Sorbonne Université

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Examen de 2ème session

jeudi 28 juin 2018

Quelques résultats sur le groupe des tresses

Définition :

Pour $n \geq 2$, le groupe des tresses à n brins $\mathcal{B}_n$ est le groupe engendré par $n-1$ générateurs $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ soumis aux relations suivantes, appelées relations de tresses :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots n-1\}, \qquad \begin{cases} |i-j| = 1 & \Rightarrow \quad \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \\ |i-j| > 1 & \Rightarrow \quad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ . \end{cases} \tag{1}$$

On notera $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'indice n.

1 Quelques considérations générales

1. On note s_i la transposition $(i, i+1)$ $\mathcal{S}_n$. Montrer que les transpositions vérifient les relations de tresses.

2. A-t-on $\mathcal{B}_n = \mathcal{S}_n$?

Corrigé :

Non, car il faudrait imposer $s_i^2 = 1$..

---

3. On définit l'application projection π.

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{B}_n \quad &\rightarrow \quad \mathcal{S}_n \\ \sigma_i \quad &\mapsto \quad \pi(\sigma_i) = s_i \ . \end{aligned} \tag{2}$$

a. Justifier le fait que π est un morphisme.

Corrigé :

Comme les générateurs de $\mathcal{B}_n$ satisfont au relation de tresses, il est clair que π est bien défini et que π est un morphisme.

b. π est-il bijectif ?

Corrigé :

Non car $\forall i,\ \pi(s_i^2) = e$.

c. En utilisant π, montrer que $\mathcal{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

Corrigé :

Si $\mathcal{B}_n$ est commutatif, alors $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ et par morphisme $s_1s_2 = \pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2) = \pi(\sigma_2)\pi(\sigma_1) = s_2s_1$ ce qui est impossible.

4. Donner un sous-groupe monogène trivial de $\mathcal{B}_n$. Que peut-on conclure sur le cardinal de $\mathcal{B}_n$?

Corrigé :

Pour tout σ_i distinct de l'identité, l'ensemble des puissance de σ_i est un sous-groupe (voir cours), appelé sous-groupe de $\mathcal{B}_n$ engendré par σ_i. Il est clairement d'ordre infini, et donc $\mathcal{B}_n$ est lui-même de cardinal infini.

2 Centre de $\mathcal{B}_n$

5. Quel est le centre de $\mathcal{B}_2$?

Corrigé :

Par définition B_2 est engendré par un seul générateur σ_1. B_2 est donc un groupe monogène, donc abélien. Son centre est donc B_2 tout entier.

Pour $n \geq 2$, on note

$$\theta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n . \tag{3}$$

6. a. Montrer que θ_3 appartient au centre de $\mathcal{B}_3$.

Corrigé :

On a $\theta_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2$. D'une part,

$$\sigma_1\theta_3 = \sigma_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)(\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = \theta_3\sigma_1 ,$$

et d'autre part

$$\sigma_2\theta_3 = \sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = (\sigma_2\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)(\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = \theta_3\sigma_2 .$$

---

b. On pose $A = \sigma_1\sigma_2$. Etudier le commutateur de σ_1 et σ_2 avec les puissances successives de A.

Corrigé :

$\sigma_2 A = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = A\sigma_1$ et $\sigma_1 A^2 = \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2 = A^2\sigma_2$. Les autres commutations se déduisent de la question précédente.

---

c. Montrer que θ_3 engendre le centre de $\mathcal{B}_3$.

Corrigé :

Tout élément de $\mathcal{B}_3$ est un mot formé à partir de σ_1 et σ_2. On se convainc alors du résultat par inspection, en utilisant la question précédente.

---

7. Dans cette question on souhaite montrer que $\theta_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$ appartient au centre de $\mathcal{B}_n$. On pose $A_n = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}$.

a. Montrer que

$$\forall i \text{ tel que } i > 1,\ \sigma_i A_n = A_n \sigma_{i-1}\,. \tag{4}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned}
\sigma_i A_n &= \sigma_i(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-2}(\sigma_i\sigma_{i-1}\sigma_i)\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-2}(\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i-1})\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}\sigma_{i-1} = A_n\sigma_{i-1}\,.
\end{aligned}$$

---

b. Montrer que

$$\forall n \text{ tel que } n-1 < i,\ A_n\sigma_i = \sigma_{i+1}A_n\,. \tag{5}$$

Corrigé :

$$
\begin{aligned}
A_n\sigma_i &= (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i && (6)\\
&= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-1}(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i)\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1} && (7)\\
&= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-1}(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1} && (8)\\
&= \sigma_{i+1}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1} = \sigma_{i+1}A_n\,. && (9)
\end{aligned}
$$

---

c. Montrer que

$$\sigma_1 A_n^2 = A^2\sigma_{n-1}\,. \tag{10}$$

Corrigé :

En utilisant de façon répétée la relation (5) on obtient

$$
\begin{aligned}
A_n^2 &= A\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\\
&= \sigma_2 A\sigma_2\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\\
&= \sigma_2\sigma_3 A\sigma_3\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\\
&\cdots\\
&= \sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_{n-2}A\sigma_{n-1}
\end{aligned}
$$

et donc

$$\sigma_1 A_n^2 = A_n^2\sigma_{n-1}\,.$$

---

d. En utilisant les résultats précédents, montrer finalement que

$$\forall i \text{ tel que } 1 \le i \le n-1\,, \sigma_i\theta_n = \theta_n\sigma_i\,, \tag{11}$$

et conclure.

Corrigé :

D'une part, d'après (4),

$$\sigma_i A_n^{i-1} = A_n^{i-1}\sigma_1$$

et d'autre part, d'après (5),

$$A_n^{n-1-i}\sigma_i = \sigma_{n-1}A_n^{n-1-i}$$

donc

$$\begin{array}{rcl}\sigma_i\theta_n = \sigma_i A_n^n & = & \sigma_i A_n^{i-1}A_n^{n+1-i} = A^{i-1}\sigma_1 A_n^2 A_n^{n-1-i} \\ & = & A^{i-1}A_n^2\sigma_{n-1}A_n^{n-1-i} = A_n^n\sigma_i = \theta_n\sigma_i\end{array}$$

ce qui montre que θ_n est dans le centre de $\mathcal{B}_n$.

---

3 Actions de groupe, représentations

8. Action de groupe

Soit G un groupe et X l'ensemble des $n-$tuples d'éléments de G dont le produit est égal à l'identité de G.

Montrer que $\mathcal{B}_n$ agit sur X de la façon suivante :

$$\sigma_i(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n) = (x_1,\cdot,x_{i-1},x_{i+1},x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n) \qquad (12)$$

Corrigé :

On remarque tout d'abord que cette action préserve le fait que le produit des n termes soit égal à 1. Il suffit alors de vérifier que les relations de tresses sont préservées par cette action :

1) si $|i-j|\geq 1$, sans perte de généralité on peut supposer que $i-j\geq 1$,

$$\begin{array}{rl} & \sigma_j(\sigma_i(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)) \\ = & \sigma_j(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\cdots,x_{i-1},x_{i+1},x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n) \\ = & (x_1,\cdots,x_{j+1},x_{j+1}^{-1}x_jx_{j+1},\cdots x_{i-1},x_{i+1},x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n)\end{array}$$

et

$$
\begin{aligned}
& \sigma_i(\sigma_j(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)) \\
= \ & \sigma_i(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},x_{j+1}^{-1}x_jx_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_n) \\
= \ & (x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},x_{j+1}^{-1}x_jx_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{i-1},x_{i+1},x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n)
\end{aligned}
$$

ce qui montre que

$$
\sigma_j(\sigma_i(x_1,\cdots,x_n))=\sigma_i(\sigma_j(x_1,\cdots,x_n))
$$

en accord avec la relation $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$.
De même,

$$
\begin{aligned}
& \sigma_{i+1}(\sigma_i(\sigma_{i+1}(x_1,\cdots,x_n))) \\
= \ & \sigma_{i+1}(\sigma_i(x_1,\cdots,x_i,x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}x_{i+2},x_{i+3},\cdots,x_n)) \\
= \ & \sigma_{i+1}(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_ix_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}x_{i+2},x_{i+3},\cdots,x_n) \\
= \ & (x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}^{-1}x_{i+2}x_{i+2}^{-1}x_ix_{i+2}x_{i+2}^{-1}x_{i+1}x_{i+2},x_{i+3},\cdots,x_n) \\
= \ & (x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1}x_{i+2},x_{i+3},\cdots,x_n)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& \sigma_i(\sigma_{i+1}(\sigma_i(x_1,\cdots,x_n))) \\
= \ & \sigma_i(\sigma_{i+1}(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n)) \\
= \ & \sigma_i(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1}x_{i+2},x_{i+3},\cdots,x_n) \\
= \ & (x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}x_{i+2},x_{i+2}^{-1}x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1}x_{i+2},x_{i+3},\cdots,x_n)
\end{aligned}
$$

ce qui montre que

$$
\sigma_{i+1}(\sigma_i(\sigma_{i+1}(x_1,\cdots,x_n)))=\sigma_i(\sigma_{i+1}(\sigma_i(x_1,\cdots,x_n)))
$$

en accord avec la relation $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

---

9. Représentation de Burau (1936)

Soit R un anneau commutatif (c'est un groupe pour l'addition, muni d'une multiplication commutative, associative, distributive par rapport à l'addition, et possédant un élément neutre). On note $R[t,t^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients dans R. C'est une généralisation de la notion de polynôme, ses éléments étant de la forme

$$p(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k t^k \tag{13}$$

où les coefficients a_k sont l'anneau R, et le nombre de coefficients a_k non nuls est fini. Comme l'anneau usuel $R[t]$ des polynômes à coefficients dans R, on montre facilement que $R[t,t^{-1}]$ possède une structure d'anneau. Dans la suite, on considérera l'anneau $\Lambda = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant étudier la représentation de Burau de $\mathcal{B}_n$ sur l'espace $\mathrm{Aut}(\Lambda^n)$ des automorphismes de Λ^n, i.e. de $\mathcal{B}_n$ sur les matrices $n\times n$ à coefficients dans Λ.

On introduit la matrice

$$U_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \tag{14}$$

a. Calculer l'inverse de la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Corrigé :

On obtient facilement

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-1} & 1-t^{-1} \end{pmatrix}$$

---

b. Montrer que U_i est inversible et donner cette inverse. Commenter

---

Corrigé :

Les matrices U_i sont bloc-diagonales, donc

$$U_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix}$$

on en déduit que

$$U_i^{-1} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & U^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix}$$

qui est bien une matrice $n \times n$ à coefficients dans Λ.

---

c. Comparer les produits U_iU_j et U_iU_j pour $|i-j| \geq 2$.

Corrigé :

La structure bloc-diagonale des matrices U_i et U_j permet immédiatement de vérifier que $U_iU_j = U_iU_j$.

---

d. Comparer les produits $U_iU_{i+1}U_i$ et $U_{i+1}U_iU_{i+1}$.

Corrigé :

On établit facilement que $U_iU_{i+1}U_i = U_{i+1}U_iU_{i+1}$. Il suffit de le vérifier dans le cas $n = 3$ (les bloc identités de taille supérieure ne jouant aucun rôle algébrique). On vérifie que

$$\begin{aligned} U_1U_2U_1 &= \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-t & t(1-t) & t^2 \\ 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_2U_1U_2\,. \end{aligned}$$

---

e. En déduire finalement qu'il existe un unique morphisme

$$\begin{aligned} \Psi_n : \mathcal{B}_n &\to \mathrm{Aut}(\Lambda^n) \\ \sigma_i &\mapsto U_i \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Comment s'appelle un tel morphisme ?

Corrigé :

Ceci découle immédiatement des questions précédentes. Ce morphisme est par définition une représentation de $\mathcal{B}_n$ sur $\mathrm{Aut}(\Lambda^n)$.

---

f. Que se passe-t-il dans la limite $t = 1$? Justifier le fait que la représentation de Burau puisse être considérée comme une déformation de la représentation usuelle de dimension n du groupe symétrique.

Corrigé :

Pour $t = 1$, les matrices U_i constituent une représentation canonique du groupe symétrique, puisqu'on a alors $U_i^{-1} = U_i$. Ceci justifie l'appellation de la représentation de Burau comme une déformation d'une représentation du groupe symétrique.

---

10. Représentation réduite de Burau

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$.

On introduit $n-1$ matrices $V_1, \cdots, V_{n-1}$ de dimensions $(n-1) \times (n-1)$ définies par

$$V_1 = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}, \; V_{n-1} = \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

et, $\forall i$ tel que $1 < i < n-1$,

$$V_i = \begin{pmatrix} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-2} \end{pmatrix} .$$

On définit également la matrice C :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Finalement, on introduit des matrices lignes de longueur $n-1$, définies par

$$\begin{aligned} \forall i \neq n-1\,,\ X_i &= (0, \cdots, 0)\,, \\ X_{n-1} &= (0, \cdots, 0, 1). \end{aligned}$$

On pose

$$W_i = \begin{pmatrix} V_i & 0 \\ X_i & 1 \end{pmatrix} .$$

a. Calculer U_iC et CW_i.

Corrigé :

On obtient facilement

$$U_iC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = CW_i\,.$$

b. En déduire que

$$C^{-1}U_iC = \begin{pmatrix} V_i & 0 \\ X_i & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

c. Montrer que $C^{-1}U_iC$ possède un sous-espace invariant de dimension 1.

Corrigé :

Ceci est immédiat d'après l'écriture précédente.

d. Pourquoi le fait de considérer le quotient de Λ^n par ce sous-espace invariant permet-il d'obtenir des représentations de $\mathcal{B}_n$ de dimension $n-1$? Quelle est la matrice représentative de cette nouvelle représentation ?

Corrigé :

Sur l'espace vectoriel Λ^n (donc abélien pour l'addition), on peut quotienter par un sous-espace vectoriel, et obtenir ainsi un groupe quotient. La matrice bloc correspondante définit la matrice de cette représentation, ici V_i :

$$\begin{aligned} \text{pour } n > 2,\ \Psi_n^r : \mathcal{B}_n &\rightarrow \text{Aut}(\Lambda^{n-1}) \\ \sigma_i &\mapsto \Psi_n^r(\sigma_i) = V_i\,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{pour } n = 2,\ \Psi_2^r : \mathcal{B}_2 &\rightarrow \text{Aut}(\Lambda^{1}) \\ \sigma_1 &\mapsto \Psi_2^r(\sigma_1) = -t\,. \end{aligned}$$

Note :

La représentation de Burau est fidèle pour $n \leq 3$ et non fidèle pour $n \geq 5$. Le caractère fidèle ou non du cas $n = 4$ est actuellement un problème ouvert en mathématiques...