M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application
Symétries en physique

Deuxième session

Examen du 30 juin 2016

Caractères de $SU(2)$

Le but de ce problème est d'étendre les résultats concernant les caractères des groupes finis, en particulier afin de décomposer un produit de représentations d'un groupe en une somme de représentation irréductibles, au cas d'un groupe de Lie, ici $SU(2)$.

Soit $\mathcal{D}(j)$ une représentation de dimension $2j+1$ du groupe $SU(2)$.

1. On note $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ les générateurs de cette représentation, au sens où pour U voisin de l'identité, $\mathcal{D}(U) \sim Id - i\,\vec{\epsilon}\cdot\vec{J}$ avec $\|\vec{\epsilon}\| \ll 1$.

   (a) Pourquoi ces générateurs sont-ils au nombre de 3 ?

   <u>Correction</u> **: Le nombre de générateurs ne dépend pas de la représentation, et est égal à la dimension du groupe, qui est égale à 3.**

   (b) Que peut-on dire concernant l'hermiticité des générateurs $\vec{J}$?

   <u>Correction</u> **: Il suffit d'écrire que $\boldsymbol{\mathcal{D}(U)\mathcal{D}(U)^\dagger = \mathcal{D}(UU^\dagger) = \mathcal{D}(Id) = Id}$, et de développer à l'ordre 1 l'expression $\boldsymbol{\mathcal{D}(U)\mathcal{D}(U)^\dagger}$ pour en déduire que les $\boldsymbol{\vec{J}}$ sont hermitiens.**

   (c) Donner l'expression de ces générateurs dans le cas de la représentation de spin $j = 1/2$.

<u>Correction</u> : Les générateurs de la représentation de spin 1/2 sont les matrices de Pauli, plus précisément, les matrices $\vec{\sigma}_i/2$.

(d) Que pouvez-vous dire de la compacité et de la connexité du groupe $SU(2)$?

<u>Correction</u> : Le groupe $SU(2)$ est compact, les paramètres qui permettent de coder tout élément de $SU(2)$ variant sur des compacts de $\mathbb{R}$. Il est connexe, contrairement à $U(2)$.

(e) On rappelle que l'image par une application continue d'un compact est compacte. Justifier, sans démonstration, le fait que l'on puisse écrire, pour toute rotation d'axe $\vec{n}$ et d'angle θ $D\left(U(\theta, \vec{n})\right)$ sous la forme

$$D\left(U(\theta, \vec{n})\right) = \exp(-i\vec{v} \cdot \vec{J})\,.$$

<u>Correction</u> : Le groupe $SU(2)$ étant compact, et la représentation étant continue, son image est elle-même compacte. Comme d'autre part $SU(2)$ est connexe, son image l'est aussi. Finalement, l'ensemble de l'image de $SU(2)$ par la représentation s'obtient par exponentiation de son algèbre de Lie, de générateurs $\vec{J}$.

(f) Montrer que $\vec{v} = \theta\,\vec{n}$, *i.e.*

$$D\left(U(\theta, \vec{n})\right) = \exp(-i\theta\vec{J} \cdot \vec{n})\,.$$

Il sera utile d'effectuer un développement de Taylor approprié.

<u>Correction</u> : Par développement de Taylor autour de 0 on obtient immédiatement

$$\boldsymbol{D\left(U(\varepsilon, \vec{n})\right) = 1 - i\vec{J} \cdot \vec{v}}$$

et d'autre part, en partant de $\boldsymbol{U = 1 - i\vec{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\theta}$ avec $\boldsymbol{D(\frac{\vec{\sigma}}{2}) = \vec{J}}$, on tire immédiatement que $\boldsymbol{\vec{v} = \theta\,\vec{n}}$.

On se place dans la représentation $\mathcal{D}(j)$. Pour tout élément $U \in SU(2)$, on définit le caractère

$$\chi_j(U) = \mathrm{Trace}\,\mathcal{D}(j) = \sum_{m=-j}^{m=+j} \langle jm\,|\,\mathcal{D}(j)\,|\,jm\rangle \tag{1}$$

2. Soit $U(\theta, \vec{k})$ un élément de $SU(2)$ qui correspond à la rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{k}$ ($\parallel Oz$).

   Montrer que
$$\chi_j[U(\theta,\vec{k})] = \frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

<u>Correction</u> :

$$\boldsymbol{\chi_j[U(\theta,\vec{k})] = \mathbf{Trace}\,\mathcal{D}(j) = \mathbf{Trace}\,e^{-i\theta\vec{k}\cdot\vec{J}} = \mathbf{Trace}\,e^{-i\theta J_z}\,.}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi_j[U(\theta,\vec{k})]} &= \boldsymbol{\sum_{m=-j}^{m=j} e^{-i\theta m} = e^{i\theta j}\sum_{p=0}^{p=2j} e^{-i\theta p}} \\ &= \boldsymbol{e^{i\theta j}\frac{1-e^{-(2j+1)\theta}}{1-e^{-i\theta}} = \frac{e^{i(j+1/2)\theta}-e^{-i(j+1/2)\theta}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}} = \frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.}\end{aligned}$$

---

3. Montrer que χ ne dépend pas de l'axe de rotation, en d'autres termes pour toute rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$, on a

$$\chi_j[U(\theta,\vec{k})] = \chi_j[U(\theta,\vec{n})]\,. \tag{2}$$

   Il pourra être utile d'exprimer $U(\theta,\vec{n})$ à l'aide de $U(\theta,\vec{k})$, et d'utiliser la cyclicité de la trace.

<u>Correction</u> : Soit $\boldsymbol{U}$ codant une rotation autour de $\boldsymbol{\vec{n}}$ d'angle $\boldsymbol{\theta}$.

$$\boldsymbol{U(\theta,\vec{n}) = V\,U(\theta,\vec{k})\,V^{-1}}$$

où $V \in SU(2)$ est la rotation qui amène $\vec{k}$ sur $\vec{n}$. Donc

$$\boldsymbol{\mathcal{D}(U(\theta,\vec{n}) = \mathcal{D}^j(V)\,\mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{k}))\,\mathcal{D}^j(V^{-1})\,.}$$

En passant à la trace, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{tr}\,\boldsymbol{\mathcal{D}(U(\theta,\vec{n})} &= \mathbf{tr}\,[\boldsymbol{\mathcal{D}^j(V)\,\mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{k}))\,\mathcal{D}^j(V^{-1})}] \\ &= \mathbf{tr}[\boldsymbol{\mathcal{D}^j(V^{-1})\,\mathcal{D}^j(V)\,\mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{k}))}] = \mathbf{tr}\boldsymbol{\mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{k}))}\end{aligned}$$

puisque

$$\boldsymbol{\mathcal{D}^j(V^{-1})\,\mathcal{D}^j(V) = \mathcal{D}^j(V^{-1}\,V) = \mathcal{D}^j(Id) = Id\,,}$$

ce qui prouve que $\chi_j[U(\theta,\vec{k})] = \chi_j[U(\theta,\vec{n})]$.

---

4. On considère un atome de moment cinétique j, qui est plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B}$. Le hamiltonien d'interaction s'écrit alors

$$H = -\mu \vec{J}\cdot\vec{B}\,. \tag{3}$$

En utilisant les résultats précédents, montrer que la fonction de partition

$$Z(\beta) = \text{Trace}\ e^{-\beta H} \tag{4}$$

s'écrit

$$Z(\beta) = \frac{\text{sh}\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\beta\mu B\right)}{\text{sh}\left(\frac{\beta\mu B}{2}\right)}\,.$$

<u>Correction</u> :

$$\textbf{Trace}\ \boldsymbol{e^{-\beta H}} = \textbf{Trace}\ \boldsymbol{e^{\beta\mu\vec{J}\cdot\vec{B}}} = \textbf{Trace}\ \boldsymbol{e^{-i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}}}$$

avec $\vec{B} = B\,\vec{n}$ et $\theta = i\,\beta\mu B$. On a alors immédiatement

$$\boldsymbol{Z(\beta) = \frac{\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)i\beta\mu B\right)}{\sin\left(\frac{i\beta\mu B}{2}\right)}}$$

soit

$$\boldsymbol{Z(\beta) = \frac{\text{sh}\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\beta\mu B\right)}{\text{sh}\left(\frac{\beta\mu B}{2}\right)}\,.}$$

---

5. On considère la représentation $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$.

   (a) Montrer que son caractère s'écrit

$$\chi[\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}] = \chi[\mathcal{D}^{j_1}]\,\chi[\mathcal{D}^{j_2}]\,.$$

Correction : Ceci est immédiat en utilisant la définition du produit tensoriel.

   (b) Dans le cas particulier de $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$, calculer le caractère correspondant, et montrer ensuite que ce résultat peut se réécrire en faisant apparaître la décomposition suivante :

$$\chi(\mathcal{D}^{j} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}) = \chi(\mathcal{D}^{j+\frac{1}{2}}) + \chi(\mathcal{D}^{j-\frac{1}{2}})\,.$$

On rappelle la relation $2 \sin p \, \cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q)$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi(\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}})} &= \boldsymbol{\chi(\mathcal{D}^{j_1})\chi(\mathcal{D}^{\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\left((j+1)\,\theta\right) + \sin(j\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}} = \boldsymbol{\chi(\mathcal{D}^{j+\frac{1}{2}}) + \chi(\mathcal{D}^{j-\frac{1}{2}})\,.}
\end{aligned}$$

   (c) Commenter ce résultat.

Correction : Ce résultat est compatible avec le résultat bien connu

$$\boldsymbol{\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} = \mathcal{D}^{j+\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{D}^{j-\frac{1}{2}}\,.}$$

---

6. On souhaite à présent généraliser la relation d'orthogonalité des caractères vue dans le cas des groupes finis.

   On admet qu'il existe une mesure sur le groupe, dite de Haar, qui permet d'intégrer sur les éléments U du groupe $SU(2)$, ce qui permet d'étendre à un groupe de Lie compact la notion usuelle pour les groupes finis de sommation sur les éléments de ce groupe. Cette mesure est proportionnelle à

$$d\mu(U) = 2(1 - \cos\theta)\, d\theta\, d^2\vec{n}$$

   où l'on note

$$U = \cos\frac{\theta}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{\theta}{2}\,,$$

   et où $d^2\vec{n}$ est la mesure d'intégration sur la sphère unité S^2.

   (a) Donner le domaine de variation de θ afin de parcourir l'ensemble du groupe $SU(2)$.

   <u>Correction</u> : $\boldsymbol{\theta}$ varie sur $[0, 4\pi]$.

   (b) Avec cette définition, quel est le volume du groupe $SU(2)$?

   <u>Correction</u> : Par intégration immédiate on obtient $16\pi^2$.

   ---

7. On admet la relation d'orthogonalité

$$\int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2}\mathcal{D}^{j*}_{mn}(U)\,\mathcal{D}^{j'}_{m'n'}(U) = \frac{1}{2j+1}\delta_{jj'}\,\delta_{mm'}\,\delta_{nn'}\,. \tag{5}$$

   (a) Donner la relation analogue dans le cas d'un groupe fini d'ordre n, de représentations irréductibles notées $\mathcal{D}^{(\rho)}$, leur dimension étant notée n_ρ.

   <u>Correction</u> : Dans le cas des groupes finis, on a établi que

$$\frac{1}{n}\sum_g \mathcal{D}^{(\rho)}_{\alpha\beta}(g)\mathcal{D}^{(\rho')*}_{\alpha'\beta'}(g) = \frac{1}{n_\rho}\delta_{\rho\rho'}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\beta\beta'}$$

dans le cas de deux représentations irréductibles $\mathcal{D}^{(\rho)}$ et $\mathcal{D}^{(\rho')}$, de dimensions n_ρ et $n_{\rho'}$, le groupe G étant d'ordre n.

(b) Comparer ces deux expressions.

<u>Correction</u> **: L'intégration $\int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2}$ remplace la somme $\frac{1}{n}\sum_g$, où le volume du groupe $16\pi^2$ remplace l'ordre n. La dimension n_ρ est ici égale à $2j+1$. Les représentations irréductibles de $SU(2)$ étant étiquetées par j, $\delta_{\rho\rho'}$ est ici remplacé par $\delta_{jj'}$. Enfin $\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\beta\beta'}$ est remplacé par $\delta_{mm'}\,\delta_{nn'}$.**

---

8. Nous allons maintenant démontrer que

$$\int_0^{2\pi} d\theta\,(1-\cos\theta)\,\chi_j[U(\theta)]\,\chi_{j'}[U(\theta)] = 2\pi\delta_{jj'}\,.$$

(a) Donner l'analogue de cette relation dans le cas des groupes finis.

<u>Correction</u> **: Dans le cas des groupes finis, on a établi que**

$$\frac{1}{n}\sum_g \chi^{(\rho)}(g)\chi^{(\rho')*}(g) = \delta_{\rho,\rho'}$$

dans le cas de deux représentations irréductibles $\mathcal{D}^{(\rho)}$ et $\mathcal{D}^{(\rho')}$.

(b) Montrer que

$$\int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2}\chi_j^*(U)\,\chi_{j'}(U) = \delta_{jj'}\,.$$

Il sera utile d'appliquer la relation d'orthogonalité des représentations (5) au cas des éléments diagonaux $m=n$ et $m'=n'$, puis de sommer sur ces indices.

<u>Correction</u> **: Sans sommation sur les indices, on a d'après (5) :**

$$\int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2}\mathcal{D}^{j*}_{mm}(U)\,\mathcal{D}^{j'}_{m'm'}(U) = \frac{1}{2j+1}\delta_{jj'}\,\delta_{mm'}\,,$$

soit en sommant sur m

$$\int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2} \sum_m \mathcal{D}^{j*}_{mm}(U)\, \mathcal{D}^{j'}_{m'm'}(U) = \frac{1}{2j+1}\delta_{jj'}$$

d'où

$$\int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2} \chi^*_j(U)\, \mathcal{D}^{j'}_{m'm'}(U) = \frac{1}{2j+1}\delta_{jj'}\,.$$

Après sommation sur m' on obtient finalement

$$\int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2} \chi^*_j(U)\, \chi_{j'}(U) = \delta_{jj'}\,.$$

(c) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\chi^*_j(U)\, \chi_{j'}(U)\, d\theta = 2\pi\delta_{jj'}\,.$$

<u>Correction</u> : Comme $\chi_j(U)$ ne dépend pas de $\vec{n}$, on peut intégrer sur $\vec{n}$, ce qui conduit à

$$\frac{4\pi}{16\pi^2} 2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\chi^*_j(U)\, \chi_{j'}(U) = \delta_{jj'}\,,$$

ce qui conduit au résultat après avoir remarqué que les caractères de $SU(2)$ sont réels.

---

9. On considère à présent la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\right) \otimes \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\right) \cdots \otimes \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (n\,\text{fois})\,.$

(a) Calculer le caractère $\chi_{(n)}$ de cette représentation.

<u>Correction</u> : $\chi_{(n)} = \left(\frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^n = \left(\frac{\sin(\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n\frac{\theta}{2}\,.$

(b) En déduire sous forme intégrale le nombre d'états de spin j obtenus en couplant n particules de spin 1/2. On montrera que

$$N_j = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^n\phi\, \sin(2j+1)\phi\, \sin\phi\, d\phi \tag{6}$$

Il sera utile d'utiliser les relations d'orthogonalité des caractères établies ci-dessus.

On se restreindra dans la suite au cas où n est pair. On donne

$$N_j = \frac{(2j+1)\,n!}{\left(\frac{n}{2}+j+1\right)!\,\left(\frac{n}{2}-j\right)!} \tag{7}$$

<u>Correction</u> : Par orthogonalité des caractères, il suffit de projeter ce caractère sur le caractère χ_j, ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
N_j &= \int \frac{d\mu(U)}{16\pi^2}\chi_{(n)}(U)\,\chi_j(U) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi_{(n)}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}(1-\cos\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2^n\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\,\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{2^n}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\,\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta
\end{aligned}$$

et donc, en posant $\phi = \theta/2$,

$$N_j = \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^n\phi\,\sin(2j+1)\phi\,\sin\phi\,d\phi\,.$$

---

10. On considère l'état obtenu en couplant $\frac{n}{2}+j$ particules décrites par le ket $|J\,J_z\rangle = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ et $\frac{n}{2}-j$ particules décrites par le ket $|J\,J_z' >= |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle$.

    (a) Quel est la valeur de J_z ? Cet état a-t-il un spin J fixé ? Comment peut-on le caractériser ?

<u>Correction</u> : L'état $|J\,J_z\rangle$ est caractérisé par $J_z = j$, et donc $J \geq j$. Le spin de cet état est donc supérieur ou égal à j.

(b) Calculer le nombre $\phi(j)$ de ces états par un calcul combinatoire élémentaire. Il sera utile de caractériser ces états par le nombre de spins ↑ et de spins ↓, que l'on exprimera à l'aide de n et j.

Correction : Le nombre de ces états est le nombre de façons de choisir $\frac{n}{2}+j$ spins $\uparrow$ et $\frac{n}{2}-j$ spins $\downarrow$ parmi n spins soit

$$\boldsymbol{\phi(j) = \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2}+j \end{pmatrix} .}$$

A noter qu'avec ces notations, le spin J_z vaut bien $\left(\frac{n}{2}+j\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{n}{2}-j\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = j$.

(c) Montrer que le nombre d'états de spin j est

$$N_j = \phi(j) - \phi(j+1)\,. \tag{8}$$

Correction : Le nombre d'états de spin strictement égal à j est donné par

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \phi(j)-\phi(j+1) &= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}+j\right)!\,\left(\frac{n}{2}-j\right)!} - \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}+j+1\right)!\,\left(\frac{n}{2}-j-1\right)!} \\ &= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}+j+1\right)!\,\left(\frac{n}{2}-j\right)!}\left[\left(\frac{n}{2}+j+1\right)-\left(\frac{n}{2}-j\right)\right] \\ &= \frac{n!\,(2j+1)}{\left(\frac{n}{2}+j+1\right)!\,\left(\frac{n}{2}-j\right)!} = N_j \end{aligned}}$$

avec $j < n/2$.

(d) Que vaut $\phi(n/2)$?

Correction : Le nombre d'états de spin $j = n/2$ est égal à 1 (tous les spins doivent être $\uparrow$: $\phi(n/2) = 1$.

(e) En déduire le nombre total d'états obtenus en couplant n particules de spin $1/2$ sans tenir compte de la valeur de J_z.

<u>Correction</u> : Le nombre d'états de spin $n/2$ est égal à 1 : $\phi(n/2) = 1$. Le nombre total d'état est égal à

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N_1 + \cdots + N_{\frac{n}{2}} \\ &= \phi(0) - \phi(1) + \phi(1) - \phi(2) + \cdots + \phi(n/2-1) - \phi(n/2) + 1 \\ &= \phi(0) - \phi(n/2) + 1 = \phi(0)\,. \end{aligned}$$

Ainsi

$$N = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}\,.$$

(f) Déterminer le nombre total d'états obtenus en couplant n particules de spin $1/2$, en tenant compte maintenant à la fois des valeurs possibles de J et de J_z. Pouvait-on facilement deviner ce résultat ?

<u>Correction</u> : Le nombre total d'état en tenant compte de J_z est

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (2j+1)\, N_j \\ &= 1\,[\phi(0) - \phi(1)] + 3\,[\phi(1) - \phi(2)] + \cdots + (n-1)\,[\phi(n/2-1) - \phi(n/2)] \\ &+ \; n + 1 = \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix} + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}+j} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2}+j \end{pmatrix} - (n-1)\,1 + n + 1\,. \end{aligned}$$

La somme ci-dessus est égale à

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}+j} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2}+j \end{pmatrix} = \frac{(1+1)^n}{2} - 1 - \frac{\begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix}}{2}$$

d'où

$$\boldsymbol{\mathcal{N}_n = 2^n = \left(2\,\frac{1}{2} + 1\right)^n}$$

qui correspond bien au nombre d'états d'un produit tensoriel de $\boldsymbol{n}$ espaces à deux états.