SORBONNE UNIVERSITÉ – MASTER DE PHYSIQUE ET APPLICATIONS

SYMÉTRIES EN PHYSIQUE– EXAMEN DE PREMIÈRE SESSION 2019

Durée 2h. Documents de cours autorisés, calculatrices et téléphones interdits.

1 Etude de $SU(1,1)$

Le groupe $SU(1,1)$, constitué des matrices 2×2 à coefficients complexes, est défini par les conditions :

$$\begin{aligned} &\forall U \in SU(1,1),\ \det U = 1\,, \\ &U^\dagger J U = J\,, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

1. a)(*) Montrer que les matrices U de $SU(1,1)$ sont de la forme

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{2}$$

— **Un calcul immédiat montre que**

$$U^\dagger J U = \begin{pmatrix} |a|^2-|c|^2 & a^*b - c^*d \\ ab^* - cd^* & |b|^2 - |d|^2 \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\begin{aligned} ab^* - cd^* &= 0\,, \quad (a) \\ ad - bc &= 1\,, \quad (b) \\ |a|^2 - |c|^2 &= 1\,, \quad (c) \\ |b|^2 - |d|^2 &= -1\,. \quad (d) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $c = b^*$ **et** $d = a^*$. **En combinant (c) et (d) on a**

$$aa^* - cc^* = dd^* - bb^* \quad (e)$$

soit, en supposant $b \neq 0$,

$$cc^*\left(\frac{dd^*}{bb^*} - cc^*\right) = dd^* - bb^*$$

en éliminant a **et** a^* **à l'aide de (a) et sa complexe conjuguée, soit encore,**

$$cc^*\,(dd^* - bb^*) = bb^*(dd^* - bb^*)\,,$$

ce qui conduit à $cc^* = bb^*$**, puisque** $dd^* - bb^* = 1$. **Le cas particulier** $b = 0$ **conduit à la même condition : il suffit d'injecter** $b = 0$ **dans (a), (b), (c), (d) pour constater qu'alors** $cd^* = 0$ **et donc** $c = 0$ **puisque** d **ne peut être nul d'après (d) qui devient ici** $|d^2| = 1$.

La condition $dd^* = bb^*$ conduit d'après (e) à la condition $aa^* = cc^*$.
On écrit maintenant

$$a = |a|e^{i\alpha_a},\ b = |b|e^{i\alpha_a},\ c = |b|e^{i\alpha_c},\ d = |a|e^{i\alpha_d}.$$

L'équation (a) s'écrit alors

$$e^{-i\alpha_a + i\alpha_b} = e^{-i\alpha_c + i\alpha_d}$$

et donc

$$e^{i\alpha_a + i\alpha_d} = e^{i\alpha_b + i\alpha_c}$$

Les équations (c) et (d) conduisent à

$$|a|^2 e^{i(\alpha_a + \alpha_d)} - |b|^2 e^{i(\alpha_b + \alpha_c)} = 1$$

soit

$$(|a|^2 - |b|^2) e^{i(\alpha_a + \alpha_d)} = 1$$

avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$ d'après (c), d'où $e^{i(\alpha_a+\alpha_d)} = e^{i\alpha_b + i\alpha_c} = 1$ soit encore $\alpha_d = -\alpha_a$ et $\alpha_c = -\alpha_b$. Ceci achève la preuve que $c = b^*$ et $d = a^*$.

---

b) Quel est la dimension de ce groupe ?

— **La forme obtenue pour U fait intervenir 2 paramètre complexes a et b, donc 4 paramètres réels (les parties réelles et imaginaire de a et b), contraints par l'équation $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Il reste donc 3 paramètres réels indépendants. La dimension de $SU(1,1)$ est donc 3.**

---

2) On écrit $U \in SU(1,1)$ sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\cosh\theta & e^{i\omega}\sinh\theta \\ e^{-i\omega}\sinh\theta & e^{-i\phi}\cosh\theta \end{pmatrix}, \quad \theta, \phi, \omega \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

a) Justifier le fait que cette écriture est équivalente à celle obtenue dans la question 1)a). On précisera le domaine de variation minimal pour θ, φ, ω.

— **La forme proposée est bien de la forme (2) avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$ puisque $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$. Pour couvrir $SU(1,1)$, il faut $\theta \in [0, +\infty[$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\omega \in [0, 2\pi]$.**

---

b) Discuter la compacité de $SU(1,1)$. On rappelle qu'un compact de $\mathbb{R}$ est une partie fermée bornée.

— **Il suffit de considérer le domaine de variation obtenu à la question précédente pour en déduire que $SU(1,1)$ n'est pas compact (à cause du domaine de variation de θ).**

---

3) Algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$
On normalise les générateurs en explicitant un facteur i dans le développement de Taylor, "à la physicienne".
a) Montrer qu'une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ est donnée par

$$\begin{aligned} T_1 &= -i\sigma_1, & (4) \\ T_2 &= i\sigma_2, & (5) \\ T_3 &= \sigma_3 . & (6) \end{aligned}$$

Déterminer la structure de cette algèbre de Lie.

— **Posons $a = 1+\alpha+i\beta$, $b = \gamma+i\delta$, avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta \ll 1$. La contrainte $|a|^2-|b|^2 = 1+2\alpha+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 = 1$ conduit à l'ordre dominant à $\alpha = 0$. On a donc**

$$U = \begin{pmatrix} 1+i\beta & \gamma+i\delta \\ \gamma-i\delta & 1-i\beta \end{pmatrix}$$

— **En différentiant par rapport à β,γ,δ, on obtient ainsi**

$$T_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_1, \quad T_2 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad T_3 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \sigma_3 .$$

— **On obtient donc**

$$\begin{aligned} [T_1,T_2] &= 2iT_3 , \\ [T_2,T_3] &= -2iT_1 , \\ [T_3,T_1] &= -2iT_2 . \end{aligned}$$

---

b) Cette algèbre de Lie réelle est-elle isomorphe à celle de $\mathfrak{su}(2)$? Pourquoi ?

— **L'algèbre de Lie de $\mathfrak{su}(2)$ est**

$$\begin{aligned} [\sigma_1,\sigma_2] &= 2i\sigma_3 , \\ [\sigma_2,\sigma_3] &= 2i\sigma_1 , \\ [\sigma_3,\sigma_1] &= 2i\sigma_2 . \end{aligned}$$

— **Les deux algèbres de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ et $\mathfrak{su}(2)$ ne sont pas isomorphes car les signes des constantes de structure ne peuvent pas être changés par changement de base sur $\mathbb{R}$.**

c) L'algèbre $\mathfrak{su}(1,1)$ est-elle semi-simple ?

— **Il suffit de déterminer le tenseur de Cartan-Killing. On a** $g_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}{}^{\gamma} C_{\beta\gamma}{}^{\delta} = f_{\alpha\delta}{}^{\gamma} f_{\beta\gamma}{}^{\delta}$**. Donc**

$$\begin{aligned} g_{11} &= f_{12}{}^{3} f_{13}{}^{2} + f_{13}{}^{2} f_{12}{}^{3} = 8\,, \\ g_{12} &= 0\,, \\ g_{13} &= 0\,, \\ g_{22} &= 2 f_{21}{}^{3} f_{23}{}^{1} = 8\,, \\ g_{23} &= 0\,, \\ g_{33} &= 2 f_{31}{}^{2} f_{32}{}^{1} = -8\,, \end{aligned}$$

les autres coefficients s'obtenant par symétrie de g.

— **On a donc**

$$g = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\det g \neq 0$**, ce qui prouve que** $\mathfrak{su}(1,1)$ **est semi-simple.**

d) Discutez la compacité de $\mathfrak{su}(1,1)$. Commentez.

— **L'algèbre obtenue est non compacte. Ceci se voit en étudiant la métrique de Cartan-Killing :** g **n'est pas définie négative. Le résultat est en accord avec le fait que** $\mathfrak{su}(1,1)$ **est l'agèbre de Lie d'un groupe non compact.**

2 Représentations du groupe symétrique S_3

On considère dans ce problème le groupe S_3 des permutations à trois éléments.

1. De quel polygône régulier S_3 est-il le groupe de symétrie ?
2. Donner l'ordre de S_3.
3. Donner la liste des éléments du groupe ; en donner une interprétation géométrique.

— **le triangle équilatéral**

— **ordre** $3! = 6$

— **La permutation identité** (123)**, les transpositions** (213)**,** (132)**,** (321) **(symétries de réflexion) et les permutations circulaires** (231) **et son inverse** (312) **(rotations d'ordre 3).**

Nous souhaitons maintenant étudier les différentes représentations irréductibles du groupe.

4. Obtenir les classes de conjugaison de S_3.
5. En déduire le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes D^i et leur dimensions.

- **On obtient** $C_1 = \{(123)\}$**,** $C_2 = \{(213), (132), (321)\}$ **et** $C_3 = \{(231), (312)\}$**.**
- **On doit avoir 3 représentations irréductibles** D_1**,** D_2 **et** D_3**, dont les dimensions** n_i **satisfont** $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$**. On choisit par exemple** D_1 **et** D_2 **de dimension 1 et** D_3 **de dimension 2.**

Pour analyser certaines représentations réductibles de S_3, nous allons tout d'abord obtenir sa table de caractères.

6. Montrer qu'il n'existe que 4 entrées de la table qui ne sont pas fixées a priori, qu'on admettra réelles.
7. Écrire les conditions d'orthogonalité entre les lignes de la table. Les résoudre.
8. Vérifier que les relations de complétude (colonnes) sont satisfaites et donner la table de caractères.

- **On peut remplir immédiatement la colonne de la classe de l'identité et la ligne de la représentation triviale. Nous avons donc**

	C_1	C_2	C_3
D^1	1	1	1
D^2	1	a	b
D^3	2	c	d

- **L'orthogonalité des deux premières lignes donne** $1+3a+2b = 0$**. La normalisation de la ligne 1 donne** $1+3a^2+2b^2 = 6$ **dont les solutions sont** $(a,b) = (-1,1)$ **ou** $(a,b) = (3/5,-7/5)$**. L'orthogonalité entre les lignes 1 et 3 donne** $2+3c+2d = 0$ **et la normalisation de la ligne 3** $4+3c^2+2d^2 = 6$**. Les solutions sont** $(c,d) = (0,-1)$ **ou** $(c,d) = (-4/5,1/5)$**. Finalement l'orthogonalité entre les lignes 2 et 3 donne** $2+3ac+2bd = 0$**. Les deux solutions possibles sont** $(a,b,c,d) = (-1,1,0,-1)$ **et** $(a,b,c,d) = (3/5,-7/5,-4/5,1/5)$**. Seule la première est correcte, car la signature** ε **est une représentation de** S_3**, notée ici** D^2.
- **On obtient finalement**

	C_1	C_2	C_3
D^1	1	1	1
D^2	1	-1	1
D^3	2	0	-1

On obtient une représentation linéaire D de dimension 3 du groupe, en associant au premier objet du triplet $(1,2,3)$ le vecteur de base e_1, etc... de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

9. Donner la matrice 3x3 associée à la transposition (213) et calculer sa trace.
10. Faire de même avec la permutation circulaire (321).

— **On a**

$$D[(213)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui permute bien les vecteurs de base e_1 et e_2. Sa trace est $\chi_2^D = 1$.

— **On a**

$$D[(321)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont la trace est $\chi_3^D = 0$.

On écrit $D = n_1 D^1 \oplus n_2 D^2 \oplus n_3 D^3$ et on cherche à obtenir les multiplicités n_a associées. On rappelle que

$$n_a = \frac{1}{|G|} \sum_i |C_i| (\chi^{D_a})^* \chi_i^D \tag{7}$$

11. Donner la décomposition de D en représentations irréductibles du groupe.
12. Construire une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ associé à la représentation de dimension 1, puis trouver une base de l'autre sous-espace invariant de telle sorte à définir une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
13. Écrire les matrices associées aux permutations (213) et (321) dans cette nouvelle base.

— $n_1 = \frac{1}{6}(1 \times 3 \times 1 + 3 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 0) = 1$

— $n_2 = \frac{1}{6}(1 \times 3 \times 1 - 3 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 0) = 0$

— $n_3 = \frac{1}{6}(1 \times 3 \times 2 + 3 \times 0 \times 1 + 2 \times (-1) \times 0) = 1$

— **On a donc $D = D^1 \oplus D^3$**

— **Un vecteur de base du sous-espace associé à la représentation triviale est naturellement $u = (1,1,1)^T$, car il est bien invariant par toute permutation de ses composantes. On peut la compléter avec une base du sous-espace associé à D^3 en prenant $v = (1,-1,0)^T$ et $w = (1,0,-1)^T$.**

— **On a dans cette base**

$$D[(213)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D[(231)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant les modes de vibration d'un système de trois masses m reliées par des ressorts de raideur k, formant un triangle équilatéral, et se déplaçant dans le plan (x,y) sans frottement. Chaque masse est repérée par ses coordonnées (x_i, y_i). Afin d'étudier les vibrations du système, on pose

$$x_i = \bar{x}_i + \delta x_i\ , \quad y_i = \bar{y}_i + \delta y_i \tag{8}$$

et on assemble toutes les fluctuations en un vecteur unique à six dimensions, $q^\ell = (\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta x_3, \delta y_3)$. Le Hamiltonien du système prend la forme

$$H = \frac{m}{2}\sum_\ell p_\ell^2 + \frac{k}{2}\sum_{\ell,m} V_{\ell m} q^\ell q^m\,, \tag{9}$$

où $p_\ell = \dot{q}_\ell$ et $V_{\ell m}$ une matrice symétrique. On cherche les modes propres du système en s'aidant des symétries du problème, qui correspondent aux transformations linéaires $q^\ell \mapsto M_{\ell m} q^m$ laissant le Hamiltonien invariant.

14. En posant $q_\ell = e^{i\omega t}\zeta_\ell$, justifier le fait que les modes propres correspondent aux vecteurs propres de V
15. En remarquant que l'action de S_3 sur le système peut se décomposer en une permutation σ des masses d'une part, et une action géométrique sur chaque masse d'autre part, justifier que la représentation $\hat{D}$ de dimension 6 correspondant à l'action du groupe sur q^ℓ peut s'écrire comme $\hat{D} = D^3 \otimes D$ où D est la représentation de dimension 3 étudiée précédemment.
16. Démontrer la décomposition en représentations irreductibles :

$$\hat{D} = D^1 \oplus D^2 \oplus 2D^3\,, \tag{10}$$

avec D^1 la représentation triviale, D^2 la représentation irreductible non-triviale de dimension 1 et D^3 la représentation irreductible de dimension 2. On rappelle que $\chi^{D\otimes D'}(C_i) = \chi^D(C_i)\chi^{D'}(C_i)$.

17. Justifier que les matrices associées à $\hat{D}$, symétrie du hamiltonien (9), sont orthogonales.

- **Les équations du mouvement sont naturellement** $\ddot{q}_\ell + \frac{k}{m}V_{\ell m}q^m = 0$.
En passant à la base des vecteurs propres par une transformation orthogonale, qui laissera invariante l'énergie cinétique, on a, pour un vecteur propre $v_i = e^{i\omega_i t}\zeta_i$**,** $(-\omega_i^2 + \frac{k}{m}\lambda_i)e^{i\omega_i t}v_i = 0$.
- **L'action d'une permutation** S_3 **sur les variables du système peut s'écrire comme**

$$\begin{pmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{D}\begin{pmatrix} \delta x_{\sigma(i)} \\ \delta y_{\sigma(i)} \end{pmatrix},$$

où σ **est une permutation des trois sommets et où** $\mathcal{D}$ **est une matrice orthogonale correspondant à une symétrie ponctuelle du système. La représentation de dimension 2 associée aux matrices** $\mathcal{D}(g)$ **est nécessairement la représentation** D^3**, seule représentation irréductible de dimension 2 de** S_3**.**
- **On a déjà démontré que** $D = D^1 \oplus D^3$**. On a donc** $\hat{D} = D^3 \otimes (D^1 \oplus D^3) = D^3 \oplus D^3 \otimes D^3$**, car** D^1 **est la représentation triviale.**
- **Pour** $\tilde{D} = D^3 \otimes D^3$**,** $\chi^{\tilde{D}}(C_1) = \left(\chi^{D^3}(C_1)\right)^2 = 4$**,** $\chi^{\tilde{D}}(C_2) = \left(\chi^{D^3}(C_2)\right)^2 = 0$ **et** $\chi^{\tilde{D}}(C_3) = \left(\chi^{D^3}(C_3)\right)^2 = 1$**.**
En utilisant la relation (7), on obient $D^3 \otimes D^3 = D^1 \oplus D^2 \oplus D^3$ **puis** $\hat{D} = D^1 \oplus D^2 \oplus 2D^3$**.**
- **Les matrices** $\hat{D}(g)$ **doivent préserver le terme cinétique donc le produit scalaire canonique.**

---

18. Expliquer comment en déduire, sans connaître la forme explicite de V, que cette matrice possède a priori deux sous-espaces propres de dimension 1 et deux sous-espaces propres de dimension 2 (même si des dégenerescences accidentelles sont possibles, comme on le verra).
19. Justifier, en utilisant (10) et des arguments physiques, l'existence de trois vecteurs propres de valeur propre nulle associés aux représentations D^2 et D^3.
20. Justifier l'existence d'un vecteur propre associé à la représentation D^1, de valeur propre non-nulle.

21. Pour résumer décrire l'ensemble des modes propres du système ainsi que les représentations associées.

- **Pour tout $\hat{D}(g)$ avec $g \in S_3$, $\hat{D}(g)^T V \hat{D}(g) = V$. Les matrices $\hat{D}(g)$ étant orthogonales, on a $\hat{D}(g)V = V\hat{D}(g)$. Décomposant $\mathbb{R}^6$ en somme directe de sous-espaces vectoriels associés aux représentations irreductibles D^1, D^2, D^3 et D^3, la restriction de V à chacun de ces sous espaces doit être proportionnelle à l'identité dans chacun des sous-espaces d'après le lemme de Schur.**
- **On considère d'abord les translations du système, selon l'axe x ou l'axe y. Ces deux vecteurs propres se transforment dans la représentation D^3, correspondant aux transformations des vecteurs du plan. Ensuite nous avons un vecteur propre correspondant à une rotation du système. Ce mode est naturellement invariant par rotation (classe C_3) mais le sens de rotation change par réflexion (classse C_2) ; il est donc associé à la représentation D^2 d'après la table de caractères.**
- **Ce mode correspond à un allongement simultané des ressorts de la même quantité (mode de respiration). Comme il conserve la forme du triangle il se transforme dans la représentation triviale.**
- **On a obtenu finalement :**
  1. **Un mode de respiration dans D^1 (v.p. non-nulle)**
  2. **Un mode de rotation dans D^2 (v.p. nulle)**
  3. **Deux modes de translation dans D^3 (v.p. nulle)**
  4. **Deux modes de déformation dans D^3 (v.p. non-nulle)**
