, considérons un fil infini, portant une densité linéique $\lambda$ de charges électriques. On choisit une origine $O$ sur le fil, et un système d'axes tel que le fil est suivant $\vec{e}_z$. Ces charges se déplacent à vitesse constante $\vec{v}$ dans la direction de l'axe $Oz$. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base locale des coordonnées cylindriques.

Question préliminaire (bonus)

11. Montrer que le champ électromagnétique, dans le référentiel $R$, est donné par

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\lambda v}{2\pi r}\vec{e}_\theta\,. \tag{23}$$

Soit $R'$ soit un autre référentiel inertiel, qui se déplace à une vitesse constante $\vec{V}$ dans la direction $z > 0$ par rapport au référentiel $R$.

12. Donner l'expression de $\vec{v}\,'$ dans le référentiel $R'$, en fonction de $V$ et $v$.

13. Exprimer $\Gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2}$ en fonction de $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$, $V$ et $v$.

14. Montrer que la densité linéique de charges $\lambda'$ dans le référentiel $R'$ s'écrit

$$\lambda' = \lambda\frac{1 - Vv}{\sqrt{1 - V^2}}\,. \tag{24}$$

15. On se place à présent dans le référentiel $R'$.

i) Par analogie avec l'expression obtenue plus haut, Eq. (23), pour le champ électromagnétique dans le référentiel $R$, donner l'expression du champ électromagnétique $(\vec{E}\,', \vec{B}\,')$ dans le référentiel $R'$.

ii) Vérifier que ceci est bien cohérent avec la façon dont le champ électromagnétique se transforme sous une transformation de Lorentz.

iii) Que se passe-t-il si $\vec{V} = \vec{v}$ ?

16. Une particule, de charge $q$ et de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $R$ (qui est aussi la vitesse des charges dans le fil dans ce même référentiel $R$), est soumise à l'action de ce champ électromagnétique.

i) Quelle force subit-elle dans le référentiel $R$ ?

ii) Et dans le référentiel au repos de la charge $q$?

iii) Comparer ces deux forces.

iv) Le résultat concorde-t-il avec celui obtenu en utilisant la quadriforce?