Université Pierre et Marie Curie

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Contrôle continu

jeudi 17 mars 2016

1 Etude des groupes additifs $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

On note T la translation à gauche

$$\begin{aligned} T : G &\to \mathcal{S}(G) \\ g &\mapsto T(g) = f_g \end{aligned}$$

avec $\forall x \in G,\ f_g(x) = g + x$.

1. Soit $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a. Préciser l'ordre de chacun des éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Corrigé :

L'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe d'après le théorème de Lagrange. Comme 5 est premier, chaque élément est d'ordre 5, ce que l'on vérifie immédiatement de façon explicite.

---

b. Donner tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Corrigé :

Il y a seulement deux sous-groupes : $\{0\}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, puisqu'à nouveau, grâce au théorème de Lagrange, l'ordre des sous-groupes divise celui du groupe.

---

c. Déterminer l'image par T de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Commenter.

Corrigé :

$$\begin{array}{llll} f_1 : 1+0 \equiv 1 & f_2 : 2+0 \equiv 2 & f_3 : 3+0 \equiv 3 & f_4 : 4+0 \equiv 4 \\ \quad 1+1 \equiv 2 & \quad 2+1 \equiv 3 & \quad 3+1 \equiv 4 & \quad 4+1 \equiv 0 \\ \quad 1+2 \equiv 3 & \quad 2+2 \equiv 4 & \quad 3+2 \equiv 0 & \quad 4+2 \equiv 1 \\ \quad 1+3 \equiv 4 & \quad 2+3 \equiv 0 & \quad 3+3 \equiv 1 & \quad 4+3 \equiv 2 \\ \quad 1+4 \equiv 0 & \quad 2+4 \equiv 1 & \quad 3+4 \equiv 2 & \quad 4+4 \equiv 3 \end{array}$$

d'où l'on déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto e \\ 1 &\mapsto (1,2,3,4,5) \\ 2 &\mapsto (1,3,5,2,4) \\ 3 &\mapsto (1,4,2,5,3) \\ 4 &\mapsto (1,5,4,3,2)\,. \end{aligned}$$

On obtient un sous-groupe de $\mathcal{S}_5$, en accord avec le théorème de Cayley.

---

d. Préciser les sous-groupes de $T(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Corrigé :

Par isomorphisme, $T(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ ne possède que deux sous-groupes : lui-même et l'identité.

---

e. Donner un générateur de $T(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Corrigé :

$T(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ est engendré par une permutation circulaire quelconque de $(1,2,3,4,5)$ (sauf e bien sûr).

2. Soit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

a. Déterminer l'image par T de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On précisera l'image par T de chaque élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ainsi que l'élément correspondant de $\mathcal{S}_6$.

Corrigé :

$$
\begin{array}{lllll}
f_1 : 1+0 \equiv 1 & f_2 : 2+0 \equiv 2 & f_3 : 3+0 \equiv 3 & f_4 : 4+0 \equiv 4 & f_5 : 5+0 \equiv 5 \\
\quad\;\; 1+1 \equiv 2 & \quad\;\; 2+1 \equiv 3 & \quad\;\; 3+1 \equiv 4 & \quad\;\; 4+1 \equiv 5 & \quad\;\; 5+1 \equiv 0 \\
\quad\;\; 1+2 \equiv 3 & \quad\;\; 2+2 \equiv 4 & \quad\;\; 3+2 \equiv 5 & \quad\;\; 4+2 \equiv 0 & \quad\;\; 5+2 \equiv 1 \\
\quad\;\; 1+3 \equiv 4 & \quad\;\; 2+3 \equiv 5 & \quad\;\; 3+3 \equiv 0 & \quad\;\; 4+3 \equiv 1 & \quad\;\; 5+3 \equiv 2 \\
\quad\;\; 1+4 \equiv 5 & \quad\;\; 2+4 \equiv 0 & \quad\;\; 3+4 \equiv 1 & \quad\;\; 4+4 \equiv 2 & \quad\;\; 5+4 \equiv 3 \\
\quad\;\; 1+5 \equiv 0 & \quad\;\; 2+5 \equiv 1 & \quad\;\; 3+5 \equiv 2 & \quad\;\; 4+5 \equiv 3 & \quad\;\; 5+5 \equiv 4
\end{array}
$$

d'où l'on déduit immédiatement que

$$
\begin{array}{lcl}
0 & \mapsto & e \\
1 & \mapsto & (1,2,3,4,5,6) \\
2 & \mapsto & (1,3,5)(2,4,6) \\
3 & \mapsto & (1,4)(2,5)(3,6) \\
4 & \mapsto & (1,5,3)(2,6,4) \\
5 & \mapsto & (1,6,5,4,3,2) \,.
\end{array}
$$

b. Que pouvez-vous dire de $T(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$?

Corrigé :

C'est un sous-groupe de $\mathcal{S}_6$ d'après le théorème de Cayley.

c. Que peut-on constater sur la décomposition en produit de cycles de $T(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$?

Corrigé :

La décomposition en cycle fait apparaître des cycles de longueur identiques : 1 pour e, 2 pour $(1,4)(2,5)(3,6)$, 3 pour $(1,3,5)(2,4,6)$ et $(1,5,3)(2,6,4)$, 6 pour $(1,2,3,4,5,6)$ et $(1,6,5,4,3,2)$. Ceci est en accord avec le fait que $T(g)$ ne laisse aucun élément invariant (pour $g \neq e$), donc tous les cycles doivent être de longueurs identiques.

---

d. Quel est l'ordre de chacun des éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$? Commenter.

Corrigé :

0 est d'ordre 1, 1 est d'ordre 6, 2 est d'ordre 3, 3 est d'ordre 2, 4 est d'ordre 3 et 5 est d'ordre 6. Ces résultats sont en accord avec le théorème de Lagrange puisque les ordres obtenus divisent tous le cardinal de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, égal à 6.

---

e. Donner tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (on précisera leur nombre).

Corrigé :

D'après la question précédente, il y a 4 sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\{0\}$, $(0,3)$, $(0,2,4)$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

---

f. Donner les sous-groupes de $T(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$. On précisera leur nombre, et on donnera un générateur pour chacun d'eux. On précisera également la correspondance entre ces sous-groupes et ceux obtenus à la question précédente.

Corrigé :

Il y a 4 sous-groupes distincts : ils sont isomorphes à e, le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par $(1,4)(2,5)(3,6)$, le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par $(1,3,5)(2,4,6)$ ou $(1,5,3)(2,6,4)$ et le groupe cyclique d'ordre 6 engendré par $(1,2,3,4,5,6)$ ou $(1,6,5,4,3,2)$. Chacun d'eux est respectivement isomorphe aux sous-groupes identifiés à la question précédente.

---

g. Donner les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont isomorphes aux sous-groupes obtenus aux questions 2.d et 2.e. Préciser également les groupes constitués de rotations discrètes qui leur sont isomorphes. Dans chacun des cas, on donnera un générateur de ces groupes.

Corrigé :

On rappelle que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à C_n, le groupe cyclique d'ordre n engendré par une rotation $R_{2\pi/n}$ d'angle $2\pi/n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \{0\} &\simeq C_1 \\ (0,3) &\simeq Z/2Z \simeq C_2 \\ (0,2,4) &\simeq Z/3Z \simeq C_3 \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} &\simeq C_6. \end{aligned}$$

---

2 Modèle de spins dans la limite continue

Le hamiltonien du modèle $O(4)$ classique, sur un réseau bidimensionnel choisi carré de pas L, est donné par :

$$H = -J \sum_{\{i,j\}\text{ppv}} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \,, \tag{1}$$

où les $\vec{S}_i$ sont des vecteurs à <u>*quatre dimensions*</u> de norme 1 : $\forall i$, $||\vec{S}_i||^2 = 1$. On s'intéresse au modèle ferromagnétique, pour lequel $J > 0$.

1. Quel est le groupe de symétrie laissant invariant ce hamiltonien ?

Corrigé :

Naturellement il s'agit de $O(4)$, dans sa représentation vectorielle de dimension 4.

---

2. On suppose l'existence à basse température d'une phase manifestant une aimantation que l'on considère selon $\vec{e}_4$.

a. De quel type de phénomène s'agit-il ?

Corrigé :

C'est une brisure spontanée de symétrie.

---

b. Quelle est la symétrie résiduelle dans cette phase ?

Corrigé :

C'est une symétrie $O(3)$

---

3. On s'intéresse aux fluctuations de l'aimantation autour de cette configuration. On note

$$\vec{S}_i = \left(\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \sigma_{3,i}, \sqrt{1 - \sum_{a=1}^{3} \sigma_{a,i}^2}\right) \quad , \quad |\sigma_{1,2,3}| \ll 1.$$

Justifier que dans la limite continue, ce hamiltonien d'interaction prend la forme suivante

$$H = E_0 + \frac{1}{2}\tilde{J} \int \mathrm{d}^2 x \sum_{a=1}^{3} (\nabla \sigma_a)^2(\mathbf{x}) \,, \tag{2}$$

où on précisera la relation entre $\tilde{J}$ et J (par analyse dimensionnelle). Les vecteurs du plan où vit le modèle sont notés en gras, par exemple $\mathbf{x}$.

Corrigé :

On peut par exemple réécrire $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -\frac{1}{2}(\vec{S}_i - \vec{S}_j)^2 + \frac{1}{2}(\vec{S}_i^2 + \vec{S}_j^2)$, et utiliser le fait que $\vec{S}_i^2 = 1$. On développe ensuite

$$\begin{aligned}(\vec{S}_i - \vec{S}_j)^2 &= \sum_{a=1}^{3} (\sigma_{i,a} - \sigma_{j,a})^2 + \left(\sqrt{1 - \sum_{a=1}^{3} \sigma_{i,a}^2} - \sqrt{1 - \sum_{a=1}^{3} \sigma_{j,a}^2}\right)^2 \\ &\simeq \sum_{a=1}^{3} (\sigma_{i,a} - \sigma_{j,a})^2 + \mathcal{O}(\sigma^4)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Cela donne le hamiltonien demandé, avec $\tilde{J} = L^{2-d}J = J$ comme nous sommes à deux dimensions.

---

4. On suppose que ce hamiltonien peut s'obtenir à partir d'un lagrangien non-relativiste (pouvant décrire les excitations de basse énergie du type ondes de spin), de la forme

$$L = \int \mathrm{d}^2x \left[M_{ab}\dot{\sigma}_a(\mathbf{x})\sigma_b(\mathbf{x}) - \lambda(\nabla\vec{\sigma})\cdot(\nabla\vec{\sigma})\right] , \tag{4}$$

où M_{ab} est une matrice constante 3×3 à déterminer.
Trouver la valeur de λ permettant d'obtenir le hamiltonien (2), à une constante près.

Corrigé :
On a $p_a = \delta L/\delta\dot{\sigma}_a = M_{ab}\sigma_b$ donc $H = \int \mathrm{d}^2x\, p_a\dot{\sigma}_a - L = \int \mathrm{d}^2x\, \lambda(\nabla\vec{\sigma})\cdot(\nabla\vec{\sigma})\,.$
On en déduit que $\lambda = \frac{1}{2}J$.

---

5. Obtenir une condition sur la matrice M_{ab} pour obtenir des équations du mouvement du premier ordre en ∂/∂_t, comme attendu pour un système non-relativiste.

Corrigé :
Les équations d'Euler-Lagrange donnent $M_{ab}\dot{\sigma}_b - \lambda\Delta\sigma_a = M_{ba}\dot{\sigma}_b$, soit

$$(M_{ab} - M_{ba})\,\dot{\sigma}_b = \lambda\Delta\sigma_a\,.$$

On en déduit que la partie antisymétrique de la matrice M doit être non-nulle.

---

6. À quelle condition le lagrangien (4) est-il invariant par le groupe de symétrie associé au problème ?

Corrigé :
Soit $O \in O(3)$ une transformation de symétrie : $\sigma_a(\mathbf{x}) \mapsto O_{aa'}\sigma_{a'}(\mathbf{x})$. Le terme en gradient est naturellement invariant. La transformation du terme cinétique donne

$$M_{ab}\sigma_a\dot{\sigma}_b \mapsto M_{ab}O_{aa'}O_{bb'}\sigma_{a'}\dot{\sigma}_{b'} = (O^{\mathrm{T}}MO)_{a'b'}\sigma_{a'}\dot{\sigma}_{b'}.$$

On doit donc avoir $M = O^t M O$, $\forall O \in O(3)$.

---

7. À l'aide des résultats obtenus en TD à propos des tenseurs, donner la forme de M imposée par l'invariance sous $SO(3)$.

Corrigé :

M doit donc correspondre à un tenseur invariant de rang 2. Or nous avons vu que la représentation reductible de $SO(3)$ associée aux tenseurs de rang 2 se décompose en 3 représentations irreductibles : triviale, antisymétrique (dimension 3), et symétrique de trace nulle (dimension 9). Il faudrait donc que M se transforme dans la représentation triviale, donc soit proportionnelle à δ_{ij}. Nous avons vu que M doit être antisymétrique pour obtenir des équations du mouvement du premier ordre en $\partial/\partial t$, ce qui est contradictoire avec la symétrie du problème. Donc, en supposant la symétrie $SO(3)$ non briśee, le Lagrangien ne peut être de la forme (4).

---

8. Conclure et comparer avec les résultats pour le modèle $O(3)$ vu au TD1.

Corrigé :

Pour le modèle $O(3)$, où la symétrie résiduelle est $O(2)$ il n'y a pas de contradiction car naturellement ϵ_{ab} est un tenseur invariant de $SO(2)$. On obtient alors des ondes de spin avec la relation de dispersion non-relativiste $\omega \sim k^2$.
