Université Pierre et Marie Curie

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Examen de 2ème session

jeudi 29 juin 2017

Quaternions

1 Groupe des quaternions

On considère le groupe multiplicatif Q des quaternions formé à partir des produits des éléments 1, i, j, k qui satisfont par hypothèse aux relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\,. \tag{1}$$

1.1 Quelques propriétés élémentaires

1. Montrer que l'ordre du groupe Q est égal à 8 et donner ses éléments.

Corrigé :

Le groupe est d'ordre 8 par inspection :

Par produit à droite par k de l'égalité $ijk = -1$ on tire $ijk^2 = -k$ soit $ij = k$.

De même par produit à gauche par i on tire $i^2jk = -i$ soit $jk = i$.

Le produit à gauche par i de l'égalité $ij = k$ conduit à $i^2j = ik$ soit $ik = -j$.

Le produit à droite par j de l'égalité $ij = k$ conduit à $ij^2 = kj$ soit $kj = -i$.

Le produit à gauche par j de l'égalité $jk = i$ conduit à $j^2k = ji$ soit $ji = -k$.

Enfin le produit à droite par i de cette dernière égalité mène à $ji^2 = -ki$ soit $ki = j$.

Ceci permet de conclure que tout produit arbitraire (*mot*) des générateurs i, j, k se réduit à l'un des éléments $\{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$, qui sont tous distincts et donc que Q est d'ordre 8.

2. Déterminer la table de Cayley du groupe Q.

Corrigé :

D'après la question précédente, la table de Cayley de Q est la suivante :

·	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
1	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
i	i	-1	k	-j	-i	1	-k	j
j	j	-k	-1	i	-j	k	1	-i
k	k	j	-i	-1	-k	-j	i	1
-1	-1	-i	-j	-k	1	i	j	k
-i	-i	1	-k	j	i	-1	k	-j
-j	-j	k	1	-i	j	-k	-1	i
-k	-k	-j	i	1	k	j	-i	-1

1.2 Structure de Q

3. Sous-groupes de Q

a. Donner l'ordre de chacun des éléments.

Corrigé :

L'élément 1 est d'ordre 1, -1 est d'ordre 2 et i, j, k sont d'ordre 4.

b. Quel est le centre du groupe Q?

Corrigé :

C'est $Z_2 = -1, 1$.

c. Préciser les sous-groupes propres de Q. On donnera leur ordre ainsi qu'un générateur pour chacun d'eux. Commenter.

Corrigé :

La question précédente montre que Q possède 4 sous-groupes propres : le centre Z_2 engendré par -1, et 3 sous-groupe isomorphes à Z_3, engendré respectivement par i, j et k. L'ordre de ces sous-groupes est égal à 2 et 4, en accord avec le théorème de Lagrange.

d. Montrer que

$$\forall x, \forall y, \text{ si } x^2 = y^2 \text{ alors } y\, x\, y^{-1} = x^{-1}\,, \tag{2}$$

et

$$\forall x, \forall y, \text{ si } x^2 = -y^2 \text{ alors } y\, x\, y^{-1} = x\,. \tag{3}$$

Corrigé :

Les deux propositions demandée reviennent à distinguer le cas où x et y sont tous deux dans le centre ou tous deux en dehors du centre (cas (2)) du cas où l'un est dans le centre et l'autre non (cas (3)).

Cas (2) : $x^2 = y^2$

- considérons deux éléments x et y qui n'appartiennent pas au centre de Q. D'après la table de Cayley de Q, x et y anticommutent, donc $y\, x\, y^{-1} = -x\, y\, y^{-1} = -x = x^{-1}$.

- si x et y sont tous deux dans le centre, alors $y\, x\, y^{-1} = x\, y\, y^{-1} = x = x^{-1}$.

Cas (3) : $x^2 = -y^2$

l'un des deux éléments est dans le centre, l'autre non. Donc $x\, y = y\, x$ et donc $y\, x\, y^{-1} = x\, y\, y^{-1} = x$.

e. En déduire que tous les sous-groupes de Q sont cycliques et distingués.

Corrigé :

La propriété est immédiate :

- voir la question précédente pour l'invariance par conjugaison d'un élément x d'un sous-groupe de Q : on obtient soit x soit $-x$, qui sont par définition tous deux éléments du sous-groupe.

- voir la question 3.b. pour la cyclicité.

4. On considère le groupe obtenu en prenant le quotient de Q par le sous-groupe $1, -1$. A quel groupe est-il isomorphe ?

Corrigé :

Il est isomorphe au groupe D_4. En effet, il n'y a que deux possibilités : soit Z_4, qui est cyclique, soit D_4 qui ne n'est pas. Or le groupe quotient considéré n'est clairement pas cyclique (un seul élément ne suffit pas pour l'engendrer : impossible par exemple de passer d'un élément de la classe $i, -i$ à un élément de la classe $j, -j$ par puissances successives.

5. Déterminer les classes de conjugaison du groupe Q.

Corrigé :

En utilisant la question 4.a., on en déduit que les classes de conjugaison sont au nombre de 5 : 1, -1, $i, -i$, $j, -j$ et $k, -k$.

1.3 Une nouvelle présentation de Q

6.(**) On a vu, cf (2), une propriété satisfaite par certains éléments de Q. Réciproquement, on cherche à construire le groupe à partir de cette contrainte, plutôt que de partir des relations (1), c'est-à-dire à trouver une *présentation* équivalente du groupe.

On souhaite donc montrer que le groupe Q a pour présentation

$$\langle x, y | x^4 = 1,\, x^2 = y^2,\, y\,x\,y^{-1} = x^{-1} \rangle \tag{4}$$

qu'il sera commode d'écrire sous la forme

$$\langle x, y | x^4 = 1,\, x^2 = y^2,\, y\,x = x^3 y \rangle \tag{5}$$

a. En étudiant les *mots* finis de forme générique $x^a y^b x^c$... (où a, b, c, $\cdots$ sont des entiers), après réduction de ces mots avec les contraintes ci-dessus, mots qui constituent par définition l'ensemble des éléments du groupe G, montrer que le groupe G est nécessairement constitué des éléments de la forme

$$G = \{x^s y^t |\, 0 \leqslant s \leqslant 3,\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}\,.$$

Corrigé :
La relation $yx = x^3 y$ permet dans tout mot de faire passer les y qui sont à gauche de x à sa droite (au prix d'augmenter la puissance de x de 2 unités, et la relation $y^2 = x^2$ permet de se limiter aux puissances inférieures ou égale à 1 pour y, tandis que la relation $x^4 = 1$ limite la puissance de x à 3.

---

b. En déduire le résultat demandé. On donnera un exemple de choix possible pour x et y.

Corrigé :
Le cardinal de l'ensemble précédent est égal à 8, et il n'y a pas de relation permettant de réduire plus avant le nombre de mots donc d'éléments. Comme les éléments i, j, k satisfont ces relations, cela suffit à montrer que le groupe G est bien isomorphe à Q.

1.4 Une représentation particulière de Q

7. Montrer que Q peut être représenté par les 4 matrices $\mathbb{1}$ et $-i\sigma_i$, où les σ_i sont les matrices de Pauli.

Corrigé :
Le résultat est immédiat en utilisant la propriété vue en cours :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k\,.$$

2 Corps des quaternions

On considère l'algèbre réelle $\mathbb{H}$ engendrée par les éléments 1, i, j, k. On note

$$Q = a\,1 + b\,i + c\,j + d\,k \tag{6}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$.

2.1 Conjugué

Par définition, le *conjugué* $\bar{Q}$ de ce quaternion Q est le quaternion

$$\bar{Q} = a\,1 - b\,i - c\,j - d\,k\,. \tag{7}$$

On écrira de façon équivalente

$$Q = (a, \vec{V})\,, \quad \bar{Q} = (a, -\vec{V}) \tag{8}$$

avec $\vec{V} = (b, c, d)$, vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Par analogie avec les nombres complexes, un quaternion de la forme $(a, \vec{0})$ sera appelé quaternion *réel* et un quaternion de la forme $(0, \vec{V})$ sera appelé quaternion *pur*.

2.2 Structure algébrique

8. Somme et produit par un scalaire
a. Soient deux quaternions $Q_1 = (a_1, \vec{V}_1)$ et $Q_2 = (a_2, \vec{V}_2)$. Que vaut la somme de ces deux quaternions ?

Corrigé :

De façon immédiate

$$Q_1 + Q_2 = (a_1 + a_2, \vec{V}_1 + \vec{V}_2) \, .$$

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Q = (a, \vec{V})$ un quaternion. Que vaut $\lambda \, Q$?

Corrigé :

$\lambda \, Q = (\lambda \, a, \lambda \, \vec{V}) \, .$

9. Produit quaternionique

Montrer que

$$Q_1 \cdot Q_2 = (a_1 \, a_2 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \, , a_1 \, \vec{V}_2 + a_2 \, \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \, . \tag{9}$$

Corrigé :

Il suffit de développer le produit $Q_1 \cdot Q_2$:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1 \, i + c_1 \, j + d_1 \, k) \cdot (a_2 + b_2 \, i + c_2 \, j + d_2 \, k) \\ = \; & a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + a_1(b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\ + \; & (b_1 c_2 - b_2 c_1) k - (b_1 d_2 - d_1 b_2) j + (c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ = \; & (a_1 \, a_2 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \, , a_1 \, \vec{V}_2 + a_2 \, \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \, . \end{aligned}$$

10. Distributivité

Soient $Q_1 = (a_1 \, , \vec{V}_1)$, $Q_2 = (a_2 \, , \vec{V}_2)$, $Q_3 = (a_3 \, , \vec{V}_3)$ trois quaternions. Montrer sur ces notations que la distributivité du produit quaternionique par rapport à l'addition est bien satisfaite sur $\mathbb{H}$, i.e. que

$$(Q_1 + Q_2) \cdot Q_3 = Q_1 \cdot Q_3 + Q_2 \cdot Q_3 \, . \tag{10}$$

Corrigé :

On part de

$$\begin{aligned}&(Q_1+Q_2)\cdot Q_3=(a_1+a_2,\vec{V}_1+\vec{V}_2)\cdot(a_3,\vec{V}_3)\\&=((a_1+a_2)a_3-(\vec{V}_1+\vec{V}_2)\vec{V}_3,(a_1+a_2)\vec{V}_3+a_3(\vec{V}_1+\vec{V}_2)+(\vec{V}_1+\vec{V}_2)\wedge\vec{V}_3)\,.\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la distributivité du produit par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$, la distributivité du produit scalaire et du produit vectoriel par rapport à la somme de deux vecteurs pour finalement obtenir le résultat attendu.

---

11. Associativité

Comme pour tout corps, le produit quaternionique sur $\mathbb{H}$ doit être associatif. Soient donc $Q_1=(a_1\,,\vec{V}_1)$, $Q_2=(a_2\,,\vec{V}_2)$, $Q_3=(a_3\,,\vec{V}_3)$ trois quaternions. On se propose de vérifier sur ces formes que

$$(Q_1\cdot Q_2)\cdot Q_3=Q_1\cdot(Q_2\cdot Q_3)\,. \tag{11}$$

a. Justifier le fait que montrer cette associativité se ramène à montrer l'associativité sur les quaternions purs. Il sera utile d'utiliser la décomposition de chacun des quaternions en comme d'une parte réelle et d'une partie pure.

Corrigé :

Ecrivons $Q_i=r_i+p_i$ pour chacun des trois quaternions. On a alors, en utilisant la distributivité,

$$\begin{aligned}&(Q_1\cdot Q_2)\cdot Q_3\\&=((r_1+p_1)\cdot(r_2+p_2))\cdot(r_3+p_3)=(r_1\,r_2+r_1\,p_2+r_2\,p_1+p_1\cdot p_2)\cdot(r_3+p_3)\\&=r_1\,r_2\,r_3+r_1\,r_2\,p_3+r_1\,p_2\cdot r_3+r_1\,p_2\cdot p_3+r_2\,p_1\cdot r_3+r_2\,p_2\cdot p_3+r_3\,p_1\cdot p_2+(p_1\cdot p_2)\cdot p_3\end{aligned}$$

où l'on a enlevé toutes les parenthèses par associativité et propriété du produit scalaire, sauf pour le dernier terme qui ne fait intervenir que des quaternions purs.

Le calcul de $Q_1\cdot(Q_2\cdot Q_3)$ mène au même résultat hormis le dernier terme qui s'écrit cette fois $p_1 \cdot (p_2 \cdot p_3)$. Ceci montre bien qu'il nous suffit de prouver l'associativité dans le cas des quaternions purs.

---

b. Démontrer l'associativité dans le cas des quaternions purs. On rappelle la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}\,. \tag{12}$$

On montrera en particulier que pour des quaternions purs, la partie réelle de $Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_3)$ vaut l'opposé du produit mixte $[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3]$, résultat utile pour la suite.

Corrigé :

Soient $Q_1 = (0\,, \vec{V}_1)$, $Q_2 = (0\,, \vec{V}_2)$, $Q_3 = (0\,, \vec{V}_3)$ trois quaternions purs. Alors

$$\begin{aligned}
(Q_1 \cdot Q_2) \cdot Q_3 \quad &= (-\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2, \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot (0, \vec{V}_3) \\
&= (-(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3, -(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3) \\
&= (-[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3], -(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3 - \vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)) \\
&= (-[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3], -(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3 - (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_1) + (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_1)\, \vec{V}_2)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule du double produit vectoriel pour la dernière égalité. D'autre part,

$$\begin{aligned}
Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_3) \quad &= (0, \vec{V}_1) \cdot (-\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3, \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \\
&= (-\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3), -(\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3)\vec{V}_1 + \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)) \\
&= (-[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3], -(\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3)\, \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)\, \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\, \vec{V}_3)
\end{aligned}$$

et l'on obtient donc bien le résultat d'associativité recherché : $(Q_1 \cdot Q_2) \cdot Q_3 = Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_3)$.

---

12. Norme, inverse

On définit la norme de Q par

$$\|Q\| = \sqrt{Q \cdot \bar{Q}}\,. \tag{13}$$

a. Donner l'expression de $\|Q\|$ pour un quaternion écrit sous la forme $Q = (a\,, \vec{V})$, et justifier cette appellation.

Corrigé :

On a immédiatement d'après la question précédente

$$\|Q\| = \sqrt{a^2 + \vec{V}^2}\,,$$

réel positif (ce qui justifie donc le fait de prendre la racine carré) qui s'identifie à la norme (au carré) usuelle sur $\mathbb{R}^4$. C'est donc bien une norme.

b. Soit Q un quaternion de norme non nulle. Montrer qu'il possède un inverse et donner son expression. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps. Commenter le résultat obtenu pour Q^{-1} en comparant au cas de $\mathbb{C}$.

Corrigé :

Comme $Q \cdot \bar{Q} = \|Q\|^2$, on en déduit que pour tout Q non nul, $Q^{-1} = \bar{Q}/\|Q\|^2$.
Ainsi l'algèbre $\mathbb{H}$ est un corps puisque tout élément non nul (élément neutre de l'addition sur l'algèbre $\mathbb{H}$) possède un inverse dans $\mathbb{H}$.
Ce résultat obtenu pour Q^{-1} est la généralisation à $\mathbb{H}$ de l'expression $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ pour le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

c. Soient Q_1 et Q_2 deux quaternions. Calculer $\overline{Q_1 \cdot Q_2}$ en fonction de $\bar{Q}_1$ et $\bar{Q}_2$.

Corrigé :

Montrons que $\overline{Q_1 \cdot Q_2} = \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1$. En utilisant l'expression (9) on vérifie immédiatement ce résultat. En effet les conjugaisons $Q_1 \to \bar{Q}_1$ et $Q_2 \to \bar{Q}_2$ changent le signe de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. Ceci a l'effet escompté sur $Q_1 \cdot Q_2 \to \overline{Q_1 \cdot Q_2}$ à condition de changer l'ordre et de considérer le produit $Q_2 \cdot Q_1$. Ceci vient de la partie faisant intervenir le produit vectoriel qui change de signe à condition d'échanger les deux vecteur $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
Le résultat peut bien sûr s'obtenir par calcul direct.

d. Montrer que $\|Q_1 \cdot Q_2\| = \|Q_1\| \, \|Q_2\|$.

Corrigé :

Par définition, $\|Q_1 \cdot Q_2\| = (Q_1 \cdot Q_2) \cdot \overline{Q_1 \cdot Q_2} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1 = Q_1 \cdot \|Q_2\|^2 \cdot \bar{Q}_1 = Q_1 \cdot \bar{Q}_1 \|Q_2\|^2 = \|Q_1\|^2 \, \|Q_2\|^2$, où l'on a utilisé le fait que $\|Q_2\|^2$ est un scalaire (réel) qui commute donc avec $\bar{Q}_1$, ainsi que l'associativité établie plus haut. Le résultat demandé s'obtient en prenant la racine carrée.

---

e. Retrouver l'expression de $\overline{Q_1 \cdot Q_2}$ en étudiant l'inverse de $Q_1 \cdot Q_2$.

Corrigé :

$$(Q_1 \cdot Q_2)^{-1} = Q_2^{-1} \cdot Q_1^{-1} = \frac{\bar{Q}_2}{\|Q_1\|^2} \tag{14}$$

2.3 Quaternions unitaires, forme polaire

Nous allons maintenant décomposer tout quaternion non nul en le produit de sa norme par un quaternion unitaire.

13. a. Montrer que tout quaternion $Q = (a, \vec{V})$ peut s'écrire sous la forme polaire

$$Q = \|Q\|(\cos\varphi \, , \sin\varphi \, \vec{U}) \tag{15}$$

où φ est un angle, et $\vec{U}$ est un vecteur unitaire que l'on précisera.

Corrigé :

$$Q = (a, \vec{V}) = \|Q\| \left(\frac{a}{\|Q\|}, \frac{\|\vec{V}\|}{\|Q\|} \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \right) = \|Q\| \left(\cos\varphi \, , \sin\varphi \, \vec{U} \right)$$

avec

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \, , \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\|Q\|} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{\|\vec{V}\|}{\|Q\|}$$

la définition de φ étant justifiée par le fait que $a^2 + \|\vec{V}\|^2 = \|Q\|^2$.

---

b. Soit Q un quaternion écrit sous la forme polaire

$$Q = \|Q\|(\cos\varphi\,, \sin\varphi\,\vec{U})\,.$$

Donner la forme polaire de l'inverse de Q.

Corrigé :

$$Q^{-1} = \frac{1}{\|Q\|}(\cos\varphi\,, -\sin\varphi\,\vec{U})\,.$$

---

14. On note $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H}\ \{0\}$.

a. Montrer que l'ensemble des quaternions unitaires forme un sous-groupe de $\mathbb{H}^\times$ que l'on notera $Sp(1)$.

Corrigé :

Le fait que $Sp(1)$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^\times$ est immédiat, puisque le produit de deux quaternions unitaires est unitaire et que son inverse l'est aussi.

---

b. Pourquoi le groupe $Sp(1)$ est-il un groupe de Lie ? Quelle est sa dimension ?

Corrigé :

Le fait que ce soit un groupe de Lie vient du fait que l'écriture polaire est explicitement une écriture qui permet de différentier suivant 3 directions indépendantes. Sa dimension est donc égale à 3.

---

c. Quelle est l'algèbre de Lie de $Sp(1)$?

Corrigé :

L'algèbre de Lie de $Sp(1)$ est constituée des générateurs $e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_3 = k$ qui vérifient

$$[e_\alpha, e_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma \,.$$

C'est donc l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$.

---

3 Morphisme de $Sp(1)$ sur $SO(3)$

Soit l'application

$$\begin{aligned} \Phi : Sp(1) &\rightarrow SO(3) \\ Q &\mapsto R(Q) \end{aligned} \tag{16}$$

tel que

$$\begin{aligned} &\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \vec{x}\,' = R(Q)\,\vec{x} \\ \text{défini par} \qquad &(0, \vec{x}\,') = Q \cdot (0, \vec{x}) \cdot Q^{-1} \,. \end{aligned} \tag{17}$$

14. a. Montrer que les éléments conjugués des quaternions purs sous l'action de $\mathbb{H}^\times$ sont des quaternions purs. L'ensemble des quaternions purs est-t-il un sous-groupe invariant de $\mathbb{H}^\times$?

Corrigé :

La conjugaison d'un quaternion pur $(0, \vec{x})$ par un quaternion quelconque $Q = (a, \vec{V})$ s'écrit

$$\begin{aligned} &Q \cdot (0, \vec{x}) \cdot Q^{-1} = (a, \vec{V}) \cdot (0, \vec{x}) \cdot (a, -\vec{V}) = (-\vec{V} \cdot \vec{x}, a\vec{x} + \vec{V} \wedge \vec{x}) \cdot (a, -\vec{V}) \\ &(-a\vec{V} \cdot \vec{x} + a\vec{V} \cdot \vec{x}, \cdots) = (0, \cdots) \end{aligned}$$

qui est bien un quaternion pur. Attention, l'ensemble des quaternions purs n'est pas un sous-groupe invariant car ce n'est pas un sous-groupe : En effet, $(0, \vec{V}_1) \cdot (0, \vec{V}_2) = (-\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2, \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ qui n'est pas un quaternion pur en général. Ceci est l'analogue du fait que $i^2 = -1$ pour les nombres complexes : les imaginaires purs ne forment pas un sous-groupe de $\mathbb{C}$.

---

b. Justifier alors le fait que l'écriture (17) ait un sens.

Corrigé :

D'après la question précédente, en particulier ici sous l'action de $Sp(1)$, $(0, \vec{x})$ reste un quaternion pur sous la conjugaison par $Q \in Sp(1)$, ce qui justifie l'écriture du membre de gauche de (17).

---

c. Justifier le fait que Φ soit un morphisme de groupe.

Corrigé :

D'une part $Sp(1)$ et $SO(3)$ sont deux groupes. D'autre part $\Phi(Q_1 \cdot Q_2) = R(Q_1 \cdot Q_2) = R(Q_1)R(Q_2) = \Phi(Q_1)\Phi(Q_2)$: en effet, $(Q_1 \cdot Q_2)^{-1} = Q_2^{-1} \cdot Q_1^{-1}$ et donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $(0, R(Q_1 \cdot Q_2)\vec{x}) = (Q_1 \cdot Q_2) \cdot (0,\, \vec{x}) \cdot (Q_1 \cdot Q_2)^{-1} = Q_1 \cdot (Q_2 \cdot (0,\, \vec{x}) \cdot Q_2^{-1}) \cdot Q_1^{-1} = (0, R(Q_1)R(Q_2)\vec{x})$.

---

15. Justifier en détail le fait que $R(Q)$ soit une rotation. On montrera que

a. $R(Q)$ préserve les longueurs.

Corrigé :

Le fait que $R(Q)$ ainsi construit soit un élément de $O(3)$ (donc qu'il conserve les longueurs) vient du fait que

$$\|\vec{x}\| = (0, \vec{x}\,')\| = \|Q\| \|(0, \vec{x})\| \|Q^{-1}\| = \|(0, \vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

puisque $\|Q^{-1}\| = 1/\|Q\|$.

---

b. $R(Q)$ préserve le produit mixte.

Corrigé :

Le fait que $R(Q)$ soit un élément de $SO(3)$ résulte de la conservation du produit mixte $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$. Ceci s'établit en utilisant le fait vu plus haut que la partie réelle de $(0, \vec{x}) \cdot (0, \vec{y}) \cdot (0, \vec{z})$

est l'opposé de $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]$. Or $[\vec{x'},\vec{y'},\vec{z'}]$ est l'opposé de la partie réelle de

$$\begin{aligned}(0,\vec{x'})\cdot(0,\vec{y'})\cdot(0,\vec{z'}) &= Q\cdot(0,\vec{x})\cdot Q^{-1}\cdot Q\cdot(0,\vec{y})\cdot Q^{-1}\cdot Q\cdot(0,\vec{z})\cdot Q^{-1}\\ &= Q\cdot(0,\vec{x})\cdot(0,\vec{y})\cdot(0,\vec{z})\cdot Q^{-1}\,.\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que la partie réelle de $Q\cdot(0,\vec{x})\cdot(0,\vec{y})\cdot(0,\vec{z})\cdot Q^{-1}$ est a même que celle de $(0,\vec{x})\cdot(0,\vec{y})\cdot(0,\vec{z})$ Considérons donc

$$Q\cdot(m,\vec{u})\cdot Q^{-1} = (a,\vec{V})\cdot(m,\vec{u})\cdot(a,-\vec{V})\frac{1}{\|Q\|^2} = (am-\vec{u}\cdot\vec{V}, a\vec{u}+m\vec{V}+\vec{V}\wedge\vec{u})\cdot(a,-\vec{V})\frac{1}{\|Q\|^2}$$
$$= (a^2m - a\vec{u}\cdot\vec{V}+a\vec{u}\cdot\vec{V}+m\vec{V}^2,\cdots)\frac{1}{\|Q\|^2} = (m,\cdots)$$

puisque $\|Q\|^2 = a^2+\vec{V}^2$, ce qui prouve le résultat.
On notera que le fait d'avoir multiplié à droite par Q^{-1} plutôt que par $\bar{Q}$ compense la norme, même si Q est un élément quelconque de $\mathbb{H}^\times$ (pas forcément de $Sp(1)$). Cependant, afin de pouvoir construire un isomorphisme localement autour de l'identité de $\mathbb{H}^\times$ et de $SO(3)$, on se restreint à $Sp(1)$.

---

16. Caractérisation de $R(Q)$. Soit $Q\in Sp(1)$ écrit sous la forme

$$Q = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\varphi\frac{\varphi}{2}\vec{n})\,, \tag{18}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire.
Caractériser en détail la rotation $R(Q)$ construite à l'aide du morphisme Φ.

Corrigé :
a. Le vecteur $\vec{n}$ est invariant par action de $R(Q)$. En effet

$$\begin{aligned}Q\cdot(0,\vec{n})\cdot Q^{-1} &= \left(\cos\frac{\varphi}{2},\sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\right)\cdot(0,\vec{n})\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2},-\sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\right)\\ &= \left(-\sin\frac{\varphi}{2},\cos\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2},-\sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\right)\\ &= \left(-\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}^2,\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}+\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}\right) = (0,\vec{n}).\end{aligned}$$

C'est donc l'axe de la rotation.

b. Soit $\vec{V}$ un vecteur orthogonal à n.

$$\begin{aligned}
&Q \cdot (0, \vec{V}) \cdot Q^{-1} = \left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\right) \cdot (0, \vec{V}) \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2}, -\sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\right) \\
&= \left(-\sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{V}, \sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\wedge\vec{V} + \cos\frac{\varphi}{2}\,\vec{V}\right) \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2}, -\sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\right) \\
&= \left(-\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\cdot\vec{V} + \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}\cdot\vec{V},\right. \\
&\left.\sin\frac{\varphi}{2}\,\cos\frac{\varphi}{2}\vec{n}\wedge\vec{V} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\vec{V} - \sin\frac{\varphi}{2}(\vec{n}\wedge\vec{V})\wedge\vec{n} - \sin\frac{\varphi}{2}\,\cos\frac{\varphi}{2}\vec{V}\wedge\vec{n}\right) \\
&= (0, \sin\varphi\,\vec{n}\wedge\vec{v} + \cos\varphi\,\vec{V}).
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'image de $\vec{V}$ par $R(Q)$ est un vecteur obtenu par rotation d'angle φ autour de $\vec{n}$.