M1 de Physique et Magistère de Physique Fondamentale **2024-2025**

Electrodynamique Classique et Quantique

Examen

17 janvier 2025

Documents autorisés

Notes:
- Le sujet est **délibérément très long**. Il n'est donc absolument pas nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note !

- Les 3 parties sont indépendantes.

- On pourra utiliser un système d'unités dans lequel $c = 1$, $\hbar = 1$, $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$.

- Les coordonnées pourront être librement notées (x, y, z) ou (x^1, x^2, x^3).

- Tout dessin est très bienvenu !

1 Exercice: invariants relativistes

Soit deux champs électromagnétiques différents $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$.

Montrer que les deux quantités $\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{B}_1$ et $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ sont des invariants lors d'un changement de référentiel inertiel.

Indication: on utilisera avec profit la linéarité des équations de Maxwell.

Solution

Les équations de Maxwell étant linéaires, $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$, $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ et $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ sont simultanément solutions des équations de Maxwell. On a donc à la fois $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ et $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 - (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2$ qui sont des invariants relativistes. Or

$$(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{E}_1 \cdot \vec{B}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{B}_2 + (\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{B}_1) \,.$$

Le membre de gauche est un invariant relativiste. Par ailleurs, dans le membre de droite de cette équation, le premier et le second terme sont des invariants relativistes. On en déduit que le terme entre parenthèse du membre de droite est lui-même un invariant relativiste.
De même,

$$(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 - (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 = \vec{E}_1^2 - \vec{B}_1^2 + \vec{E}_2^2 - \vec{B}_2^2 + 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) \,,$$

où l'invariance relativiste du terme entre parenthèse du membre de droite est une conséquence de l'invariance relativiste du membre de gauche et des deux premiers termes du membre de droite.

2 Problème: théorème de Derrick

Soit $f(s)$ différentiable en 0, avec $f(0) = f'(0) = 0$. On note s_i les racines de $f(s) = 0$. On considère la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 - (\vec{\nabla}\theta)^2 - f(\theta)\,, \tag{1}$$

où θ est un champ réel, d'action

$$S = \int dt\, d^3\vec{r}\,\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 - (\vec{\nabla}\theta)^2 - f(\theta)\right]. \tag{2}$$

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de solution indépendante du temps qui soit stable et d'énergie finie (théorème de Derrick).

1. Ecrire l'équation du mouvement satisfaite par le champ θ.

Solution

On a

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\theta)(\partial^\mu\theta) - f(\theta)$$

et donc

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\theta)} = 2\partial^\mu\theta \quad \text{et} \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\theta} = -f'(\theta)\,.$$

Les solutions rendant l'action (2) extrémales vérifient l'équation d'Euler-Lagrange qui s'écrit

$$2\partial^\mu\partial_\mu\theta + f'(\theta) = 0\,.$$

---

2. Justifier de deux façon différentes le fait que l'énergie s'écrive

$$E = \int d^3\vec{x}\,\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + (\vec{\nabla}\theta)^2 + f(\theta)\right]. \tag{3}$$

Solution

Méthode 1: on effectue la transformation de Legendre, i.e. on calcule d'abord le moment conjugué Π, soit

$$\Pi = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\theta)} = 2\partial^0\theta$$

d'où l'on déduit la densité hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \Pi\,\partial_0\theta - \mathcal{L} = 2(\partial^0\theta)(\partial_0\theta) - \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + (\vec{\nabla}\theta)^2 + f(\theta) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + (\vec{\nabla}\theta)^2 + f(\theta)$$

d'où l'on tire l'énergie par intégration spatiale.
Méthode 2: on utilise le théorème de Noether. Considérons donc une translation globale d'espace-temps

$$\begin{aligned} \delta x^\mu(x) &= \delta x^\mu = \text{constante}\,, \\ \delta\theta &= 0\,. \end{aligned}$$

Le Lagrangien considéré ne dépendant pas explicitement des coordonnées, l'action est invariante sous cette transformation, et en utilisant la relation générale donnant l'expression du courant conservé, on en déduit que

$$j^\mu = \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \theta)} \partial^\nu \theta \,-\, g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x_\nu$$

est conservé, et donc, δx_ν étant arbitraire, que

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \theta)} \partial^\nu \theta \,-\, g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right)\,,$$

est lui-même conservé. En particulier

$$T^{00} = \Pi\, \partial^0 \theta - g^{00} \mathcal{L} = \Pi\, \partial^0 \theta - \mathcal{L} = \mathcal{H}\,,$$

dont l'intégrale spatiale est la charge conservée. Cette densité spatiale est la densité hamiltonienne. Son intégrale spatiale donne l'énergie totale de la configuration du champ.

---

3. On s'intéresse aux configurations du champ indépendantes du temps, dites statiques, et localisées, i.e. telles que

$$\int d^3\vec{r}\, (\vec{\nabla}\theta)^2 \quad \text{et} \quad \int d^3\vec{r}\, f(\theta) \tag{4}$$

convergent.
On cherche à minimiser l'énergie, comme fonctionnelle du champ θ, et donc à imposer $\delta E = 0$ et $\delta^2 E \geq 0$.

Montrer que les solutions statiques des équations du mouvement pour l'action (2) vérifient

$$\vec{\nabla}^2 \theta = \frac{1}{2} f'(\theta)\,. \tag{5}$$

Solution

Ce résultat est immédiat d'après la question 1, puisque $\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$.

---

4. Justifier le fait que les solutions statiques des équations du mouvement pour l'action (2) sont également des solutions qui rendent extrémale l'énergie (3).

Solution

Pour une solution statique, on a

$$E = \int d^3\vec{r}\left[(\vec{\nabla}\theta)^2 + f(\theta)\right] = \int d^3\vec{r}\,\mathcal{H}\,,$$

la densité hamiltonienne s'écrivant, pour une solution statique,

$$\mathcal{H} = (\vec{\nabla}\theta)^2 + f(\theta)\,.$$

L'application du principe variationnel à E conduit alors immédiatement à

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\vec{\nabla}\theta} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\theta}$$

soit

$$2\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\theta = f'(\theta)\,,$$

qui est bien identique à l'équation d'Euler-Lagrange (5) pour l'action S dans le cas d'un champ statique.

---

5. On suppose que $\theta(\vec{r})$ est une solution localisée de $\delta E = 0$. Posons

$$\theta_\lambda(\vec{r}) = \theta(\lambda\vec{r}) \tag{6}$$

où λ est une constante arbitraire. On pose

$$I_1 = \int d^3\vec{r}\,(\vec{\nabla}\theta)^2\,, \tag{7}$$

$$I_2 = \int d^3\vec{r}\,f(\theta)\,. \tag{8}$$

Ecrire E_λ correspondant à la configuration de champ θ_λ à l'aide de I_1, I_2 et λ.

Solution

On a immédiatement

$$E_\lambda = \frac{I_1}{\lambda} + \frac{I_2}{\lambda^3}\,,$$

après changement de variable d'intégration $\vec{r} \to \lambda\vec{r}$.

---

6. Pour cette solution θ fixée, considérons l'ensemble des configurations θ_λ avec λ variable. En minimisant E_λ, en déduire qu'une condition nécessaire pour que E soit minimale pour la solution θ est que les deux équations suivantes soient satisfaites

$$-I_1 - 3I_2 = 0\,, \tag{9}$$

$$2I_1 + 12I_2 \geq 0\,. \tag{10}$$

Solution

Il s'agit simplement de minimiser E_λ par rapport à λ. On a

$$\begin{aligned}\frac{dE_\lambda}{d\lambda} &= -\frac{I_1}{\lambda^2} - 3\frac{I_2}{\lambda^4}\,,\\ \frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2} &= 2\frac{I_1}{\lambda^3} + 12\frac{I_2}{\lambda^5}\,,\end{aligned}$$

et en particulier, θ_λ pour $\lambda = 1$ étant une solution telle que $\delta E = 0$ et $\delta^2 E \geq 0\,$,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dE_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= -I_1 - 3I_2 = 0\,,\\ \left.\frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=1} &= 2I_1 + 12I_2 \geq 0\,.\end{aligned}$$

---

7. En déduire que

$$\left.\frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=1} = -2I_1\,. \tag{11}$$

Solution

Le résultat est immédiat en utilisant la question 5.

---

8. Démontrer alors le théorème de Derrick.

Solution

D'après la définition de I_1, on a $I_1 > 0$ pour une solution non constante, et donc

$$\left.\frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=1} < 0\,.$$

ce qui montre que l'énergie n'est pas minimale.

---

9. Montrer que si par ailleurs $f(\theta) \geq 0$, alors $\delta E = 0$ n'a pas de solutions localisées, stables ou instables, autres que les solutions triviales $\theta = s_i$.

Solution

Dans ce cas, à la fois $I_1 > 0$ et $I_2 > 0$, et comme $I_1 + 3I_2 = 0$, ceci implique qu'à la fois $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$, i.e. $f(\theta) = 0$.

---

10. On souhaite étendre le théorème de Derrick au cas d'un champ $\vec{\theta}$ à N composantes réelles, notées θ_A avec $A \in \{1, 2, \cdots N\}$, en dimension d'espace-temps $D+1$. On introduit donc un potentiel $V(\vec{\theta})$, fonction du champ $\vec{\theta}$.

i) Ecrire la densité lagrangienne analogue à (1), et l'action correspondante.

Solution

On a maintenant

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \theta_A)(\partial^\mu \theta_A) - V(\vec{\theta})$$

avec sommation sur A, conduisant à l'action

$$S = \int d^{D+1}\vec{r} \left[(\partial_\mu \theta_A)(\partial^\mu \theta_A) - V(\vec{\theta}) \right].$$

---

ii) Ecrire les équations du mouvement.

Solution

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$2\partial^\mu \partial_\mu \theta_A + \frac{\partial V}{\partial \theta_A} = 0$$

pour chacune des composantes θ_A.

---

iii) Donner l'expression de l'énergie.

Solution

Une extension immédiate de la question 2 conduit a

$$E = \int d^D\vec{r} \left[\left(\frac{\partial \theta_A}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta_A}{\partial t} \right) + \vec{\nabla}\theta_A \cdot \vec{\nabla}\theta_A + V(\vec{\theta}) \right] ,$$

avec sommation sur A.

---

iv) En s'inspirant du cas d'un champ scalaire, montrer finalement que pour $D \geq 3$, aucune solution indépendante du temps et localisée spatialement ne peut être stable.

Solution

Considérons la famille de solution $\theta^\lambda(\vec{r}) = \theta^\lambda(\lambda\vec{r})$ et posons

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^D\vec{r}\; \vec{\nabla}\theta_A \cdot \vec{\nabla}\theta_A\,, \\ I_2 &= \int d^D\vec{r}\; V(\vec{\theta}\,)\,. \end{aligned}$$

L'énergie de cette solution est alors

$$E_\lambda = \lambda^{2-D} I_1 + \lambda^{-D} I_2\,,$$

après changement de variable d'intégration $\vec{r} \to \lambda\vec{r}$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dE_\lambda}{d\lambda} &= (2-D)\lambda^{1-D} I_1 - D\lambda^{-1-D} I_2\,, \\ \frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2} &= (2-D)(1-D)\lambda^{-D} I_1 + D(1+D)\lambda^{-2-D} I_2\,. \end{aligned}$$

En $\lambda = 1$, la solution est par hypothèse solution des équations du mouvement, et rend l'énergie extrémale. On a donc

$$(2-D)\lambda^{1-D} I_1 - D\lambda^{-1-D} I_2 = 0$$

soit

$$I_2 = \frac{2-D}{D} I_1\,,$$

d'où

$$\left.\frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=1} = (2-D)(1-D)I_1 + D(1+D)\frac{2-D}{D} I_1 = 2(2-D)I_1\,.$$

L'intégrale I_1 est positive pour une solution non triviale, i.e. non constante, et pour $D \geq 3$, on en déduit que $\delta^2 E < 0$, i.e. solution instable. La seule autre possibilité est de choisir une configuration du champ correspondant à un zéro du potentiel V, de sorte que $I_1 = I_2 = 0$.

---

v) Que peut-on dire dans le cas où $V(\vec{\theta}\,)$ est défini positif?

Solution

Dans le même esprit qu'à la question 9, si $D \geq 3$, alors comme I_1 et I_2 sont tous deux positifs, et qu'ils doivent être de signes opposés à cause de la relation $I_2 = \frac{2-D}{D} I_1$, on en déduit que le champ est le champ nul $\theta = (0, \cdots, 0)$, le seul qui annule V.

---

3 Problème: champ électromagnétique dans deux référentiels

3.1 Quadrivecteur vitesse et quadrivecteur force

Considérons un référentiel R' se déplaçant à la vitesse $\vec{\beta} = \vec{v}$ $(c = 1)$ par rapport au référentiel R. Par commodité, $\vec{v}$ peut être pris le long de l'axe x.

On note $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ la vitesse de la particule dans le référentiel R et $\vec{u}\,' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ la vitesse correspondante de la particule dans le référentiel R'. Ces vitesses sont définies par les relations habituelles

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{u}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} \,. \tag{12}$$

1. Montrer que

$$u'_x = \frac{u_x - \beta}{1 - \beta u_x} \tag{13}$$

$$u'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \beta u_x} \tag{14}$$

$$u'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - \beta u_x} \,. \tag{15}$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Solution

On a, par différentiation,

$$\begin{cases} dt' &= \gamma\, dt - \gamma\beta\, dx \\ dx' &= -\gamma\beta\, dt + \gamma\, dx \end{cases}$$

ce qui donne

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{-\gamma\beta dt + \gamma dx}{\gamma dt - \gamma\beta dx} = \frac{u_x - \beta}{1 - \beta u_x} \,.$$

Par ailleurs,

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt - \gamma\beta dy} = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \beta u_x} \,,$$

et de façon similaire,

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma dt - \gamma\beta dz} = \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - \beta u_x} \,.$$

2. Montrer que

$$1-u_x'^2=\frac{(1-\beta^2)(1-u_x^2)}{(1-\beta u_x)^2}\,. \tag{16}$$

Solution

On a

$$1-u_x'^2=1-\left(\frac{u_x-\beta}{1-\beta u_x}\right)^2=\frac{1+\beta^2u_x^2-2\beta u_x-u_x^2+2\beta u_x-\beta^2}{(1-\beta u_x)^2}=\frac{(1-\beta^2)(1-u_x^2)}{(1-\beta u_x)^2}\,.$$

---

3. Calculer $1-\vec{u}\,'^2$.

Solution

En utilisant le fait que $1/\gamma^2=1-\beta^2$, calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}
\vec{u}\,'^2 &= u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2=\frac{1}{(1-\beta u_x)^2}\left[(u_x-\beta)^2+\frac{u_y^2}{\gamma^2}+\frac{u_z^2}{\gamma^2}\right]\\
&= \frac{1}{(1-\beta u_x)^2}\left[u_x^2+\beta^2-2\beta u_x+u_y^2-\beta^2u_y^2+u_z^2-\beta^2u_z^2\right]\\
&= \frac{1}{(1-\beta u_x)^2}\left[\vec{u}\,^2+\beta^2-2\beta u_x+\beta^2u_x^2-\beta^2\vec{u}\,^2\right]\\
&= \frac{1}{(1-\beta u_x)^2}\left[(1-\beta^2)\vec{u}\,^2+\beta(\beta-2u_x+\beta u_x^2)\right].
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
1-\vec{u}\,'^2 &= \frac{(1-\beta u_x)^2-(1-\beta^2)\vec{u}\,^2-\beta(\beta-2u_x+\beta u_x^2)}{(1-\beta u_x)^2}\\
&= \frac{1-2\beta u_x+\beta^2u_x^2-(1-\beta^2)\vec{u}\,^2-\beta^2+2\beta u_x-\beta^2u_x^2}{(1-\beta u_x)^2}\\
&= \frac{(1-\beta^2)(1-\vec{u}\,^2)}{(1-\beta u_x)^2}\,.
\end{aligned}$$

---

4. Montrer que les deux rapports $\dfrac{1-\vec{u}\,'^2}{1-\vec{u}\,^2}$ et $\dfrac{1-u_x'^2}{1-u_x^2}$ sont reliés de façon très simple.

Solution

Partant des questions 2 et 4, nous avons

$$\frac{1-\vec{u}\,'^2}{1-\vec{u}\,^2}=\frac{1-u_x'^2}{1-u_x^2}\,.$$

La particule précédente a une masse m. Sa quadri-impulsion est $p^\mu = (E, \vec{p})$ dans le référentiel R, et $p'^\mu = (E', \vec{p}\,')$ dans le référentiel R'. Dans le référentiel R, définissons

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}\,. \tag{17}$$

5. Pourquoi $\mathcal{F}^\mu$ est-il un quadrivecteur? Pourquoi peut-on l'appeler le quadrivecteur force dans le référentiel R ?

Solution

C'est la dérivée de la quadri-impulsion par rapport au temps propre. Le temps propre étant un invariant de Lorentz, c'est donc un quadrivecteur. C'est une extension relativiste naturelle de la relation habituelle

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,,$$

d'où le nom.

---

6. En notant $\vec{F}$ la force subie par la particule dans le référentiel R, montrer que

$$\mathcal{F}^\mu = \Gamma(u)(\vec{F}\cdot\vec{u}, \vec{F}) \tag{18}$$

avec $u = \|\vec{u}\|$ and $\Gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$.

Solution

Tout d'abord, on a

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dE}{dt} = \Gamma(u)\vec{F}\cdot\vec{u}\,.$$

Deuxièmement,

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{p}}{dt} = \Gamma(u)\vec{F}\,.$$

On définit de façon similaire $\mathcal{F}'^\mu$ dans le référentiel R', et $\vec{F}\,'$ la force subie par la particule dans ce référentiel.

7. Relier les composantes $\mathcal{F}'^\mu$ à celles de $\mathcal{F}^\mu$.

Solution

We have

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'^0 &= \gamma\mathcal{F}^0 - \gamma\beta\mathcal{F}^x,\\
\mathcal{F}'^x &= -\gamma\beta\mathcal{F}^0 + \gamma\mathcal{F}^x,\\
\mathcal{F}'^y &= \mathcal{F}^y,\\
\mathcal{F}'^z &= \mathcal{F}^z.
\end{aligned}$$

ou de façon plus compacte

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'^0 &= \gamma\mathcal{F}^0 - \gamma\beta\mathcal{F}_{\parallel},\\ \mathcal{F}'_{\parallel} &= -\gamma\beta\mathcal{F}^0 + \gamma\mathcal{F}_{\parallel},\\ \mathcal{F}'_{\perp} &= \mathcal{F}_{\perp}\,.\end{aligned}$$

---

8. Montrer finalement que

$$\vec{F}'_{\parallel} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\left[\vec{F}_{\parallel} - \vec{\beta}(\vec{F}\cdot\vec{u})\right], \tag{19}$$

$$\vec{F}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma(1-\vec{\beta}\cdot\vec{u})}\vec{F}_{\perp} \tag{20}$$

où $\parallel$ et $\perp$ correspondent respectivement à la composante colinéaire et transverse à $\vec{\beta}$.

Solution

Notons $\Gamma = \Gamma(u)$ and $\Gamma' = \Gamma(u')$. De la question précédente on tire

$$\begin{aligned}\Gamma'\vec{F}'_{\parallel} &= \gamma\Gamma[\vec{F}_{\parallel} - \beta\vec{F}\cdot\vec{u}]\\ \Gamma'\vec{F}'_{\perp} &= \Gamma\vec{F}_{\perp}\end{aligned}$$

Par ailleurs, la question 2 implique que

$$\Gamma' = \Gamma\gamma(1-\vec{\beta}\cdot\vec{u})\,,$$

et donc

$$\begin{aligned}\vec{F}'_{\parallel} &= \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\left[\vec{F}_{\parallel} - \vec{\beta}(\vec{F}\cdot\vec{u})\right],\\ \vec{F}'_{\perp} &= \frac{1}{\gamma(1-\vec{\beta}\cdot\vec{u})}\vec{F}_{\perp}\,.\end{aligned}$$

---

9. Montrer que la dérivée temporelle de l'énergie dans les référentiels R et R' est reliée par l'équation

$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\left[\frac{dE}{dt} - \vec{F}\cdot\vec{\beta}\right]. \tag{21}$$

Solution

De la question 7 on tire

$$\Gamma'\frac{dE'}{dt'} = \gamma\Gamma\frac{dE}{dt} - \gamma\beta\Gamma F_{\parallel}$$

et donc

$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{\gamma\Gamma}{\Gamma'}\frac{dE}{dt} - \frac{\gamma\beta\Gamma}{\Gamma'}F_{\parallel} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\frac{dE}{dt} - \frac{\vec{F}\cdot\vec{\beta}}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}\,.$$

10. Montrer que la relation précédente, qui s'écrit

$$\vec{F}' \cdot \vec{u}\,' = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{u}} \left[\vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{F} \cdot \vec{\beta} \right], \tag{22}$$

peut être directement obtenues à partir des lois de transformation pour $\vec{u}_\parallel$ et $\vec{u}_\perp$ obtenues à la question 1, et pour $\vec{F}_\parallel$ et $\vec{F}_\perp$ obtenues à la question 8.

Solution

De la question 1 on tire

$$\begin{aligned} \vec{u}\,'_\parallel &= \frac{\vec{u}_\parallel - \vec{\beta}}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{u}}, \\ \vec{u}\,'_\perp &= \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{u}_\perp}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{u}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\vec{F}' \cdot \vec{u}\,' = \vec{F}'_\parallel u'_\parallel + \vec{F}'_\perp \cdot \vec{u}\,'_\perp = \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{u})^2} \left[\left(F_\parallel - \beta(\vec{F} \cdot \vec{u}) \right) (u_\parallel - \beta) + \frac{1}{\gamma^2} \vec{F}_\perp \cdot \vec{u}_\perp \right].$$

Partant de $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$, en effectuant le remplacement $\vec{F}_\perp \cdot \vec{u}_\perp = \vec{F} \cdot \vec{u} - F_\parallel u_\parallel$, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{F}' \cdot \vec{u}\,' &= \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{u})^2} \left[F_\parallel u_\parallel - \beta F_\parallel - \beta u_\parallel \vec{F} \cdot \vec{u} + \beta^2 \vec{F} \cdot \vec{u} + \vec{F} \cdot \vec{u} - \beta^2 \vec{F} \cdot \vec{u} - F_\parallel u_\parallel + \beta^2 F_\parallel u_\parallel \right] \\ &= \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{u})^2} \left[\vec{F} \cdot \vec{u}(1 - \beta u_\parallel) - \beta F_\parallel (1 - \beta u_\parallel) \right] = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{u}} \left[\vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{F} \cdot \vec{\beta} \right] \end{aligned}$$

3.2 Champ électromagnétique créé par un fil infini

Dans un référentiel inertiel R, considérons un fil infini, portant une densité linéique λ de charges électriques. On choisit une origine O sur le fil, et un système d'axes tel que le fil est suivant $\vec{e}_z$. Ces charges se déplacent à vitesse constante $\vec{v}$ dans la direction de l'axe Oz. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base locale des coordonnées cylindriques.

Question préliminaire (bonus)

11. Montrer que le champ électromagnétique, dans le référentiel R, est donné par

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\lambda v}{2\pi r} \vec{e}_\theta. \tag{23}$$

Solution

Par invariance par rotation d'axe Oz, et par invariance par translation suivant z, E et B ne peuvent dépendre que de r. Considérons un point M où l'on souhaite évaluer le champ électromagnétique. Le plan $P_\perp$, transverse au fil et contenant M, est un plan de symétrie pour la distribution de charges, et un plan d'antisymétrie pour la distribution du courant. Sous la symétrie $S_{P_\perp}$ par rapport à ce plan, le champ vectoriel $\vec{E}$ et le champ pseudo-vectoriel $\vec{B}$ se transforment comme

$$\begin{aligned}\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta + E_z\vec{e}_z &\xrightarrow{S_{P_1}} E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta - E_z\vec{e}_z \\ \vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_z\vec{e}_z &\xrightarrow{S_{P_\perp}} -B_r\vec{e}_r - B_\theta\vec{e}_\theta + B_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

et donc $E_z = 0$ et $B_z = 0$. De même, considérons le plan $P' = (M\vec{e}_r\vec{e}_z)$. est un plan de symétrie pour la distribution de charges et pour la distribution du courant. Sous la symétrie $S_{P'}$ par rapport à ce plan, le champ vectoriel $\vec{E}$ et le champ pseudo-vectoriel $\vec{B}$ se transforment comme

$$\begin{aligned}\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta &\xrightarrow{S_{P_2}} E_r\vec{e}_r - E_\theta\vec{e}_\theta \\ \vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta &\xrightarrow{S_{P_2}} -B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

et donc $E_\theta = 0$ et $B_r = 0$. On peut donc conclure que $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$. Considérons un point $M(r,\theta,z)$, sur un cylindre d'axe z, de rayon r, de hauteur ℓ. Une application immédiate du théorème de Gauss à cette surface conduit à $2\pi r\ell E(z) = \ell\sigma$, ce qui implique que le champ électrique en M vaut

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_r\,.$$

Considérons à présent point $M(r,\theta,z)$, sur un cercle de rayon r, dans le plan transverse au fil, de centre sur le fil. Appliquons le théorème d'Ampère

$$\iint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = I$$

au chemin donné par ce cercle, orienté suivant $\vec{e}_\theta$, soit

$$B(r)2\pi r = \frac{\lambda\ell dz}{dt} = \lambda v\ell$$

où l'on a utilisé le fait que pendant dt, une quantité de charges $dq = \lambda dx$ avec $dx = vdt$ traverse le plan du cercle, correspondant à une intensité $I = \frac{dq}{dt} = \lambda v$. Ainsi,

$$\vec{B} = \frac{\lambda v}{2\pi r}\vec{e}_\theta\,.$$

Soit R' soit un autre référentiel inertiel, qui se déplace à une vitesse constante $\vec{V}$ dans la direction $z > 0$ par rapport au référentiel R.

12. Donner l'expression de $\vec{v}\,'$ dans le référentiel R', en fonction de V et v.

Solution

De la question 1, on tire $\vec{v}\,' = v'\vec{e}_x$ avec

$$v' = \frac{v-V}{1-Vv}\,.$$

---

13. Exprimer $\Gamma' = 1/\sqrt{1-v'^2}$ en fonction de $\Gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$, V et v.

Solution

Partant de la question 3, on a

$$\Gamma' = \Gamma\gamma(1-Vv)\,.$$

---

14. Montrer que la densité linéique de charges λ' dans le référentiel R' s'écrit

$$\lambda' = \lambda\frac{1-Vv}{\sqrt{1-V^2}}\,. \tag{24}$$

Solution

Lorsque l'on du référentiel au repos pour les charges R_0 au référentiel R, une contraction des longueurs le long de l'axe z a lieu, à savoir $dz = dz_{R_0}/\Gamma$. Puisque la charge sur une portion de fil donnée reste identique dans les référentiels R_0 et R, on peut écrire

$$\lambda_{R_0}dz_{R_0} = \lambda dz$$

i.e.

$$\lambda = \lambda_{R_0}\frac{dz_{R_0}}{dz} = \Gamma\lambda_{R_0}\,.$$

De même,

$$\lambda' = \lambda_{R_0}\frac{dz_{R_0}}{dz'} = \Gamma'\lambda_{R_0}\,,$$

et donc

$$\lambda' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}\lambda = \gamma(1-Vv)\lambda\,.$$

---

15. On se place à présent dans le référentiel R'.

i) Par analogie avec l'expression obtenue plus haut, Eq. (23), pour le champ électromagnétique dans le référentiel R, donner l'expression du champ électromagnétique $(\vec{E}\,', \vec{B}\,')$ dans le référentiel R'.

Solution

Dans le référentiel R', on a

$$\vec{E}\,' = \frac{\lambda'}{2\pi r}\vec{e}_r = \frac{\gamma(1-Vv)\lambda}{2\pi r}\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}\,' = \frac{\lambda' v'}{2\pi r}\vec{e}_\theta = \frac{\gamma(1-Vv)\lambda}{2\pi r}\frac{v-V}{1-Vv}\vec{e}_\theta = \frac{\gamma(v-V)\lambda}{2\pi r}\vec{e}_\theta\,.$$

---

ii) Vérifier que ceci est bien cohérent avec la façon dont le champ électromagnétique se transforme sous une transformation de Lorentz.

Solution

La loi de transformation du champ $(\vec{E},\vec{B})$ s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{E} - (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{n}\right] + \gamma\,\vec{V}\wedge\vec{B}\,, \\ \vec{B}' &= (\vec{B}\cdot\vec{n})\vec{n} + \gamma\left[\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{n})\vec{n}\right] - \gamma\,\vec{V}\wedge\vec{E}\,. \end{aligned}$$

Ici $\vec{n} = \vec{e}_z$, $\vec{V} = V\vec{e}_z$, $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$ soit

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma E(r)\vec{e}_r + \gamma\,V\vec{e}_z\wedge B(r)\vec{e}_\theta\,, \\ \vec{B}' &= \gamma B(r)\vec{e}_\theta - \gamma\,V\vec{e}_z\wedge E(r)\vec{e}_r\,, \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma\frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_r - \gamma\,V\left(\frac{v\lambda}{2\pi r}\right)\vec{e}_r = \gamma(1-Vv)\frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_r\,, \\ \vec{B}' &= \gamma\left(\frac{\lambda v}{2\pi r}\right)\vec{e}_\theta - \gamma\,V\frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_\theta = \gamma\,(v-\,V)\,\frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_\theta\,, \end{aligned}$$

en accord avec la question 15 i).

---

iii) Que se passe-t-il si $\vec{V} = \vec{v}$?

Solution

Lorsque $\vec{V} = \vec{v}$, $\gamma(1-Vv) = 1/\gamma = 1/\Gamma$ de sorte que

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \frac{\lambda}{\Gamma 2\pi r}\vec{e}_r = \frac{\lambda_{R_0}}{2\pi r}\vec{e}_r\,, \\ \vec{B}' &= 0\,. \end{aligned}$$

Comme prévu, il s'agit du champ produit par un fil infini portant des charges électriques au repos, de densité linéique λ_{R_0}.

---

16. Une particule, de charge q et de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel R (qui est aussi la vitesse des charges dans le fil dans ce même référentiel R), est soumise à l'action de ce champ électromagnétique.

i) Quelle force subit-elle dans le référentiel R ?

Solution

La force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Dans le référentiel R, on a donc

$$\vec{F} = q\lambda \left[\frac{1}{2\pi r}\vec{e}_r + \frac{v^2}{2\pi r}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta\right] = q\frac{\lambda}{2\pi r}(1 - v^2)\vec{e}_r = q\frac{\lambda}{\Gamma^2 2\pi r}\vec{e}_r\,.$$

---

ii) Et dans le référentiel au repos de la charge q?

Solution

Le référentiel au repos de la charge est également le référentiel dans lequel la charge du fil est au repos, puisque toutes deux ont la même vitesse dans le référentiel R. On a donc

$$\vec{F}_{R_0} = q\frac{\lambda_{R_0}}{2\pi r}\vec{e}_r = \frac{\lambda}{\Gamma 2\pi r}\vec{e}_r\,.$$

---

iii) Comparer ces deux forces.

Solution

On observe que

$$\vec{F}_{R_0} = \Gamma \vec{F}\,.$$

---

iv) Le résultat concorde-t-il avec celui obtenu en utilisant la quadriforce?

Solution

D'après la question 8, puisque $\vec{F}_\parallel = \vec{0}$ et $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$, la force après transformation spéciale de Lorentz du référentiel R au référentiel au repos R_0 s'écrit

$$\begin{aligned}
F_{R_0\,r} &= \frac{1}{\Gamma(1 - v^2)}F_r = \Gamma F_r\,,\\
F_{R_0\,\theta} &= F_\theta = 0\,,\\
F_{R_0\,z} &= F_z = 0\,,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\vec{F}_{propre} = \Gamma \vec{F}\,.$$

en accord avec le résultat de la question 16 iii).
