Université Pierre et Marie Curie

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Examen de 1ère session

jeudi 30 mars 2017

1 Représentations irréductibles de SU(2)

L'objet de ce problème est de construire les représentations irréductibles de SU(2), en suivant la méthode de Schwinger.

On considère deux oscillateurs harmoniques indépendants et leurs opérateurs de création et d'annihilation respectifs $a_1^\dagger$, a_1 et $a_2^\dagger$, a_2 vérifiant les relations de commutation

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{1}$$

On pose

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \qquad a^\dagger = (a_1^\dagger \; a_2^\dagger)\,. \tag{2}$$

On note σ_i les matrices de Pauli, dont on rappelle les expressions :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{3}$$

1. Quelle est l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $J_i = \frac{1}{2} a^\dagger \sigma_i \, a$? *Un bonus sera donné aux calculs menés de façon intrinsèque, sans spécifier les indices des opérateurs* J_i .

Corrigé :

On a immédiatement

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)\,, \\ J_2 &= \frac{i}{2}(-a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)\,, \\ J_3 &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)\,. \end{aligned}$$

Plutôt que d'utiliser ces formes explicites, examinons $[J_i, J_j]$.

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \frac{1}{4}[a^\dagger \sigma_i a, a^\dagger \sigma_j a] = \frac{1}{4}[a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'}, a^\dagger_\alpha \sigma_j^{\alpha\beta} a_\beta] \\
&= \frac{1}{4}(a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'} a^\dagger_\alpha \sigma_j^{\alpha\beta} a_\beta - a^\dagger_\alpha \sigma_j^{\alpha\beta} a_\beta a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'}) \\
&= \frac{1}{4}(a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta'} \sigma_j^{\alpha\beta} a_\beta + a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a^\dagger_\alpha a_{\beta'} \sigma_j^{\alpha\beta} a_\beta - a^\dagger_\alpha \sigma_j^{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'} - a^\dagger_\alpha \sigma_j^{\alpha\beta} a^\dagger_{\alpha'} a_\beta \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'}) \,.
\end{aligned}
$$

Le second et le quatrième terme de la dernière ligne de l'équation précédente se compensent à cause du fait que d'une part $\sigma_j^{\alpha\beta}$ et $\sigma_i^{\alpha'\beta'}$ sont des $\mathbb{C}-$nombres, qui commutent, et que d'autre part $[a^\dagger_\alpha, a^\dagger_{\alpha'}] = [a_\beta, a_{\beta'}] = 0$. On obtient donc finalement

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \frac{1}{4}(\sigma_i^{\alpha'\alpha} \sigma_j^{\alpha\beta} a^\dagger_{\alpha'} a_\beta - \sigma_j^{\alpha\beta} \sigma_i^{\beta\beta'} a^\dagger_\alpha a_{\beta'}) = \frac{1}{4}(\sigma_i^{\alpha\delta} \sigma_j^{\delta\beta} - \sigma_j^{\alpha\delta} \sigma_i^{\delta\beta}) a^\dagger_\alpha a_\beta \\
&= \frac{1}{4} i\, \epsilon_{ijk} \sigma_k^{\alpha\beta} a^\dagger_\alpha a_\beta = i\, \epsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}
$$

ce qui montre que l'algèbre de Lie engendrée par les J_i est celle de $su(2)$.

---

2. Introduisons les opérateurs "nombre d'occupation"

$$
N_1 = a_1^\dagger a_1 \qquad \text{et} \qquad N_2 = a_2^\dagger a_2 \,. \tag{4}
$$

a. Donner l'expression de $[J_i, N_1 + N_2]$.

Corrigé :

$[J_i, N_1 + N_2] = 0$. En effet,

$$
\begin{aligned}
[J_i, N_1 + N_2] &= \frac{1}{2}[a^\dagger \sigma_i a, a^\dagger a] = \frac{1}{2}(a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'} a^\dagger_\alpha a_\alpha - a^\dagger_\alpha a_\alpha a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'}) \\
&= \frac{1}{2}(a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta'} a_\alpha + a^\dagger_{\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a^\dagger_\alpha a_{\beta'} a_\alpha - a^\dagger_\alpha \delta_{\alpha\alpha'} \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'} - a^\dagger_\alpha a^\dagger_{\alpha'} a_\alpha \sigma_i^{\alpha'\beta'} a_{\beta'}) = 0,
\end{aligned}
$$

par simplification entre les 1er et 3ème et 2ème et 4ème termes respectivement.

---

b. Exprimer les opérateurs J_3 et $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ en fonction de N_1 et N_2.

Corrigé :

On a immédiatement

$$
J_3 = \frac{1}{2}(N_1 - N_2)
$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\
&= \frac{1}{4}(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) - \frac{1}{4}(-a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)(-a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) + \frac{1}{4}N_1^2 + \frac{1}{4}N_2^2 - \frac{1}{2}N_1 N_2 \\
&= \frac{1}{4}(a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2) + \frac{1}{4}N_1^2 + \frac{1}{4}N_2^2 - \frac{1}{2}N_1 N_2 \\
&= \frac{1}{2}N_1 N_2 + \frac{1}{2}N_1 + \frac{1}{2}N_2 + \frac{1}{4}N_1^2 + \frac{1}{4}N_2^2 = \frac{N_1 + N_2}{2}\left(\frac{N_1 + N_2}{2} + 1\right)
\end{aligned}$$

la dernière égalité s'établissant grâce aux identités $a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 = N_1 N_2 + N_1$ et $a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 = N_1 N_2 + N_2$.

---

3. On désigne par $|n_1,\, n_2\rangle$ un état propre de N_1 et N_2 :

$$N_1\,|n_1\, n_2\rangle = n_1 |n_1\, n_2\rangle\,, \tag{5}$$

$$N_2\,|n_1\, n_2\rangle = n_2 |n_1\, n_2\rangle\,. \tag{6}$$

On note $|0\rangle$ le vide, qui vérifie donc $A_i|0\rangle = 0$.

a. Donner l'expression de $\vec{J}^2|n_1,\, n_2\rangle$ et de $J_3|n_1,\, n_2\rangle$.

Corrigé :

De la question précédente on tire immédiatement

$$\begin{aligned}
\vec{J}^2|n_1 n_2\rangle &= \frac{n_1 + n_2}{2}\left(\frac{n_1 + n_2}{2} + 1\right)|n_1 n_2\rangle\,, \\
J_3|n_1 n_2\rangle &= \frac{n_1 - n_2}{2}|n_1 n_2\rangle\,.
\end{aligned}$$

---

b. Montrer que

$$[a_i, (a_i^\dagger)^n] = n\,(a_i^\dagger)^{n-1}\,. \tag{7}$$

Corrigé :

Ceci se montre facilement par récurrence :
d'une part $[a_i, a_i^\dagger] = 1$ et d'autre part, si par hypothèse $[a_i, (a_i^\dagger)^n] = n\,(a_i^\dagger)^{n-1}$ alors en utilisant l'identité $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ on a

$$[a_i, (a_i^\dagger)^{n+1}] = [a_i, a_i^\dagger (a_i^\dagger)^n] = [a_i, a_i^\dagger](a_i^\dagger)^n + a_i^\dagger [a_i, (a_i^\dagger)^n] = (a_i^\dagger)^n + n\, a_i^\dagger (a_i^\dagger)^{n-1} = (n+1)(a_i^\dagger)^n\,.$$

---

c. En déduire que

$$|n_1,\, n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}}|0\rangle\,. \tag{8}$$

Corrigé :
Tout d'abord, de la question précédente on tire

$$N_1 (a_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle = a_1^\dagger a_1 (a_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle = a_1^\dagger [a_1, (a_1^\dagger)^{n_1}]|0\rangle + a_1^\dagger (a_1^\dagger)^{n_1} a_1 |0\rangle = n_1 (a_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle\,,$$

puisque $a_1|0\rangle = 0$, ce qui montre finalement que $(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle$ est état propre de N_1 et N_2. Reste à normaliser cet état. En utilisant la relation (7) on obtient facilement

$$\langle 0|a_1^{n_1}(a_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle = \langle 0|a_1^{n_1-1} a_1 (a_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle = n_1 \langle 0|a_1^{n_1-1}(a_1^\dagger)^{n_1-1}|0\rangle = n_1(n_1-1)\cdots 1\langle 0|0\rangle = n_1!$$

En faisant de même pour l'état $(a_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle$ on en déduit finalement le résultat demandé.

---

d. Utiliser ces résultats pour construire une base de vecteurs propres de $\vec{J}^2$ et J_3

$$\vec{J}^2 |j\, m\rangle = j(j+1)|j\, m\rangle \tag{9}$$

$$J_3 |j\, m\rangle = m\,|j, m\rangle\,. \tag{10}$$

Exprimer j et m en fonction des nombres d'occupation n_1 et n_2.

Corrigé :
Il suffit de poser $j = \frac{n_1+n_2}{2}$ et $m = \frac{n_1-n_2}{2}$ *i.e.* $n_1 = j + m$ et $n_2 = j - m$.

---

e. Retrouver les résultats standards de la théorie du moment cinétique.

Corrigé :

Comme $n_1 + n_2 = 2j$ est entier, on en déduit que j est entier ou demi-entier.

D'autre part, $n_1 \geqslant 0$ donc $m \geqslant -j$ et $n_2 \geqslant 0$ donc $j \geqslant m$ d'où finalement $j \geqslant m \geqslant -j$ avec $j + m$ entier.

Enfin

$$\begin{aligned} J_+|jm\rangle &= (J_1 + iJ_2)|jm\rangle = a_1^\dagger a_2 |n_1 n_2\rangle = a_1^\dagger \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} a_2 \frac{(a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |0\rangle \\ &= \sqrt{n_1+1} \frac{(a_1^\dagger)^{n_1+1}}{\sqrt{(n_1+1)!}} n_2 \frac{(a_2^\dagger)^{n_2-1}}{\sqrt{(n_2)!}} |0\rangle \\ &= \sqrt{n_2(n_1+1)} |n_1+1, n_2-1\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j\, m+1\rangle\,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_-|jm\rangle &= (J_1 - iJ_2)|jm\rangle = a_2^\dagger a_1 |n_1 n_2\rangle \\ &= \sqrt{n_1(n_2+1)} |n_1-1, n_2+1\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j\, m-1\rangle\,. \end{aligned}$$

---

3. On se propose de calculer l'élément de matrice $d^j_{mm'}(\theta) = \langle j\, m| e^{-i\theta J_2} |j\, m'\rangle$ en s'appuyant sur les résultats précédents. On considère la fonction génératrice

$$g^j_m(x_1, x_2; \theta) = \sum_{m'} \frac{x_1^{j+m'} x_2^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} d^j_{mm'}(\theta)\,. \tag{11}$$

a. Montrer que

$$g^j_m(x_1, x_2; \theta) = \langle j\, m|\, e^{-i\theta J_2} \frac{(x_1\, a_1^\dagger + x_2\, a_2^\dagger)^{2j}}{(2j)!} |0\rangle\,. \tag{12}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned} g^j_m(x_1, x_2; \theta) &= \langle j\, m| \sum_{m'} \frac{x_1^{j+m'} x_2^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}\, e^{-i\theta J_2}\, \frac{(a_1^\dagger)^{j+m'}\, (a_2^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}} |0\rangle \\ &= \langle j\, m|\, e^{-i\theta J_2} \sum_{m'} \frac{x_1^{j+m'} x_2^{j-m'}}{(j+m')!(j-m')!}\, (a_1^\dagger)^{j+m'}\, (a_2^\dagger)^{j-m'} |0\rangle \\ &= \langle j\, m|\, e^{-i\theta J_2} \frac{(x_1 a_1^\dagger + x_2 a_2^\dagger)^{2j}}{(2j)!} |0\rangle\,. \end{aligned}$$

b. Etablir que

$$g_m^j(x_1, x_2; \theta) = \frac{1}{(2j)!}\langle j\, m| \left[a_1^\dagger \left(x_1 \cos\frac{\theta}{2} - x_2 \sin\frac{\theta}{2}\right) + a_2^\dagger \left(x_2 \cos\frac{\theta}{2} + x_1 \sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^{2j} |0\rangle\,. \quad (13)$$

Indications : il pourra être utile de faire apparaître de façon itérative la structure

$$e^{-i\theta J_2}(x_1 a_1^\dagger + x_2 a_2^\dagger)\, e^{i\theta J_2},$$

et de calculer $u(\theta) = e^{-i\theta J_2} a_1^\dagger e^{i\theta J_2}$ et $v(\theta) = e^{-i\theta J_2} a_2^\dagger e^{i\theta J_2}$, solutions d'un système d'équations différentielles.

Corrigé :

$$e^{-i\theta J_2}(x_1 a_1^\dagger + x_2 a_2^\dagger)^{2j} = \left[e^{-i\theta J_2}(x_1 a_1^\dagger + x_2 a_2^\dagger)\, e^{i\theta J_2}\right]^{2j} e^{-i\theta J_2}\,.$$

Or

$$e^{-i\theta J_2}|0\rangle = |0\rangle\,.$$

Posons

$$\alpha(\theta) = e^{-i\theta J_2}(x_1 (a_1)^\dagger + x_2 (a_2)^\dagger) e^{i\theta J_2} = x_1 u + x_2 v\,.$$

On a alors

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = i e^{-i\theta J_2}[x_1 (a_1)^\dagger + x_2 (a_2)^\dagger, J_2] e^{i\theta J_2}$$

soit donc

$$\frac{du}{d\theta} = i e^{-i\theta J_2}[a_1^\dagger, J_2]\, e^{i\theta J_2}\,,$$
$$\frac{dv}{d\theta} = i e^{-i\theta J_2}[a_2^\dagger, J_2]\, e^{i\theta J_2}\,.$$

Or

$$\begin{aligned} [a_1^\dagger, J_2] &= -\frac{i}{2} a_2^\dagger \\ [a_2^\dagger, J_2] &= \frac{i}{2} a_1^\dagger\,, \end{aligned}$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{du}{d\theta} & = & \dfrac{v}{2} \\ \\ \dfrac{dv}{d\theta} & = & -\dfrac{u}{2}\,. \end{array} \right.$$

Posons

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\,,$$

alors

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{i}{2}\sigma_2\, w$$

dont la solution s'écrit

$$w = e^{\frac{i}{2}\sigma_2\theta} w_0 = \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sigma_2 \sin\frac{\theta}{2}\right)\, w_0\,.$$

En $\theta = 0$

$$w = \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}\,,$$

et donc

$$w = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} a_1^\dagger + \sin\frac{\theta}{2} a_2^\dagger \\ \cos\frac{\theta}{2} a_2^\dagger - \sin\frac{\theta}{2} a_1^\dagger \end{pmatrix}\,,$$

d'où

$$e^{-i\theta J_2}(x_1(a_1)^\dagger + x_2(a_2)^\dagger)e^{i\theta J_2} = a_1^\dagger\left(x_1\cos\frac{\theta}{2} - x_2\sin\frac{\theta}{2}\right) + a_2^\dagger\left(x_2\cos\frac{\theta}{2} + x_1\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

ce qui permet finalement d'établir le résultat demandé.

---

c. En déduire une forme explicite de $g_m^j(x_1,\, x_2; \theta)$.

Corrigé :

$$g^j_m(x_1,x_2;\theta) = \frac{1}{(2j)!}\langle j\,m|\left[a_1^\dagger\left(x_1\cos\frac{\theta}{2} - x_2\sin\frac{\theta}{2}\right) + a_2^\dagger\left(x_2\cos\frac{\theta}{2} + x_1\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^{2j}|0\rangle$$

$$= \sum_{m'=-j}^{j} \frac{\langle j\,m|(a_1^\dagger)^{j+m'}\left(x_1\cos\frac{\theta}{2} - x_2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+m'}(a_2^\dagger)^{j-m'}\left(x_2\cos\frac{\theta}{2} + x_1\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m'}|0\rangle}{(j+m')!(j-m')!}$$

$$= \sum_{m'=-j}^{j} \frac{\langle j\,m|\left(x_1\cos\frac{\theta}{2} - x_2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+m'}\left(x_2\cos\frac{\theta}{2} + x_1\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m'}|jm'\rangle}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}$$

$$= \frac{\left(x_1\cos\frac{\theta}{2} - x_2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(x_2\cos\frac{\theta}{2} + x_1\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\,.$$

d. Donner finalement l'expression de $d^j_{mm'}(\theta)$ en fonction des polynômes de Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{a+n}(1+x)^{b+n}\right]\,. \tag{14}$$

Il pourra être commode de poser $x_1 = -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ et $x_2 = t - \cos^2\frac{\theta}{2}$, puis $x = 2t-1$.

Corrigé :

Posons

$$\begin{cases} x_1 &= -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ x_2 &= t - \cos^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Alors

$$x_1\cos\frac{\theta}{2} - x_2\sin\frac{\theta}{2} = -\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - t\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = -t\sin\frac{\theta}{2}$$

et

$$x_1\sin\frac{\theta}{2} + x_2\cos\frac{\theta}{2} = -\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + t\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} = (t-1)\cos\frac{\theta}{2}\,.$$

Ainsi

$$g^j_m(x_1,x_2;\theta) = \sum_{m''} \frac{\left(-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m''}\left(t-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{j-m''}}{\sqrt{(j+m'')!(j-m'')!}}\,d^j_{mm'}(\theta)\,.$$

Alors

$$\left.\frac{\partial g_m^j}{\partial t^{j-m'}}\right|_{t=\cos^2\frac{\theta}{2}} = (-1)^{j+m'}\sqrt{\frac{(j-m')!}{(j+m')!}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m'} d^j_{mm'}(\theta)\,.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} g_m^j(x_1,x_2;\theta) &= (-1)^{j+m}\frac{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\,t^{j+m}(t-1)^{j-m} \\ &= \frac{(-1)^{2j}}{2^{2j}}\frac{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\,(1+x)^{j+m}(1-x)^{j-m}\,. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial g_m^j}{\partial t^{j-m'}} = 2^{j-m'}\frac{\partial g_m^j}{\partial x^{j-m'}} = \frac{(-1)^{2j}}{2^{j+m'}}\frac{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\,\frac{d^{j-m'}}{dx^{j-m'}}\left\{(1+x)^{j+m}(1-x)^{j-m}\right\}\,.$$

Avec $t=\cos^2\frac{\theta}{2}$ *i.e.* $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ et $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, on a donc

$$\begin{aligned} & P^{m'-m,\,m'+m}_{j-m'}(x) \\ = \; & \frac{(-1)^{j-m'}}{2^{j-m'}(j-m')!}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{m-m'}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{-m-m'}\frac{d^{j-m'}}{dx^{j-m'}}\left.\left[(1+x)^{j+m}(1-x)^{j-m}\right]\right|_{x=\cos\theta} \\ = \; & \frac{(-1)^{j-m'}}{2^{j-m'}(j-m')!}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2m-2m'}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{-2m-2m'}\frac{d^{j-m'}}{dx^{j-m'}}\left.\left[(1+x)^{j+m}(1-x)^{j-m}\right]\right|_{x=\cos\theta} \end{aligned}$$

d'où finalement

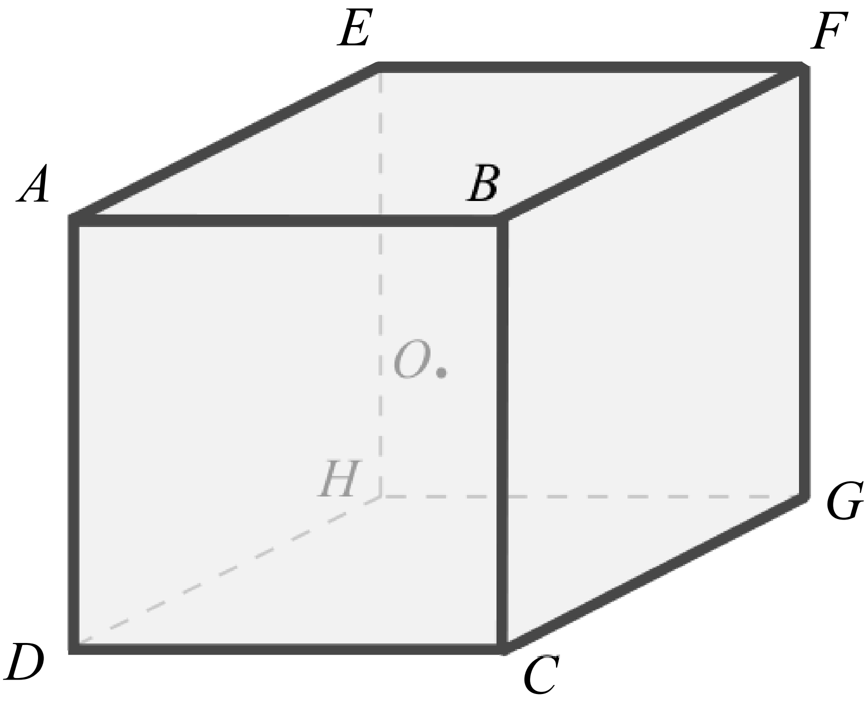
$$d^j_{mm'}(\theta) = \sqrt{\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{m'-m}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m'+m} P^{m'-m,\,m'+m}_{j-m'}(\cos\theta)\,.$$

---

2 Groupe des rotations du cube

2.1 Groupe de symétrie du cube.

On cherche à dénombrer le groupe K des transformations qui laisse un cube invariant. Le centre du cube est noté O et on nomme les sommets du cube de la façon suivante :



Un élément de K transforme un sommet du cube en autre sommet.

1. Montrer que l'ordre de K divise $8\,!$.

2. Montrer qu'une transformation appartenant à K, qui est une isométrie, est définie par le choix de l'image du sommet A parmi les 8 sommets, puis par l'image des sommets B et D parmi les 3 sommets adjacents ; en déduire que l'ordre de K est 48.

3. Détailler le sous groupe K^+ formé des 24 transformations du groupe K qui transforment un repère direct en un repère direct, c'est-à-dire les rotations. Montrer en particulier qu'elles se répartissent en rotations d'angles π, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Corrigé :

1. Sous-groupe de S_8 puis théorème de Lagrange

2. On en déduit l'image d'un repère orthonormé direct.

3.

- L'identité.
- 8 rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour des 4 diagonales.
- 6 rotations de π autour des 6 axes passant par l'origine et les milieux de côtés opposés.
- 3 rotations de π autour des 3 axes passant par les centres de faces opposées.

– 6 rotations de $\pm\frac{\pi}{2}$ autour des 3 axes passant par les centres de faces opposées.

2.2 Classes de conjugaison de K^+

4. Montrer que, quel que soit le choix de 2 diagonales orientées du cube (c'est-à-dire si on distingue par exemple AG de GA), il existe toujours une rotation transformant l'une en l'autre et laissant le cube invariant.

Corrigé :

– Si les extrémités des deux diagonales orientées sont reliées par un segment (par ex. AG et EC) : rotation d'angle π d'axe passant par le milieu du segment et du segment opposé (ex : milieu de AE et milieu de CG).

– Si les extrémités des deux diagonales orientées sont reliées par une diagonale d'une face (par ex. AG et FD) : rotation d'angle π d'axe passant par le milieu de la face et le milieu de la face opposée (ex : milieu de $ABFE$ et de $CDHG$).

5. En déduire que les 8 rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ sont conjuguées.

Corrigé :

Une telle rotation est définie par le choix d'une diagonale orientée. On passe d'une diagonale orientée à une autre par une rotation d'après la question précédente, d'où le résultat.

6. Vérifier de même que les 6 rotations de $\pm\frac{\pi}{2}$ sont conjuguées.

Corrigé :

Même type d'argument, une telle rotation est donnée par une face du cube (axe orienté vers l'extérieur). On passe d'une face à une autre par rotation d'angle π (faces opposées) ou $\pi/2$

(faces adjacentes).

---

7. Montrer qu'aucune rotation (ni d'ailleurs aucune isométrie) laissant le cube invariant ne peut transformer un axe passant par les centres de faces opposées en un axe passant par les milieux de côtés opposés.

Corrigé :
Évident car les longueurs sont différentes....

---

8. En déduire que les rotations d'angle π sont réparties dans 2 classes de conjugaison distinctes.

Corrigé :
La classe des rotations d'angles π passant par le centre des faces (on peut passer de l'une à l'autre par conjugaison par une rotation) et la classe des rotations d'angle π passant par les milieux de côtés opposés.

2.3 Représentations irréductibles de K^+

On note n_i les dimensions, classées par ordre croissant, des représentations irréductibles de K^+, groupe des rotations laissant le cube invariant.

9. Montrer qu'il n'existe qu'une seule possibilité pour les valeurs des n_i que l'on précisera.

Corrigé :
$\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = 24$ donc nécessairement 1, 1, 2, 3 et 3.

---

10. Expliciter la représentation non triviale A_2 de dimension 1. On pourra considérer qu'une rotation g du cube est une permutation des diagonales et identifier sa signature – qu'on déterminera en décomposant la permutation en produit de transpositions – à $\mathcal{D}^{A_2}(g)$.

Corrigé :
Les rotations de $\pm 2\pi/3$: perm. cyclique des 3 autres diagonales : perm. paire, $\chi = +1$. Rotations de π autour des centres des faces : permutation des diagonales faite deux cycles de longueur 2, $\chi = +1$. Rotations de π autour des milieux de côtés opposés : une transposition de deux diagonales, les deux autres invariantes : $\chi = -1$. Rotations de $\pm\pi/2$ autour des axes passant par les centres des faces : permutation cyclique des 4 diagonales, donc impaire $\chi = -1$.

---

11. Table des caractères de K^+

On donne une partie de la table de caractères. Les notations sont traditionnelles, e est la classe de l'élément neutre dans le groupe, C_p est une classe de rotations de $2\pi/p$; A_1 désigne la représentation identité, etc. Complétez la table en utilisant les informations précédentes et les relations d'orthogonalité et/ou de complétude.

$\downarrow$ Repr. $\setminus$ Classes $\rightarrow$	e	C_3	C_2	C_2'	C_4
A_1					
A_2					
E	2	-1			
F_1	3	0			1
F_2	3	0			-1
$\|C_i\|$			3		

Corrigé :
On complète d'abord les nombres d'éléments des classes. La représentation A_1 étant la représentation identité, sa ligne est triviale. La représentation A_2 a été déterminée plus haut et fournit la ligne $1, 1, 1-1, -1$. La première colonne qui donne la dimension de la repr.

est aussi évidente. L'orthogonalité des lignes F_1 et F_2 avec les lignes A_1 et A_2 permet de les compléter en $3, 0, -1, \mp 1, \pm 1$. De même l'orthogonalité de la ligne E avec les lignes A_1 et A_2 permet de la compléter en $2, -1, 2, x, -x$, et la normalisation de $\chi^{(E)}$ donne $x^2 = 0$ donc on complète la ligne E par deux zéros. D'où :

$\downarrow$ Repr. $\setminus$ Classes $\rightarrow$	E	C_3	C_2	C_2'	C_4
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
E	2	-1	2	0	0
F_1	3	0	-1	-1	1
F_2	3	0	-1	1	-1
$\|C_i\|$	1	8	3	6	6