Sorbonne Université

M1/Master de Sciences et Technologie/Mention Physique et Application

4P066 – Symétries en Physique

Examen de deuxième session

jeudi 27 juin 2019

Durée 2h. Documents de cours autorisés, calculatrices et téléphones interdits.

1 Exercice

Soient H et F deux sous-groupes d'un groupe G.

1. Montrer que $< H \cup F >$ est l'ensemble des éléments de la forme $h_1 f_1 \cdots h_r f_r$ $(r \geqslant 1)$ avec pour tout $\forall i,\ h_i \in H$ et $f_i \in H$.

Corrigé :

D'une part, tous les éléments de cette forme font partie de $< H \cup F >$ par définition. D'autre part, il suffit d'utiliser le fait que H et G ferment sur eux-même, et que e peut-être ajouté au début ou à la fin pour compléter, pour montrer que les produits arbitraires d'éléments de H et F sont de la forme demandée. Le fait que l'ensemble des éléments de la forme $h_1 f_1 \cdots h_r f_r$ $(r \geqslant 1)$ avec pour tout $\forall i,\ h_i \in H$ et $f_i \in H$ forme un groupe vient du fait que

$$h_1 f_1 \cdots h_r f_r (h_1' f_1' \cdots h_p' f_p')^{-1} = h_1 f_1 \cdots h_r f_r f_p'^{-1} h_1'^{-1} \cdots f_p'^{-1} h_p'^{-1} e$$

qui est bien de la forme recherchée, puisque $f_r f_p'^{-1} \in F$. Ceci achève la preuve.

---

2. On note HF le sous-ensemble de G formé des éléments de la forme hf avec $h \in H$ et $f \in F$.

a) Montrer que $< HF > = < H \cup F >$.

Corrigé :

Le résultat est immédiat d'après la question précédente.

---

b) En général, HF est-il un sous-groupe de G?

Corrigé :

Non ! Il n'est stable ni par inversion ni par produit.

---

2 Théorème de Bloch

2.1 Préliminaires

1. Soit G un groupe fini abélien. On souhaite montrer que le nombre de représentations irréductibles sur $\mathbb{C}$ de ce groupe est égal au cardinal de ce groupe.
a) Etablir le résultat dans le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Corrigé :

Une représentation D de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est un morphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$, qui doit donc vérifier par construction le fait que $D(1)$ soit une racine $n-$ième de l'unité. Une fois fixée cette valeur, le fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit cyclique détermine alors complètement la représentation. Or l'unité possède n racine $n-$ième distinctes, d'où le résultat.

---

b) En déduire le résultat dans le cas général.

Corrigé :

Un groupe fini abélien est cyclique. Or on a établi en cours que tout groupe fini cyclique est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'où le résultat.

---

2. Principe de Wigner.

Soit un système physique d'hamiltonien H, et G un groupe de symétrie de ce système, ce qui signifie que tout élément de G commute avec H. Soit $\mathcal{E}_n$ l'espace propre de H d'énergie E_n, de dimension m.

a) Justifier le fait que cet espace propre soit invariant sous l'action de G, et discuter la dégénérescence du niveau E_n.

Corrigé :

Soit $|\psi\rangle$ un ket de l'espace propre $\mathcal{E}_n$, et U un élément de G. On a donc

$$HU|\psi\rangle = UH|\psi\rangle = E_n U|\psi\rangle$$

ce qui montre que $U|\psi\rangle$ est un ket propre de H correspondant à la valeur propre E_n. La dégénérescence du niveau E_n est donc égale à m.

---

b) Comment construire un espace vectoriel support d'une représentation de dimension m de G?

Corrigé :

Il suffit de considérer $\mathcal{E}_n$, puisqu'il est invariant sous l'action de G.

---

c) Supposons qu'une représentation de dimension m du groupe de symétrie G de H soit irréductible. On considère un état d'énergie E_n dans l'espace de cette représentation, dont la dégénérescence a été discutée à la question précédente.

On réalise que G est en fait un sous-groupe propre d'un groupe G', lui-même étant identifié comme un groupe de symétrie de H. Discuter alors la dégénérescence du niveau E_n, en fonction du caractère réductible ou non de la représentation D par rapport à G'.

Corrigé :

Si la représentation reste irréductible suivant G', alors le niveau reste avec la même dégénérescence m. Si en revanche cette représentation devient réductible, alors l'espace $\mathcal{E}_n$ se scinde en une somme directe d'espaces sur lesquels la représentation de G' est irréductible. Sur chacun d'eux les niveaux d'énergie sont dégénérés, et a priori les énergies sont distinctes d'une espace à l'autre : on a donc une levée de dégénérescence du niveau d'énergie E_n.

---

d) En déduire le principe de Wigner :
Chaque niveau d'énergie d'un système quantique est en correspondance avec l'une des représentations irréductibles du groupe de symétrie complet de son hamiltonien.

Corrigé :
Si l'on a identifié le groupe de symétrie complet G' du système, la discussion ci-dessus permet de conclure.

2.2 Electron dans un potentiel périodique

On considère un électron sans spin dans un solide cristallin monodimensionnel. Cet électron est soumis à un potentiel périodique, de période a. La dimension totale du cristal est égale à $L = Na$. On suppose que la fonction d'onde de l'électron satisfait à des conditions aux limites périodique, i.e.

$$\psi(x + Na) = \psi(x)\,. \tag{1}$$

Tout se passe donc comme si l'électron se déplaçait sur un cercle de périmètre Na.
3. a) A quel groupe fini le groupe de symétrie de translation G du hamiltonien est-il isomorphe ?

Corrigé :
Le groupe de symétrie de translation est isomorphe à C_N.

---

b) Quelles sont les dégénérescences possibles des niveaux d'énergie de l'électron ?

Corrigé :

Le groupe de symétrie étant abélien, toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1. Chaque niveau d'énergie est donc non dégénéré.

---

4. a) Combien de représentations irréductibles le groupe G possède-t-il ?

Corrigé :

D'après la question préliminaire, G étant abélien, il possède N représentations irréductibles.

---

b) Montrer que les caractères de ces représentations, relatifs à une translation de longueur na, sont de la forme

$$\chi(na) = e^{(2i\pi m/N)n}. \tag{2}$$

Corrigé :

Les caractères $\chi(a)$ sont des racines $N-$ièmes de l'unité, donc de la forme

$$\chi(a) = e^{2i\pi m/N}$$

avec m entier, compris entre 0 et $N-1$, qui permet d'étiqueter la représentation irréductible. Ainsi

$$\chi(na) = (\chi(a))^n = e^{(2i\pi m/N)n}.$$

---

5. On souhaite maintenant montrer que l'on peut exprimer un état propre de l'électron sous la forme

$$e^{ik_m x} u_m(x)\,, \tag{3}$$

où k_m peut prendre une suite de valeurs à préciser, et où $u_m(x)$ est périodique de période a.

a) Pour une représentation irréductible donnée du groupe des translations, étiquetée par l'indice m, de caractère donné par (2), examiner l'action d'une translation na sur une fonction d'onde $\psi_m(x)$ de cette représentation.

Corrigé :

L'action du groupe des translations revient à multiplier par le caractère de la représentation, donc

$$\psi_m(x+na) = e^{(2i\pi m/N)n}\psi_m(x)\,.$$

---

b) En déduire que l'on peut écrire $\psi_m(x)$ sous la forme

$$\psi_m(x) = e^{i\phi_m(x)}u_m(x) \tag{4}$$

où u_m est périodique de période a et ϕ_m est une fonction réelle.

Corrigé :

La question précédente permet d'affirmer que $\psi_m(x+na)$ et $\psi_m(x)$ ont même module : $|\psi_m(x+na)| = |\psi_m(x)|$. On peut donc écrire $\psi_m(x)$ sous la forme (4), en notant ce module $u_m(x)$, qui doit alors être périodique de période a, et en notant $\phi_m(x)$ la phase de ψ.

---

c) Montrer que $\phi_m(x)$ doit vérifier

$$\phi_m(x+na) = \phi_m(x) + 2\pi\frac{m}{N}n\,. \tag{5}$$

Corrigé :

La question a) combinée à l'écriture de la question b) conduit à

$$e^{i\phi_m(x+na)} = e^{(2i\pi m/N)n}e^{i\phi_m(x)}$$

soit

$$\phi_m(x+na) = \phi_m(x) + 2\pi\frac{m}{N}n\,.$$

---

d) Résoudre cette équation et en déduire le résultat. On précisera la valeur de k_m.

Corrigé :
La relation (5) montre que ϕ_m est linéaire en n, et donc en x puisque c'est un fonction d'une seule variable. On peut donc écrire

$$\phi_m(x) = 2\pi\frac{m}{Na}x + A$$

où A est une constante que l'on peut absorber dans la fonction u_m. En posant

$$k_m = \frac{2\pi m}{Na}$$

on obtient donc le résultat demandé.

---

6. On considère maintenant la limite d'un système de taille infinie, en passant à la limite $N \to \infty$.
a) Montrer que les fonctions propres de l'électron gardent la forme (3), où k prend maintenant des valeurs quelconques dans un intervalle de longueur κ que l'on précisera.

Corrigé :
On a vu ci-dessus que $k_m = \frac{2\pi m}{Na}$ varie de façon discrète 0 à $\frac{2\pi(N-1)}{Na}$, avec un pas égal à $\frac{2\pi}{Na}$. Dans la limite $N \to \infty$, k peut donc varier continûment dans l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{a}[$, de longueur $\kappa = \frac{2\pi}{a}$.

---

b) Montrer que deux valeurs de k qui diffèrent de κ correspondent à la même représentation irréductible du groupe infini G des translations.

Corrigé :

Le caractère $\chi(na)$ s'écrit, d'après (2),

$$\chi(na) = e^{ikna}. \tag{6}$$

Deux représentations dont les valeurs de k diffèrent de κ ont donc le même caractère, et sont donc équivalentes.