Université Pierre et Marie Curie

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Examen de 1ère session

jeudi 5 avril 2018

Le groupe modulaire

Soient (ω_1, ω_2) deux nombres complexes tels que

$$\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}. \tag{1}$$

On peut alors construire un réseau bidimensionnel formé à partir des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des deux nombres ω_1 et ω_2.

1. Pourquoi impose-t-on que $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$?

Corrigé :

De façon à éviter que $(\omega_1, \omega_2) = \arg \frac{\omega_1}{\omega_2} \equiv 0[\pi]$, ce qui ne permettrait pas définir un réseau bidimensionnel.

---

2. Soit $GL(2, \mathbb{Z})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et inversibles. Dans toute la suite, on notera génériquement ses éléments sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Justifier le fait que ces matrices soient de déterminant ± 1.

Corrigé :

On a $\det A = ad - bc \in \mathbb{Z}$ et comme $GL(2, \mathbb{Z})$ est un groupe, son inverse A^{-1} est aussi dans $GL(2, \mathbb{Z})$, et le déterminant de A^{-1}, qui vaut $1/\det A = 1/(ad - bc)$, doit aussi être dans $\mathbb{Z}$, ce qui conduit à $\det A = \pm 1$.

Ce groupe décrit les changements de base du réseau construit à partir des vecteurs de base ω_1, ω_2, suivant la transformation

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

qui laisse invariante (au signe près) l'aire de la cellule élémentaire, constituée du parallélogramme s'appuyant sur ω_1, ω_2.

3. a. Justifier le fait que l'aire de cette cellule élémentaire est donnée par

$$\mathcal{A} = \mathrm{Im}\, \omega_1^* \omega_2 \,. \tag{4}$$

Corrigé :

Ecrivons $\omega_1 = |\omega_1| e^{i\alpha_1}$ et $\omega_2 = |\omega_2| e^{i\alpha_1}$. Géométriquement, l'aire de la cellule élémentaire est donnée par $\mathcal{A} = |\omega_1||\omega_2| \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$. Or

$$\omega_1^* \omega_2 = |\omega_1||\omega_2| [\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + i \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]$$

soit $\mathcal{A} = \mathrm{Im}\, [\omega_1^* \omega_2]\,.$

---

b. En déduire que $GL(2, \mathbb{Z})$ préserve au signe près l'aire de la cellule élémentaire du réseau.

Corrigé :

Il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} \omega_1' &= a\omega_1 + b\omega_2 \,, \\ \omega_2' &= c\omega_1 + d\omega_2 \,, \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\omega_1'^{\,*} \omega_2' = (a\omega_1 + b\omega_2)(c\omega_1 + d\omega_2)^* = ac|\omega_1|^2 + bd|\omega_2|^2 + ad\omega_1^*\omega_2 + bc\omega_2^*\omega_1$$

soit $\mathrm{Im}\,[\omega_1'^*\omega_2'] = (\mathrm{ad}-\mathrm{bc})\mathrm{Im}\,[\omega_1^*\omega_2]$, d'où l'invariance au signe près de l'aire de la cellule élémentaire puisque $ad - bc = \pm 1$.

Afin de préserver l'orientation du réseau sous l'action de ces transformation, on introduit le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ des transformations de $GL(2,\mathbb{Z})$ formé des matrices de déterminant 1.

4. a. Justifier le fait que $SL(2,\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $GL(2,\mathbb{Z})$.

Corrigé :
$SL(2,\mathbb{Z})$ est le noyau de l'application det, qui est un morphisme de $(GL(2,\mathbb{Z}),\times)$ dans $(\mathbb{Z}_2,\times)$. Or d'après une proposition vue en cours, le noyau d'un morphisme de G dans G' est un sous-groupe du groupe G.

---

b. $SL(2,\mathbb{Z})$ est-il un sous-groupe invariant de $GL(2,\mathbb{Z})$?

Corrigé :
Il suffit de considérer à nouveau le morphisme det de $(GL(2,\mathbb{Z}),\times)$ dans $(\mathbb{Z}_2,\times)$. Comme l'élément neutre 1 est un sous-groupe invariant de $\mathbb{Z}_2$, $SL(2,\mathbb{Z}) = \det^{-1}(1)$ est lui-même un sous-groupe invariant de $GL(2,\mathbb{Z})$.

---

c. En déduire que $GL(2,\mathbb{Z})/SL(2,\mathbb{Z})$ est un groupe, dont on précisera le cardinal et dont on donnera un représentant de chacune des classes, et un groupe qui lui est isomorphe.

Corrigé :
Puisque $SL(2,\mathbb{Z})$ est un sous-groupe invariant de $GL(2,\mathbb{Z})$, $GL(2,\mathbb{Z})/SL(2,\mathbb{Z})$ est un groupe. Comme les éléments de $GL(2,\mathbb{Z})$ sont constitués des matrices de déterminant 1 ou -1, il est immédiat que $GL(2,\mathbb{Z})/SL(2,\mathbb{Z})$ possède deux éléments : la classe des matrices de déterminant $+1$ (c'est $SL(2,\mathbb{Z})$), et la classe des matrices de déterminant -1 (c'est $M \cdot SL(2,\mathbb{Z})$

où
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
La matrice $\mathbb{1}$ est un représentant de la première classe, et M de la deuxième.

On a donc $GL(2,\mathbb{Z})/SL(2,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$. On notera que ce résultat est un cas particulier du théorème de factorisation 4.41 (non traité en cours).

---

5. a. Déterminer le centre de $SL(2,\mathbb{Z})$.

Corrigé :

Soit
$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$
un élément du centre de $SL(2,\mathbb{Z})$, avec $a'd' - b'c' = 1$. Par hypothèse, $\forall A \in SL(2,\mathbb{Z})$ de la forme (2), l'identité $A\,A' = A'\,A$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$
soit
$$\begin{aligned} b'c &= bc', \\ c'a + d'c &= ca' + dc', \\ a'b + b'd &= ab' + bd'. \end{aligned}$$
En particulier, si $b = 0$ et c arbitraire, on a donc $b' = 0$, et de même si $c = 0$ et b arbitraire, on a donc $c' = 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} d'c &= ca' \\ a'b &= bd', \end{aligned}$$
pour tout b et c, soit $d' = a'$, avec la contrainte $a'd' = 1$, soit finalement $a' = d' = 1$ ou $a' = d' = -1$. Ainsi le centre $Z_{SL(2,\mathbb{Z})}$ est égal à $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

---

b. Justifier le fait que l'ensemble $PSL(2,\mathbb{Z}) \equiv SL(2,\mathbb{Z})/\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}$ est un groupe, appelé groupe spécial linéaire projectif. A quoi correspond le passage au quotient ?

Corrigé :

D'après le cours, le centre d'un groupe est un sous-groupe invariant, donc l'ensemble quotient correspondant possède une structure de groupe. Le passage au groupe quotient correspond à identifier les éléments A et $-A$ de $SL(2,\mathbb{Z})$, d'où le nom de groupe projectif (seule la direction compte, comme pour les espaces projectifs en géométrie euclidienne ; en géométrie euclidienne on travaille à homothétie près, ici on travaille à ± 1 près).

---

6. Pour un réseau bidimensionnel donné, on s'intéresse maintenant à la loi de transformation du rapport

$$z = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{5}$$

sous l'action des transformations préservant ce réseau avec son orientation. Nous avons vu plus haut que ces transformations sont celles de $SL(2,\mathbb{Z})$, agissant sur le couple (ω_1, ω_2) suivant la relation (3).

Pour tout $A \in SL(2,\mathbb{Z})$, on associe donc la transformation φ_A définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{6}$$

a. Pourquoi doit-on en pratique remplacer ci-dessus le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ par le groupe quotient $PSL(2,\mathbb{Z})$?

Corrigé :

De façon immédiate,

$$z' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{az+b}{cz+d}$$

est identique pour A et $-A$, d'où le fait d'identifier les transformation homographiques codées par A et $-A$.

On définit le demi-plan de Poincaré H comme l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive.

b. Soit un réseau engendré par ω_1 et ω_2, satisfaisant à la condition (1). On notera $\alpha_{1,2} \in]-\pi,\pi]$ les arguments de $\omega_{1,2}$. En utilisant l'expression de z en fonction de $|\omega_{1,2}|$ et $\alpha_{1,2}$, justifier que dans l'étude des transformations de z ci-dessus, on peut se restreindre à $z \in H$ sans perte de généralité.

Corrigé :

$$z = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$$

donc $\mathrm{Im}z = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|}\sin(\alpha_1-\alpha_2)$. Tout d'abord, par hypothèse z a une partie imaginaire non nulle. Ensuite, suivant l'angle formé par ω_1 et ω_2, z peut avoir une partie imaginaire positive ou négative. Si $\mathrm{Im}z$ est négative, comme le réseau est formé à partir de la cellule élémentaire (ω_1,ω_2), il suffit d'échanger le rôle de ω_1 et ω_2 : le réseau est identique, et ceci ramène z dans H.

On définit le groupe modulaire Γ comme le groupe des transformations du demi-plan H de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

où $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ avec $ad-bc=1$. De façon équivalente, Γ est l'ensemble des transformations φ_A où A parcourt $PSL(2,\mathbb{Z})$ et φ_A est définie par la relation (6).

c. Justifier le fait que l'on définit bien ainsi des transformations de H sur lui-même.

Corrigé :

On a

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az^*+b}{cz^*+d} = \frac{(ad-bc)(z-z^*)}{|cz+d|^2} = \frac{z-z^*}{|cz+d|^2} = \frac{2}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}z$$

qui est donc du signe de $\mathrm{Im}z$, ce qui montre que ces transformations homographiques envoient H sur lui-même.

d. Pour tout $A \in PSL(2,\mathbb{Z})$, montrer que l'application ϕ_A est bijective et déterminer son application inverse. Montrer qu'elle correspond elle-même à une transformation de $PSL(2,\mathbb{Z})$ que l'on reliera précisément à A.

Corrigé :

Il suffit de résoudre l'équation

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}\,,$$

ce qui s'écrit

$$z = \frac{dz'-b}{-cz'+a}\,,$$

correspondant à la transformation

$$A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\,.$$

Il est alors immédiat que $A' \cdot A = A \cdot A' = \mathbb{1}$ en utilisant le fait que $ad - bc = 1$. Ainsi $(\varphi_A)^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.

---

e. Plus généralement, soient A et A' deux éléments de $PSL(2,\mathbb{Z})$, et φ_A et $\varphi_{A'}$ les transformations correspondantes. Etudier la loi de composition de deux transformations φ_A et $\varphi_{A'}$. En déduire que l'on a finalement construit une action du groupe $PSL(2,\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré H.

Corrigé :

La loi de composition s'écrit

$$\forall z \in H,\ (\varphi_{A'} \circ \varphi_A)(z) = \varphi_{A'}(\varphi_A(z)) = \frac{a'\frac{az+b}{cz+d} + b'}{c'\frac{az+b}{cz+d} + d'} = \frac{(a'a+cb')z + a'b + b'd}{(c'a+cd')z + c'b + dd'}\,.$$

Or

$$A'\,A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a+cb' & a'b+b'd \\ c'a+cd' & c'b+dd' \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $(\varphi_{A'} \circ \varphi_A)(z) = \varphi_{A'A}(z)$ et donc que $\varphi_{A'} \circ \varphi_A = \varphi_{A'A}$. On a donc construit un morphisme de $PSL(2,\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{S}(H)$, ce qui est la définition même d'une action du groupe $PSL(2,\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré H.

---

f. Montrer finalement que $PSL(2,\mathbb{Z})$ et Γ sont isomorphes.

Corrigé :

Le noyau de l'application

$$\begin{aligned} \Psi : PSL(2,\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathcal{S}(H) \\ A &\mapsto \varphi_A \end{aligned}$$

est déterminé par l'équation

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

qui conduit à $b = c = 0$ et $a = d$. Comme $ad - bc = 1$, on en déduit que $ad = 1$ avec $a, d \in \mathbb{Z}$, soit $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Le noyau est donc réduit à l'élément neutre $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ de $PSL(2,\mathbb{Z})$, d'où l'injectivité. La surjectivité est immédiate par construction.

On souhaite maintenant construire une présentation de Γ.

7. On définit les deux transformations φ_S et φ_T définies respectivement par

$$\varphi_S : z \mapsto -\frac{1}{z}\,, \tag{7}$$

$$\varphi_T : z \mapsto z + 1\,. \tag{8}$$

a. Identifier les matrices correspondantes de $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Corrigé :

$$S = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$T = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Identifier les transformations correspondantes sur le réseau.

Corrigé :

La transformation S correspond à

$$S : \left\{ \begin{array}{lcr} \omega_1' & = & -\omega_2 \\ \omega_2' & = & \omega_1 \end{array} \right.$$

et la transformation T correspond à

$$T : \left\{ \begin{array}{lcl} \omega_1' & = & \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_2' & = & \omega_2 \,. \end{array} \right.$$

8. Dans cette question, nous allons démontrer que toute élément A de $PSL(2, \mathbb{Z})$ est engendré par puissances successives de S et T. Pour cela, considérons les matrices $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ de la forme (2). La preuve repose sur une récurrence sur c.

a. Calculer les puissances successives de S et de T.

Corrigé :

De façon évidente, $S^2 = -\mathbb{1}$, identifié à $\mathbb{1}$ dans $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Notons $\epsilon = \pm$ le signe arbitraire devant T. On a

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et plus généralement, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$T^n = \epsilon^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,.$$

b. En déduire que la propriété est vraie pour $c = 0$.

Corrigé :

Tout d'abord,

$$T^{-1} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et plus généralement, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$T^{-n} = \epsilon^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si $c = 0$, comme $ad - bc = 1$ s'écrit ici $ad = 1$ soit $a = d = \pm 1 \equiv \epsilon$, les matrices du type (2) sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & b \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$, donc A s'obtient au signe près sous la forme T^k.

On suppose la propriété démontrée jusqu'au rang $C - 1$, *i.e.* que toute matrice de la forme (2) avec $c \leqslant C - 1$ peut s'écrire comme un produit de puissances de S et T. On note q le quotient de la division euclidienne de a par C.

c. En calculant $ST^{-q}A$, montrer que cette matrice est engendrée par T et S.

Corrigé :

On a $a = Cq + r$ avec $0 \leqslant r < C$. Un calcul immédiat donne

$$ST^{-q}A = \begin{pmatrix} -C & -d \\ a - qC & b - qd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}.$$

Comme $r < C$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et donc affirmer que $ST^{-q}A$ est engendrée par T et S.

---

d. En déduire que la propriété est vraie au rang C.

Corrigé :

Ceci est immédiat en multipliant la décomposition de $ST^{-q}A$ obtenue à la question précédente, sous forme d'un produit de puissances de S et T, à gauche par T^qS, ce qui montre que A s'exprime bien comme un produit de puissances de S et T.

---

e. Calculer les puissances successives de $U = TS$ et préciser l'ordre du sous-groupe de $PSL(2,\mathbb{Z})$ ainsi engendré. Est-il cyclique ? Donner un groupe isomorphe à ce groupe.

Corrigé :

On a

$$U = TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$U^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1} \equiv \mathbb{1}$$

dans $PSL(2,\mathbb{Z})$, d'où l'on déduit le fait que U est d'ordre 3, et qu'il engendre un groupe cyclique d'ordre 3 isomorphe à $\mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq C_3$.

---

f. Ce sous-groupe des puissances de U est-il un sous-groupe invariant de $PSL(2,\mathbb{Z})$?

Corrigé :

Non, car par exemple l'élément $SUS = STSS = ST$ ne peut se mettre sous la forme $\mathbb{1}$ ou $U = TS$ ou $U^2 = TSTS$.

---

g. Montrer que $PSL(2,\mathbb{Z})$ possède les deux présentations $PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2, (TS)^3 \rangle$ et $PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, U \mid S^2, U^3 \rangle$.

Corrigé :

D'après les questions précédentes, il est immédiat que $PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2, (TS)^3 \rangle$.

Montrons que $PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, U \mid S^2, U^3 \rangle$. Il suffit de voir que $U = TS$ conduit, en multipliant à droite par S, à $T = US$. Il suffit donc de remplacer, dans tout mot formé l'aide de S et T (après réduction par les contraintes $S^2 = \mathbb{1}$ et $(TS)^3 = \mathbb{1}$), la lettre T par US, les contraintes étant maintenant $S^2 = \mathbb{1}$ et $U^3 = \mathbb{1}$. Ceci prouve que $PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, U \mid S^2, U^3 \rangle$.
