M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

Symétries en physique

Examen du 9 avril 2015

1 Murs de domaine

Soit un champ scalaire $\phi(x,t)$ réel défini dans un espace-temps à deux dimensions, d'action :

$$S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x\ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \left(\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) \right) , \tag{1}$$

où $V(\phi)$ est une fonction de paire dans la variable ϕ, ne dépendant pas explicitement des coordonnées (x,t).

1. Donner les équations du mouvement associées.

Correction :

$\Box \phi = -V'(\phi)$

On s'intéresse maintenant aux symétries de ce problème physique.

2. Calculer la variation au premier ordre de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ lors d'une translation spatiale $(x,t) \mapsto (x+a,t)$; en déduire qu'il s'agit d'une symétrie du système décrit par l'action (1).
3. Obtenir le courant de Noether associé j^μ. Que peut-on construire à l'aide de j^0 ?

Correction :

- **On a $\delta\phi = a\partial_x \phi$ donc $\delta\mathcal{L} = a\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \delta\phi\right) = a\partial_x \mathcal{L}$.**
- **On a $\delta\mathcal{L} = a\partial_\mu F^\mu$ avec $F^\mu = (0, \partial_x \mathcal{L})$ donc il s'agit d'une symétrie.**
- **Le courant de Noether associé est $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi - F^\mu$, soit**

$$j^\mu = a\left(\dot{\phi}\phi', -(\phi')^2 - \mathcal{L}\right) .$$

On en déduit une quantité conservée $Q = \int \mathrm{d}x\, \dot{\phi}\phi'$, *impulsion de champ*.

Le système possède également une symétrie discrète « interne », c'est-à-dire agissant sur ϕ lui-même et non sur l'espace-temps.

4. Donner cette symétrie et les représentations irréductibles du groupe qu'elle engendre.

Correction :

- **Symétrie d'inversion $\mathcal{I}$: $\phi \mapsto -\phi$.**
- **le groupe abélien $\{e, \mathcal{I}\}$ possède deux classes de conjugaison, donc deux représentations irréductibles, de dimension 1. L'une est la représentation triviale et pour l'autre $D(\mathcal{I}) = -1$.**

On considère que le potentiel V est donné par :

$$V(\phi^2) = -\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{2}$$

5. Tracer ce potentiel et indiquer la position des minima.
6. Donner les solutions *constantes* des équations du mouvement, notées par la suite $\phi_\pm$.
7. Quelle est l'action de la symétrie discrète discutée précédemment sur ces solutions ?
8. En déduire, en justifiant soigneusement, que cette symétrie est spontanément brisée dans l'état de plus basse énergie du système.

Correction :

- **Double puits de potentiel ; les minima se situent en $\phi_\pm = \pm m\sqrt{2/\lambda}$.**
- **$\mathcal{I}$ échange les deux minima : $\mathcal{I}$: $\phi_\pm \mapsto -\phi_\mp$.**
- **Le choix de l'un des états fondamentaux $\phi_\pm$ brise l'invariance sous l'inversion de la théorie. Dans un espace d'extension infinie, le coût en énergie d'une transition d'un minima à l'autre est infini ; il s'agit donc d'une brisure spontanée de symétrie.**

On va considérer maintenant des solutions particulières des équations du mouvement $\phi_a(x)$, indépendantes du temps, définies par les conditions asymptotiques suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \phi_a(x,t) = \phi_+ \ , \quad \lim_{x\to-\infty} \phi_a(x,t) = \phi_- \ . \tag{3}$$

9. Justifier qualitativement le fait que ces solutions brisent nécessairement l'invariance par translation spatiale de la théorie.

Correction :

- **Pour interpoler entre les valeurs ϕ_+ et ϕ_- en $\pm\infty$ le profil de ϕ doit nécessairement varier en fonction de x ; toute fonction non-constante n'est pas invariante par translation.**

On cherche explicitement ces solutions sous la forme :

$$\phi_a(x,t) = \alpha \tanh(\beta(x-a)) \tag{4}$$

10. Trouver les valeurs possibles de α et β à l'aide des équations du mouvement ;
11. Donner graphiquement l'allure de ces solutions, qui sont des exemples de *solitons* ;

Correction :

- **On a $-\phi_a'' - m^2\phi_a + \lambda\phi_a^3 = \alpha \tanh(\beta(x-a)) \left[\alpha^2\lambda - m^2 + \frac{2\beta^2-\alpha^2\lambda}{\sinh^2(\beta(x-a))}\right]$. On a donc $2\beta^2 - \alpha^2\lambda = 0$ et $\alpha^2\lambda = m^2$, soit $\alpha = m/\sqrt{\lambda}$ et $\beta = m/\sqrt{2}$ avec les conditions asymptotiques demandées.**
- **La fonction ϕ_a « saute » de la valeur ϕ_- à la valeur ϕ_+ dans une zone de largeur d'ordre $1/m$.**

On s'intéresse maintenant aux fluctuations de ϕ autour de ces solutions, c'est-à-dire que l'on pose

$$\phi(x,t) = \phi_a(x) + \delta\phi(x,t)\,. \tag{5}$$

12. Montrer que le développement du lagrangien (1) au second ordre dans les fluctuations donne

$$L_{\delta\phi} = \int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}(\dot{\delta\phi})^2 - \frac{1}{2}(\delta\phi')^2 + \frac{1}{2}(m^2 - 3\lambda\phi_a^2)(\delta\phi)^2\right] \tag{6}$$

13. Écrire l'équation du mouvement associée pour le champ $\delta\phi$.

Correction :

- $\boldsymbol{\mathcal{L}(\phi_a + \delta\phi, \partial_\mu\phi_a + \partial_\mu\delta\phi) = \mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2\phi}(\delta\phi)^2}$
$\boldsymbol{+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2(\partial_\mu\phi)}(\partial_\mu\delta\phi)^2 + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\phi\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\partial_\mu\delta\phi}$.
Les termes linéaires en $\delta\phi$ ne donnent qu'une dérivée totale car ϕ_a est solution des équations du mouvement. D'autre part le dernier terme est nul car le terme cinétique ne dépend pas de ϕ, d'où le résultat.
- **L'équation du mouvement est simplement $\Box\delta\phi = (m^2 - 3\lambda\phi_a^2)\delta\phi$.**

Les modes d'énergie $\hbar\omega$ pour le champ $\delta\phi$ sont des solutions de la forme

$$\delta\phi_\omega(x,t) = e^{i\omega t}\hat{f}_\omega(x)\,. \tag{7}$$

14. Expliquer pourquoi, *sans calcul*, on s'attend à obtenir un mode d'énergie nulle et donner son interprétation. Trouver la forme explicite de ces solutions sous la forme $f_0(x) = 1/\cosh^2(\beta(x - a))$.

Correction :

- **Il s'agit d'une conséquence de la brisure spontanée d'une symétrie continue, d'après le théorème de Goldstone (cf. TD3) ; il correspond à une translation du soliton.**

– **On a d'une part**

$$\begin{aligned}
\delta\phi''_\omega &= m^2 \left[-\frac{1}{\cosh^4(\beta(x-a))} + 2\,\frac{\tanh^2(\beta(x-a))}{\cosh^2(\beta(x-a))} \right] e^{i\omega t} \\
&= m^2 \left[-\frac{3}{\cosh^4(\beta(x-a))} + \frac{2}{\cosh^2(\beta(x-a))} \right] e^{i\omega t},
\end{aligned}$$

en utilisant l'identité $\cosh^2(\beta(x-a)) - \sinh^2(\beta(x-a)) = 1$, et d'autre part

$$\begin{aligned}
(m^2 - 3\lambda\phi_a^2)\delta\phi_\omega &= m^2[1 - 3\tanh^2(\beta(x-a))]\frac{1}{\cosh^2(\beta(x-a))}\, e^{i\omega t} \\
&= m^2 \left[\frac{3}{\cosh^4(\beta(x-a))} - \frac{2}{\cosh^2(\beta(x-a))} \right] e^{i\omega t},
\end{aligned}$$

On obtient donc, dans la limite $\omega = 0$,

$$\Box\delta\phi_\omega - (m^2 - 3\lambda\phi_a^2)\delta\phi_\omega = -\omega^2\delta\phi_\omega - \delta\phi''_\omega - (m^2 - 3\lambda\phi_a^2)\delta\phi_\omega = -\omega^2\delta\phi_\omega\,.$$

qui s'annule dans la limite $\omega = 0$, ce qui prouve le résultat demandé.

---

2 Algèbre de Lie des groupes $GL(n,\mathbb{R})$, et $GL(n,\mathbb{C})$,

On considère le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ des matrices $n\times n$ inversibles à coefficients réels.

1. (a) Justifier le fait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices $n\times n$ à coefficients réels.

   (b) Quelle est l'algèbre de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$?

Correction :

a) Le résultat est immédiat en développant autour de l'identité : par continuité, la somme de l'identité et d'une matrice de norme petite devant 1 est elle-même inversible.
b) C'est $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{C})$.

On introduit la base de Weyl e_{ij} , les e_{ij} ayant pour éléments de matrices

$$(e_{ij})_{\ell k} = \delta_{i\ell}\,\delta_{jk}\,. \tag{8}$$

2. (a) Justifier le fait que cette base constitue une base de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

   (b) Même question pour $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Correction :

a) Ces matrices sont linéairement indépendantes et engendrent $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{R})$. Elle sont au nombre de $\boldsymbol{n^2 = \dim\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})}$.
b) Sur $\mathbb{C}$ ces matrices sont également linéairement indépendantes et engendrent $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{C})$. Donc $\boldsymbol{\dim\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = n^2}$.

---

3. Montrer que

$$[e_{ij}\,, e_{k\ell}] = \delta_{jk}\,e_{i\ell} - \delta_{i\ell}\,e_{kj}\,. \tag{9}$$

Correction :

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{e_{ij}}\,,\boldsymbol{e_{k\ell}}]_{pq} &= (\boldsymbol{e_{ij}})_{pm}(\boldsymbol{e_{k\ell}})_{mq} - (\boldsymbol{e_{k\ell}})_{pm}(\boldsymbol{e_{ij}})_{mq} \\
&= \boldsymbol{\delta_{ip}\,\delta_{jm}\,\delta_{km}\,\delta_{\ell q} - \delta_{kp}\,\delta_{\ell m}\,\delta_{im}\,\delta_{jq}} \\
&= \boldsymbol{\delta_{ip}\,\delta_{jk}\,\delta_{\ell q} - \delta_{kp}\,\delta_{\ell i}\,\delta_{jq}} \\
&= [\boldsymbol{\delta_{jk}\,e_{i\ell} - \delta_{i\ell}\,e_{kj}}]_{pq}\,,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve le résultat demandé.

---

4. En déduire l'expression des constantes de structure C définies par

$$[e_{ij}\,,e_{k\ell}] = C_{ij,k\ell}{}^{rs}\,e_{rs}\,. \tag{10}$$

<u>**Correction**</u> **:**

On tire immédiatement du résultat (9) **que**

$$\boldsymbol{C_{ij,k\ell}{}^{rs}\,e_{rs} = \delta_{jk}\,\delta^r_i\,\delta^s_\ell - \delta_{i\ell}\,\delta^r_k\,\delta^s_j}\,.$$

---

5. On s'intéresse maintenant à la représentation adjointe de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.
   (a) Préciser l'expression de $\mathrm{ad}\,e_{ij}(e_{k\ell})$.
   (b) Dans le cas $n=2$ écrire explicitement $\mathrm{ad}\,e_{11}$, $\mathrm{ad}\,e_{12}$, $\mathrm{ad}\,e_{21}$, $\mathrm{ad}\,e_{22}$, dans la base $(e_{11},e_{12},e_{21},e_{22})$.

<u>**Correction**</u> **:**

a) On a bien sûr

$$\mathbf{ad}\,\boldsymbol{e_{ij}(e_{k\ell}) = [e_{ij}\,,e_{k\ell}] = \delta_{jk}\,e_{i\ell} - \delta_{i\ell}\,e_{kj}}$$

d'après (9)**.**

b)

$$\boldsymbol{\mathrm{ad}\, e_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}\, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{ad}\, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}\, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Un représentation D d'un groupe de Lie G (resp. une représentation d d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) est dite fidèle si $\ker D = \{e\}$, où e est l'élément neutre de G (resp. si $\ker d = 0$, l'élement nul de $\mathfrak{g}$).

6. Que peut-on dire de la représentation adjointe de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$?

<u>Correction</u> :

La représentation adjointe n'est pas fidèle car $\boldsymbol{\mathrm{ad}\, e_{11} = -\mathrm{ad}\, e_{22}}$.

On note

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |0,0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

les vecteurs propres de e_{11} exprimés dans la base $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$.

7. (a) Montrer que la représentation adjointe laisse invariant le sous-espace engendré par $|1,1\rangle, |1,-1\rangle, |1,0\rangle$, et qu'elle envoie le vecteur $|0,0\rangle$ sur le vecteur nul.

   (b) En déduire une décomposition de la représentation adjointe en somme de deux représentations irréductibles.

Correction :

a) On trouve

$$\begin{array}{llllllll}
e_{11}\,|1,1\rangle &= |1,1\rangle\,, & e_{11}\,|1,-1\rangle &= -|1,-1\rangle\,, & e_{11}\,|1,0\rangle &= 0\,, & e_{11}\,|0,0\rangle &= 0\,,\\
e_{12}\,|1,1\rangle &= 0\,, & e_{12}\,|1,-1\rangle &= |1,0\rangle\,, & e_{12}\,|1,0\rangle &= -2|1,1\rangle\,, & e_{12}\,|0,0\rangle &= 0\,,\\
e_{21}\,|1,1\rangle &= -|1,0\rangle\,, & e_{21}\,|1,-1\rangle &= 0\,, & e_{21}\,|1,0\rangle &= 2|1,-1\rangle\,, & e_{21}\,|0,0\rangle &= 0\,,\\
e_{22}\,|1,1\rangle &= -|1,1\rangle\,, & e_{22}\,|1,-1\rangle &= |1,-1\rangle\,, & e_{212}\,|1,0\rangle &= 0|1,-1\rangle\,, & e_{0}\,|0,0\rangle &= 0\,.
\end{array}$$

b) Le résultat précédent permet de montrer que la représentation adjointe se décompose en deux parties irréductibles, de dimension 3 et 1.

On rappelle que la forme de Cartan-Killing sur une algèbre $\mathfrak{g}$ s'écrit

$$\forall X\,,Y\ \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\,,\quad (X\,,Y) \equiv \mathrm{Tr}\,[\mathrm{ad}X\ \mathrm{ad}Y]\,. \tag{12}$$

8. (a) Montrer, en utilisant le résultat de la question 5. a), que sur $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$,

$$(X\,,Y) = 2\,n\,\mathrm{Tr}\,[X\,Y] - 2\,\mathrm{Tr}X\ \mathrm{Tr}Y\,. \tag{13}$$

Il sera utile de décomposer X et Y sur la base des e_{ij} , i.e.

$$X = x^{ij}e_{ij} \quad \text{et} \quad Y = y^{ij}e_{ij}\,.$$

On pourra utiliser dans le calcul l'égalité (que l'on justifiera) :

$$a^k{}_k = a_k{}^k = \mathrm{Tr}\,a\,. \tag{14}$$

(b) Quelle est l'expression de $(X\,,Y)$ dans le cas de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$?

Correction :

a) D'après la question 5. a), en écrivant $\boldsymbol{X = x^{ij}e_{ij}}$ et $\boldsymbol{Y = y^{ij}e_{ij}}$, on a

$$\boldsymbol{\mathrm{ad}\,Y(e_{kl}) = (y^r{}_k\,\delta^s_\ell - y_\ell{}^s\,\delta^r_k)\,e_{rs}} \tag{15}$$

et

$$\boldsymbol{\mathrm{ad}\,X(e_{rs}) = (x^m{}_r\,\delta^n_s - x_s{}^n\,\delta^m_r)\,e_{mn}\,.} \tag{16}$$

Donc

$$\mathrm{ad}\,\boldsymbol{X}\,\mathrm{ad}\,\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{e}_{k\ell}) = (\boldsymbol{x}^{m}{}_{r}\,\boldsymbol{\delta}^{n}_{s} - \boldsymbol{x}_{s}{}^{n}\,\boldsymbol{\delta}^{m}_{r})\,(\boldsymbol{y}^{r}{}_{k}\,\boldsymbol{\delta}^{s}_{\ell} - \boldsymbol{y}_{\ell}{}^{s}\,\boldsymbol{\delta}^{r}_{k})\,\boldsymbol{e}_{mn}\,. \tag{17}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{X}\,\mathrm{ad}\,\boldsymbol{Y}) &= (\boldsymbol{x}^{m}{}_{r}\,\boldsymbol{\delta}^{n}_{s} - \boldsymbol{x}_{s}{}^{n}\,\boldsymbol{\delta}^{m}_{r})\,(\boldsymbol{y}^{r}{}_{k}\,\boldsymbol{\delta}^{s}_{\ell} - \boldsymbol{y}_{\ell}{}^{s}\,\boldsymbol{\delta}^{r}_{k})\,\boldsymbol{\delta}^{k}_{m}\,\boldsymbol{\delta}\ell_{n} \\
&= (\boldsymbol{x}^{k}{}_{r}\,\boldsymbol{\delta}^{\ell}_{s} - \boldsymbol{x}_{s}{}^{\ell}\,\boldsymbol{\delta}^{k}_{r})\,(\boldsymbol{y}^{r}{}_{k}\,\boldsymbol{\delta}^{s}_{\ell} - \boldsymbol{y}_{\ell}{}^{s}\,\boldsymbol{\delta}^{r}_{k}) \\
&= \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{x}^{k}{}_{r}\,\boldsymbol{y}^{r}{}_{k} - \boldsymbol{x}^{k}{}_{k}\,\boldsymbol{y}_{\ell}{}^{\ell} - \boldsymbol{x}_{\ell}{}^{\ell}\,\boldsymbol{y}^{k}{}_{k} + \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{x}_{s}{}^{\ell}\,\boldsymbol{y}_{\ell}{}^{s} \\
&= \mathbf{2}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{Y}) - \mathbf{2}\mathrm{Tr}\boldsymbol{X}\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{Y}\,,
\end{aligned}$$

q.e.d.

Preuve de $\boldsymbol{a}^{k}{}_{k} = \boldsymbol{a}_{k}{}^{k} = \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}_{i}{}^{i} = \boldsymbol{g}_{ik}\,\boldsymbol{g}^{i\ell}\,\boldsymbol{a}^{k}{}_{\ell} = \boldsymbol{\delta}^{\ell}_{k}\,\boldsymbol{a}^{k}{}_{\ell} = \boldsymbol{a}^{\ell}{}_{\ell}$$

ou encore, matriciellement,

$$(\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{g}^{-1})_{ij} = \boldsymbol{g}_{ik}\,\boldsymbol{a}^{k}{}_{\ell}\,\boldsymbol{g}^{\ell j} = \boldsymbol{a}_{i}{}^{j}$$

et donc $\boldsymbol{a}_{i}{}^{i} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{g}^{-1}) = \mathrm{Tr}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\ell}{}_{\ell}$.

b) Le résultat est inchangé, le corps ne jouant aucun rôle dans la preuve.

---

9. Le groupe $GL(n\,,\mathbb{C})$ est-il semi-simple ?

Correction :

Non, car l'ensemble $\{a\mathbb{1}\,/a \in \mathbb{C}\}$ est un sous-groupe abélien invariant de $GL(n\,,\mathbb{C})$.

---

10. Retrouver ce résultat au niveau de l'algèbre $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Correction :

Il suffit d'utiliser le résultat (13), qui montre que $\forall \boldsymbol{X} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\,,(\boldsymbol{X}\,,\mathbb{1}) = \mathbf{0}$, ce qui prouve que la forme de Killing est dégénérée, et donc que $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ n'est pas semi-simple.

Bonus : algèbres de Lie des groupes $SL(n,\mathbb{C})$ et $SL(n,\mathbb{R})$

On considère à présent le groupe $SL(n,\mathbb{C})$ constitué des matrices $n\times n$ inversibles à coefficients complexes, de déterminant 1.

11. Justifier le fait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ soit constituée des matrices $n\times n$ à coefficients complexes de trace nulle.

Correction :

Le résultat est immédiat en utilisant la relation $\det(1+\varepsilon X) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} X + O(\varepsilon^2)$.

---

12. Donner une expression de la forme de Cartan-Killing (X,Y) pour les algèbres $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ et $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

Correction :

$$(X\,,Y) = 2\,n\operatorname{Tr}(X\,Y)\,, \tag{18}$$

puisque X et Y sont de trace nulle.

On considère la famille de vecteur $\tilde{e}_{ij}$ définis par

$$\forall i \in \{1\,,\cdots\,,n-1\}\,,\quad \tilde{e}_{ii} \;=\; e_{ii} - e_{i+1\,,i+1} \tag{19}$$

$$\forall i \neq j\,,\quad \tilde{e}_{ij} \;=\; e_{ij}\,. \tag{20}$$

13. Justifier le fait que cette famille constitue une base de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ et de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. En déduire la dimension de ces algèbres.

Correction :

Les vecteurs $\tilde{e}_{ij}$ sont de trace nulle. L'indépendance linéaire de la famille des $n(n-1)$ vecteurs $\tilde{e}_{ij}$ $(i\neq j)$ est immédiate, de même que celle de la famille constituée de ces $n(n-1)$ vecteurs à laquelle on ajoute un vecteur $\tilde{e}_{ii}$ quelconque. Reste à montrer l'indépendance linéaire de la famille des $n-1$ vecteurs $\tilde{e}_{ii}$. La preuve est immédiate en

écrivant $\lambda_1\,\tilde{e}_{11}+\cdots+\lambda_{n-1}\,\tilde{e}_{n-1\,,n-1}=0$ qui s'écrit encore $\lambda_1\,(e_{11}-e_{22})+\lambda_2\,(e_{22}-e_{33})\cdots+\lambda_{n-1}\,(e_{n-1,n-1}-e_{nn})=0$ ce qui conduit immédiatement é $\lambda_i=0\,,\ \forall i\in\{1\,,\cdots\,,n-1\}\,,$ par indépendance linéaire des e_{ii} . Dans cette preuve le corps ne joue aucun rôle.
La dimension de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ et de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ est donc, respectivement par rapport aux corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, $n(n-1)+n-1=n^2-1$.

On ordonne cette base dans l'ordre

$$\tilde{e}_{11}\,,\tilde{e}_{22}\,,\cdots\,,\tilde{e}_{n-1,\,n-1}\,,\tilde{e}_{12}\,,\tilde{e}_{21}\,,\tilde{e}_{13}\,,\tilde{e}_{31}\,,\cdots\,,\tilde{e}_{n,\,n-1}\,.$$

14. Dans cette base, donner l'expression de la matrice g de la forme de Cartan-Killing pour les algèbres $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

<u>Correction</u> :
La première étape est de remarquer que les seuls produits $e_{ij}\cdot e_{k\ell}$ non nuls sont d'une part les carrés du type $e_{ii}^2=e_{ii}$ et d'autre part les produit du type $e_{ij}\cdot e_{ji}=e_{ii}$ (sans sommation ni sur i ni sur j dans ces deux cas). On en déduit alors aisément le produit des différents $\tilde{e}_{ij}$.
D'une part, les seuls termes non nuls mettant en jeu des termes du type $\tilde{e}_{ij}$ avec $i\neq j$ sont $\tilde{e}_{ij}\cdot\tilde{e}_{ji}=\tilde{e}_{ii}$ (sans sommation ni sur i ni sur j).
D'autre part, $\forall i\in\{1,\cdots n-1\}\,,$

$$\tilde{e}_{ii}^2 \;=\; (e_{ii}-e_{i+1,\,i+1})^2=e_{ii}^2+e_{i+1,\,i+1}^2=e_{ii}+e_{i+1,\,i+1}$$

puisque les termes croisés sont nuls, et

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{i+1,\,i+1}\cdot\tilde{e}_{i,\,i} &= (e_{i+1,\,i+1}-e_{i+2,\,i+2})\cdot(e_{i,\,i}-e_{i+1,\,i+1})\\ &= -e_{i+1,\,i+1}=-\tilde{e}_{i+1,\,i+1}\,,\end{aligned}$$

et de même $\tilde{e}_{i,\,i}\cdot\tilde{e}_{i+1,\,i+1}=-\tilde{e}_{i+1,\,i+1}$.
Les autres termes du type $\tilde{e}_{i,\,i}\cdot\tilde{e}_{j,\,j}=0$ pour $|i-j|>1$. Il suffit maintenant de prendre

la trace des termes ainsi obtenus, ce qui conduit, en notant $\tilde{e}_i \equiv \tilde{e}_{ii}$, à

$$
\frac{1}{n}g =
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 & \tilde{e}_4 & \cdots & \tilde{e}_{n-1} & \tilde{e}_{12} & \tilde{e}_{21} & \tilde{e}_{13} & \tilde{e}_{31} & \cdots & \tilde{e}_{n,n-1} & \tilde{e}_{n-1,n} \end{array} \\
\begin{array}{c} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \\ \tilde{e}_4 \\ \vdots \\ \\ \tilde{e}_{n-1} \\ \tilde{e}_{12} \\ \tilde{e}_{21} \\ \tilde{e}_{13} \\ \tilde{e}_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{e}_{n-1,n} \\ \tilde{e}_{n,n-1} \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & \\
-1 & 2 & -1 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & & & & & \\
0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & & 2 & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

---

15. Vérifier que cette matrice s'écrit, dans le cas de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$,

$$
g = n \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}
$$

<u>Correction</u> :

Le résultat est immédiat d'après la question précédente.

---

16. Discuter la semi-simplicité et la compacité de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

<u>**Correction**</u> **:**

Du calcul de det $g = -2$ on déduit que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sont semi-simples. Les valeurs propres de g sont -1, 1 et 2, ce qui montre que g n'est pas définie négative. Donc $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ n'est pas compacte. Bien sûr, comme toute $\mathbb{C}-$algèbre de Lie, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ n'est pas compacte, la forme de Killing n'étant pas négative sur le corps des complexes.
