Université Pierre et Marie Curie

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Contrôle continu

jeudi 15 mars 2018

On note D_{2p} le groupe diédral d'ordre $2p$ (groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à p côtés, de centre noté O). Afin de fixer les notations, on notera A_i les sommets, étiquetés en tournant dans le sens trigonométrique. On notera s_1 la symétrie axiale suivant la bissectrice de l'angle formé par les deux côtés passant par le sommet A_1, et s_2 la symétrie axiale suivant la médiatrice de $[A_1, A_2]$. On notera r la rotation de centre O, d'angle $+2\pi/p$.

1 Le groupe D_{2p}

1. Quel est l'ordre du groupe D_{2p} ? On précisera en détail les symétries correspondantes.

Corrigé :

Il y a :

- p rotation $r_k = r^k$ de centre le centre du polygone et d'angle $k2\pi/p$
- p symétries axiale. Outre s_1 et s_2, soit s_3 la symétrie axiale suivant la bissectrice de l'angle formé par les deux côtés passant par le sommet A_2, etc. Ces n symétries axiales sont des axes de symétrie du polygone.

---

2. Que vaut $s_2 s_1$?

Corrigé :

C'est la rotation r.

3. Que valent $s_1 r s_1$ et $s_2 r s_2$?

Corrigé :

$s_1 r s_1 = s_1 s_2 s_1 s_1 = s_1 s_2 = r^{-1}$: c'est la rotation d'angle $-2\pi/p$.

De même $s_2 r s_2 = s_2 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 = r^{-1}$.

4. Soit C_p l'ensemble des puissances de r. C_p est-il un sous-groupe de D_{2p} ? Préciser son cardinal, et commenter.

Corrigé :

Cours : sous-groupe cyclique de cardinal p, avec $r^p = 1$. On a bien p qui divise $2p$, en accord avec le théorème de Lagrange.

5. C_p est-il un sous-groupe invariant de D_{2p} ?

Corrigé :

On doit examiner les éléments $g r^\alpha g^{-1}$ avec $\alpha \in \{0, \cdots p-1\}$.

- Le cas $g \in C_p$ est trivial : $g r^\alpha g^{-1} = r^{-\alpha}$.
- Considérons $g = g^{-1} = s_k$. On a $s_{k+1} s_k = r$ donc

$$s_k r^\alpha s_k = s_k (s_{k+1} s_k)^\alpha s_k = (s_k s_{k+1})^\alpha s_k s_k = (s_k s_{k+1})^\alpha = r^{-\alpha} \in C_p \,,$$

ce qui prouve que C_p est un sous-groupe invariant de D_{2p}.

6. Décrire la structure de l'ensemble D_{2p}/C_p, et préciser ses éléments. On donnera un représentant de chacune des classes correspondantes. Précisez le cardinal de D_{2p}/C_p, ainsi que le cardinal de chacune des classes. Donner un groupe isomorphe à D_{2p}/C_p .

Corrigé :

Comme C_p est un sous-groupe invariant de D_{2p}, D_{2p}/C_p est muni d'une structure de groupe (groupe quotient). On a, $\forall i, j \in \{1, \cdots p\}, s_i \sim s_j$. En effet, $s_j s_i = r^{j-i}$ et donc $s_i = s_j r^{j-i}$. Ainsi D_{2p}/C_p possède deux éléments : l'élément neutre constitué de la classe des éléments de C_p, et la classe des éléments du type $s_i C_p$. On peut par exemple considérer comme représentants $\mathbb{1}$ et s_1.

$|D_{2p}/C_p| = 2$. On a $D_{2p}/C_p \simeq \mathbb{Z}_2$.

---

2 Etude des représentations du groupe D_{2n}

Pour tout j entier, on pose $\epsilon_j = e^{2i\pi j/p}$.

$$A_j = \begin{pmatrix} \epsilon_j & 0 \\ 0 & \epsilon_j^* \end{pmatrix} \tag{1}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. a) Montrer que les matrices $\{\mathbb{1}, A_j, \cdots A_j^{p-1}\}$ forment une représentation de C_p, notée T_j. On précisera sa dimension.

Corrigé :

Notons e l'identité de D_{2p}.. Il suffit d'identifier A_j à une des rotations r_k pour conclure : le morphisme est alors évident, et l'on a bien $A_j^p = \mathbb{1}$ en accord avec $r_k^p = e$. Les matrices sont de dimension 2×2, la dimension de la représentation est donc égale à 2.

---

b) Est-elle réductible ? Commentez.

Corrigé :

Les matrices font apparaître des blocs invariants de taille 1×1 : les représentations T_j sont la somme directe de deux représentations de dimension 1. Cela vient du fait que C_p est abélien : toutes ses représentation irréductibles sont de dimension 1.

c) Combien y-a-t-il de représentations irréductibles inéquivalentes ? En donner une liste.

Corrigé :

De la relation $p = \sum_\rho^2$ on déduit, puisqu'ici $n_\rho = 1$, le fait qu'il y a n représentation inéquivalentes, les ϵ_j pour $j \in \{0, \cdots p-1\}$.

---

2. Montrer que les matrices $\{\mathbb{1}, A_j, \cdots A_j^{p-1}, B, BA_j, \cdots BA_j^{p-1}\}$ forment une représentation de D_{2p}, notée également T_j. On précisera le lien entre chacune de ces matrices et les symétries identifiées au I.

Corrigé :

Avec l'identification $T_j(r^{-1}) = A_j$, $T_j(s_1) = B$, $T_j(s_2) = BA_j$, et plus généralement $T_j(s_k) = BA_j^{k-1}$ on construit une représentation de D_{2p}.

En effet, remarquons tout d'abord qu'un calcul matriciel immédiat donne $B^2 = \mathbb{1}$ en accord avec $s_1^2 = \mathbb{1}$ et $(BA_j)^2 = \mathbb{1}$ en accord avec $s_2^2 = \mathbb{1}$. Enfin, on a vu ci-dessus que $A_j^p = \mathbb{1}$. Il suffit d'utiliser, voir cours, que D_{2p} a pour présentation $\langle s_1\,, s_2 \,|\, s_1^2\,, s_2^2\,, (s_1\, s_2)^p \rangle$ pour conclure : les trois contraintes $T_j(s_1)^2 = \mathbb{1}\,, T_j(s_2)^2 = \mathbb{1}\,, (T_j(s_1)\, T_j(s_2))^p = \mathbb{1}$ sont bien satisfaites, ce qui implique par morphisme que l'on a bien une représentation. On peut de façon équivalente (mais pénible...) vérifier que la loi de groupe est bien préservée par le morphisme, en examinant l'ensemble des produits possibles.

---

3. Calculer la norme du caractère χ_j de la représentation T_j. En déduire que T_j est irréductible pour $1 \leq j \leq p-1$, avec $j \neq p/2$ si p est pair.

Corrigé :

D'une part

$$\chi_j(A_j^k) = \mathrm{Tr}(A_j^k) = \epsilon_j^k + \epsilon_j^{*k}$$

soit

$$|\chi_j(A_j^k)|^2 = \left|\epsilon_j^k + \epsilon_j^{*k}\right|^2 = e^{i4\pi\frac{kj}{p}} + e^{-i4\pi\frac{kj}{p}} + 2$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{p-1} |\chi_j(A_j^k)|^2 = 2p$$

si p est impair ou si $2j \neq p$ dans le cas où p est pair.

D'autre part,

$$BA_j^k = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_j^{*k} \\ \epsilon_j^k & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

et donc $\chi_j(BA_j^k) = 0$. Ainsi $\|\chi_j\|^2 = \frac{1}{2p}\sum_{g\in D_{2p}} \|\chi_j(g)\|^2 = \frac{2p}{2p} = 1$ ce qui montre que T_j est irréductible.

---

4. Que se passe-t-il, dans le cas où p est pair, si $j = p/2$?

Corrigé :

Si $j = p/2$, $\epsilon_j = \epsilon_j^* = -1$ et donc $A_{p/2} = -\mathbb{1}$, donc $A_{p/2}^{2k} = \mathbb{1}$ et $A_{p/2}^{2k+1} = -\mathbb{1}$, d'où $\mathrm{Tr}A_{p/2}^{2k} = 2$ ($k \in \{0, \cdots j-1\}$ et $A_{p/2}^{2k+1} = -2$ ($k \in \{0, \cdots j-1\}$, soit $j = p/2$ termes de chaque espèce. Ainsi $\|\chi_{p/2}\|^2 = \frac{1}{2p}\sum_{g\in D_{2p}} \|\chi_j(g)\|^2 = 4j\frac{1}{2p} = 2$. La représentation $T_{p/2}$ n'est donc pas irréductible. Etant de dimension 2, elle est donc réductible en la somme de deux représentations de dimensions 1, en accord avec l'égalité $\|\chi_{p/2}\| = \sum_\rho m_\rho^2 = 2$ (donc la multiplicité est bien $m_\rho = 2$). On notera le fait que les matrices de cette représentation commutent toutes entre elles, ce qui permet en utilisant le lemme de Schur d'en déduire que cette représentation est multiple de l'identité, et donc une double copie d'une représentation de dimension 1, ce qui évite de passer par le calcul de $\|\chi_{p/2}\|$.

---

5. Discuter le cas $j = 0$.

Corrigé :

Le cas $j = 0$ fournit une autre représentation de dimensions 2 réductible en deux représentations de dimension 1.

6. Montrer que les représentations T_j avec $1 \leq j < p/2$ sont inéquivalentes.

Corrigé :

Soient j, j' deux entiers distincts tels que $1 \leqslant j < \frac{p}{2}$ et $1 \leqslant j' < \frac{p}{2}$, alors $0 < j + j' < p$ et $0 < j - j' < p$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_j(A_j^k)\chi_{j'}^*(A_j^k) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{i2\pi\frac{kj}{p}} + e^{-i2\pi\frac{kj}{p}}\right)\left(e^{i2\pi\frac{kj'}{p}} + e^{-i2\pi\frac{kj'}{p}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}\left[e^{i2\pi\frac{k(j+j')}{p}} + e^{i2\pi\frac{k(j-j')}{p}} + e^{-i2\pi\frac{k(j+j')}{p}} + e^{-i2\pi\frac{k(j-j')}{p}}\right]$$

$$= \frac{1 - e^{i2\pi(j+j')}}{1 - e^{i2\pi\frac{k(j+j')}{p}}} + \frac{1 - e^{i2\pi(j-j')}}{1 - e^{i2\pi\frac{k(j-j')}{p}}} + \frac{1 - e^{-i2\pi(j+j')}}{1 - e^{-i2\pi\frac{k(j+j')}{p}}} + \frac{1 - e^{-i2\pi(j-j')}}{1 - e^{-i2\pi\frac{k(j-j')}{p}}} = 0\,,$$

et donc T_j et $T_{j'}$ sont inéquivalentes.

7. Montrer que D_{2p} possède, dans le cas p impair, $(p-1)/2$ représentation irréductibles inéquivalentes de dimension 2 et deux de dimension 1, et dans le cas p pair, $p/2 - 1$ représentations irréductibles de dimensions 2 et quatre de dimension 1.

Corrigé :

On tire des questions précédentes le fait que :

- dans le cas p pair, les représentations T_j avec $j = 1, \cdots, \frac{p}{2} - 1$ sont irréductibles, inéquivalentes, de dimensions 2. On a en outre 4 représentations irréductibles de dimension 1 (construites à partir des représentations réductibles $j = 0$ et $j = p/2$).
- dans le cas p impair, les représentations T_j avec $j = 1, \cdots, \frac{p-1}{2}$ sont irréductibles, inéquivalentes, de dimensions 2. On a en outre 2 représentations irréductibles de dimension 1 (construites à partir de la représentation réductible $j = 0$).

8. Montrer finalement que l'on a bien obtenu toutes les représentations irréductibles, à équivalence près.

Corrigé :

On vérifie que la somme $2p = \sum_\rho n_\rho^2$ (où la somme porte sur toute les représentations irréductibles inéquivalentes, et où n_ρ est la dimension de la représentation ρ) est saturée dans chacun des deux cas p pair et p impair par les représentations identifiées ci-dessus :

- dans le cas p pair, on a

$$\left(\frac{p}{2}-1\right) \times 2^2 + 4 \times 1^2 = (p-2)2 + 4 = 2p\,.$$

- dans le cas p impair, on a

$$\frac{p-1}{2} \times 2^2 + 2 \times 1^2 = (p-1)2 + 2 = 2p\,.$$